

SPSA를 이용한 EIT 영상복원

김호찬, 부장진  
 제주대학교 공과대학 전기전자공학부

EIT Image Reconstruction Using SPSA

Kim Ho-Chan and Boo Chang-Jin  
 Faculty of Electrical and Electronic Engineering, Cheju National University

**Abstract** - Electrical impedance tomography(EIT) determines the resistivity distribution inside an inhomogeneous target by means of voltage and current measurements conducted at the target boundary. In this paper, a simultaneous perturbation stochastic approximation(SPSA) approach is proposed for the solution of the EIT image reconstruction. Results of numerical experiments of EIT solved by the SPSA approach are presented and compared to that obtained by the modified Newton-Raphson(mNR) method.

1. 서 론

미국 Wisconsin 주립대학의 Webster [1] 박사에 의해서 제안된 전기 임피던스 단층촬영법(electrical impedance tomography, EIT)은 미지의 내부 저항률(resistivity) 분포를 갖는 물체 주위에 특수하게 제작된 전극을 여러 개 배치하고 적절하게 설계된 전류를 주입하여 이에 따른 인가 전압을 물체 경계에서 측정한다. 이를 근거로 EIT의 저항률 복원 알고리즘에서 물체 내부의 미지의 저항률 분포를 재구성하는 기술이다.

EIT 영상복원(image reconstruction) 과정은 크게 다음 두 가지 계산과정의 반복 연산으로 구성된다. 첫 번째 과정에서는 표적의 경계면에서 여러 개의 전극을 통하여 전류를 주입하고 저항률의 함수로써 경계면에 유기되는 전압을 구하며, 이를 정문제(forward problem)라고 한다. 이는 Neumann형의 경계조건을 갖는 비선형 Laplace 방정식으로 기술되며, 그 해석적인 해를 구하기가 매우 어려우므로 수치적 방법인 FEM(finite element method) 또는 BEM(boundary element method)으로 근사해를 구한다. 두 번째 과정에서는 역으로 경계면에 유기된 전압 값을 이용하여 표적내부의 저항률 분포를 추정하여 표적의 영상을 복원하는데, 이는 비선형성과 ill-conditioning 현상 등이 수반되는 상당히 난해한 역문제(inverse problem)문제에 해당한다. EIT 영상복원 알고리즘에는 주로 backprojection 방법, perturbation 방법, double constraint 방법, Newton-Raphson 방법 등이 있으며, 특히 Yorkey 등 [2]은 복원 알고리즘들을 비교 분석하여 mNR(modified Newton-Raphson) 방법이 다른 알고리즘에 비해 수렴 속도, 잔류오차 등의 측면에서 비교적 좋은 성능을 나타낸다고 발표하였다.

그러나 실제 상황에서 mNR 방법은 비선형 특성의 선형화에 따른 모델링 오차, 측정전압의 낮은 신호 대 잡음비(SNR) 및 Hessian 행렬의 부정치성(ill-posedness) 특성들 때문에 만족스러운 영상을 얻기가 쉽지 않다. 이러한 Hessian 행렬의 부정치성 문제를 해결하기 위해 다양한 regularization 방법을 제시해 왔다 [3]. 그러나 목적함수를 미분하여 매개변수를 구하는 mNR 방법을 이용하여 영상복원을 수행할 때, 저항률이 연속적으로 변하는 경우는 영상복원 성능이 우수하지만 불연속적으로 저항률이 분포되어 있는 경우는 참값과 다른 값으로 수렴함을 볼 수 있다.

본 논문에서는 각각 서로 다른 저항률을 갖는 물체와 배경이 분포되어 있는 단층구조의 경우에 SPSA를 적용하여 물체의 영상을 복원하는 방법을 제안한다. mNR 방법으로 어느 정도 수렴된 영역을 그 값을 기초로 SPSA를 이용하여 실제의 배경요소와 물체의 저항률을 구하였다.

2. SPSA를 이용한 EIT 영상복원

2.1 정문제(forward problem)의 풀이

표적의 경계면에서 여러 개의 전극을 통하여 전류를 주입하고 이미 알고 있는 저항률의 경계면에 유기되는 전압은 다음과 같이 Neumann 형의 경계조건을 갖는 비선형 Laplace 방정식으로 기술되며, 본 논문에서는 전극과 내부와의 접촉저항률(contact impedance)을 고려한 다음과 같은 완전전극모델(complete electrode model)을 사용한다 [3].

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla u \right) = 0 \text{ in } \Omega \quad (1)$$

$$u + z_l \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} = U_l, x \in e_l, l=1,2,\dots,L \quad (2)$$

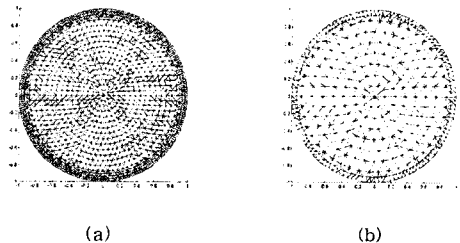
$$\int_{e_l, \rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} = I_l, x \in e_l, l=1,2,\dots,L \quad (3)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, x \in \partial\Omega \setminus \bigcup_{l=1}^L e_l \quad (4)$$

여기서  $u, \rho, z_l, U_l, \nu, L$  은 각각 내부 전압, 저항률(impedance), 전극과 내부와의 접촉저항률, 전극에서의 전압 법선벡터, 전극 수를 나타낸다. 해의 존재성과 유일성을 보장하기 위하여 다음과 같은 주입 전류와 측정 전압에 대한 조건을 부가한다.

$$\sum_{l=1}^L I_l = 0 \text{ and } \sum_{l=1}^L U_l = 0 \quad (5)$$

위의 Neumann 형의 경계조건을 갖는 비선형 Laplace 방정식의 해석적(analytical)인 해는 구하기가 매우 어려우므로 본 논문에서는 Fig. 1과 같이 주어진 메쉬를 통한 FEM을 사용하였다. 이때 전극수는 32개로 하였으며 원의 중심에서 같은 반지름 상에 있는 요소의 저항률은 일치하는 경우에 대해서만 살펴본다 [4].



$$E(\theta) = L(\theta) + \omega(k) \quad (11)$$

Fig. 1 Finite element mesh used in the calculation. (The resistivities of the elements within an annular ring are identical.) (a) mesh for forward solver, (b) mesh for inverse solver.

## 2.2 역문제 (inverse problem)의 풀이

표적 내부의 저항률이 변하지 않고 고정된 (static) 영향을 복원하기 위하여, 다음과 같이 주어지는 목적함수 (object)

$$\mathcal{O}(\rho) = \frac{1}{2} [V_M(\rho) - U_M]^T [V_M(\rho) - U_M] \quad (7)$$

를 최소화하는 저항률 분포  $\rho$  를 찾는다. 여기서  $V_M(\rho) \in \mathbb{R}^{LP}$  는 현재의 가정된 저항률 분포  $\rho$  에서 FEM을 사용하여  $P$  개의 모든 입력 전류 패턴에 대하여 계산된 전극에서 유기된 모든 전압의 저장된 값이고,  $U_M = [v_1, v_2, \dots, v_P]^T \in \mathbb{R}^{LP}$  모든 전류 패턴에 대해 측정된 전극에서 유기된 모든 전압의 저장값이며,  $v_i = (v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^P)^T \in \mathbb{R}^P$   $i$  번째 전류 입력 패턴에서 측정된 각 전극에서의 전압이다. 따라서 다음과 같은 조건을 만족하는 저항률 분포를 찾는 것이 된다.

$$\mathcal{O}'(\rho) = [V_M'(\rho)]^T [V_M(\rho) - U_M] = 0 \quad (8)$$

위의 (8)은 비선형이므로 다음과 같이 반복적인 선형화를 하여 푼다.

$$\rho^{k+1} = \rho^k + \Delta \rho^k \\ \Delta \rho^k = \rho^{k+1} - \rho^k = -H^{-1} \{J^T [V_M(\rho^k) - v]\} \quad (9)$$

이때 사용되는 Hessian 행렬  $H$ 와 Jacobian 행렬  $J$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$H = J^T J, \quad J = \frac{\partial V_i}{\partial \rho_j}, \quad i = 1, 2, \dots, L \times P \quad (10)$$

여기서  $\rho_j$ 는  $j$  번째 요소에서의 저항률이고,  $N$ 은 영상 복원에 사용된 요소의 총 수이다.

mNR 방법은 저항률 분포  $\rho^k$ 를 (9)와 (10)을 이용하여 수렴조건이 만족될 때까지 갱신한다. 이때, 저항률이 연속적으로 분포되어 있는 경우는 mNR 방법으로 복원된 영상의 저항률 분포는 우수하지만, 저항률이 불연속적으로 분포되어 있는 경우는 mNR 방법으로 복원된 영상의 저항률 분포들은 부정확한 값으로 수렴하는 특성을 가지게 된다. 따라서 본 논문에서는 SPSA를 이용하여 mNR 방법보다 계산된 저항률들을 구할 수 있도록 하였다.

## 2.3 SPSA 알고리즘의 적용

확률적 근사화 (stochastic approximation, SA)는 외부 잡음 등이 존재할 때 목적함수를 최적화시키는 문제에 많이 적용되어 있다. Spall [5]에 의해 제안된 SPSA 방법은 동시인자변환을 통해 그래디언트를 근사화시키는 방법으로 구현이 간단하고 쉽게 적용할 수 있다. 일반적인 SA에서 그래디언트를 근사화시키기 위해서는 추정하려는 매개변수 개수의 2배에 해당하는 목적함수 값을 계산하여야 하는데, SPSA 방법의 가장 큰 특징을 추정하려는 매개변수의 수에 관계없이 두 번의 목적함수 값을 계산하도록 한다. 이 SPSA 방법의 두드러진 특징은 폭넓은 응용 가능성과 최상에 가까운 해답을 얻을 수 있으나 그래디언트를 직접 계산하는 경우보다 수렴시간이 긴 단점이 존재한다. SPSA 방법에서 입력 매개변수 벡터  $\theta$ 를 스칼라 값으로 전달해주는 목적함수를 다음과 같이 놓는다.

여기서  $\theta$ 는 입력공간에서 한 벡터,  $\omega(k)$ 는 외부 잡음을 나타낸다.  $\omega(k)$ 가 존재하지 않는 경우 Newton-Raphson 방법같이 그래디언트를 직접 계산할 수도 있으나 그래디언트가 직접적으로 계산되지 못하거나  $\omega(k)$ 가 존재하는 경우에는 근사화된 그래디언트 값을 사용해야 한다. 함수  $L(\theta)$ 가 미분가능한 경우에 그래디언트 다음과 같이 주어진다.

$$g(\theta) = \frac{\partial L(\theta)}{\partial \theta} \quad (12)$$

이때 목적함수를 최소화시키는 매개변수를 찾는 것은  $g(\theta^*) = 0$ 을 만족하는  $\theta^*$ 를 구하는 것이다. 그래디언트를 직접 구하지 못하는 경우에는 다음과 같은 SPSA 알고리즘을 통해 매개변수를 추정하도록 한다.

$$\theta_{k+1} = \theta_k - a_k g_k(\theta_k) \\ g(\theta_k) = \frac{E(\theta_k + c_k \Delta_k) - E(\theta_k - c_k \Delta_k)}{2c_k} \begin{bmatrix} \Delta_{k1}^{-1} \\ \Delta_{k2}^{-1} \\ \vdots \\ \Delta_{kp}^{-1} \end{bmatrix} \quad (13)$$

여기서  $a_k$ 와  $c_k$ 는 SPSA에서 사용되는 이득이고  $\Delta_{ki}$ 는  $p$  차원의 벡터  $\Delta_k$ 의  $i$  번째 원소의 값으로서 확률 0.5로 1 또는 -1 값을 갖는다. 따라서  $p$  차원의 매개변수를 취하는 경우에도 두 개의 목적함수 값을 구하면 그래디언트의 근사치를 쉽게 구할 수 있다. 본 논문에서는 SPSA를 이용하여 내부 저항률을 구하기 위해서 각각의 저항률 값이 하나의 매개변수가 되어야 하므로 추정하여야 할 매개변수 벡터는 모든 내부 저항률 값을 원소로 포함해야 한다. 따라서 FEM의 총 노드 수가 증가할수록 추정할 매개변수의 개수는 증가하고 계산시간은 상당히 길어진다. 목적함수는 모든 개체에 대해 계산되는데, EIT에서는 목적함수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E(\rho) = \frac{1}{M} \left( \sum_{i=1}^M \frac{\phi_i - \varphi_i}{\phi_i} \right)^2 \quad (14)$$

여기서  $\phi_i$ 와  $\varphi_i$ 는 각각 계산적으로 얻어진 경계에서 전위값과 경계에서 측정된 전위값이다. SPSA 방법을 이용한 영상 복원은 Fig. 2와 같은 과정을 통해 구현할 수 있는데 다음과 같은 단계로 나타낼 수 있다.

단계 1: 매개변수 벡터의 초기값을 결정해야 하는데, EIT에서는 모든 내부 저항률의 초기치를 구해야 한다. 매개변수의 초기값에 따라 SPSA 방법의 수렴속도가 결정되므로 알고리즘의 계산시간에 중요하게 영향을 미친다. 일반적으로 많이 사용되는 mNR 알고리즘을 사용하여 매개변수 벡터 초기치 ( $\rho_0$ )를 결정하도록 한다. SPSA 방법의 각 스텝에서 사용되는 이득  $a_k = a/(A + k + 1)^{\alpha}$ ,  $c_k = c/(k + 1)^{\beta}$ 의 계수  $a, c, A, \alpha, \beta$  값들을 결정한다. 반복계수  $k$ 를 1로 둔다.

단계 2: 계수가  $k$ 일 때 추정된 저항률 매개변수  $\rho_k$  동시인자변환  $\Delta_k$ 과 변수  $c_k$  값을 이용하여 저항률이  $\rho_k + c_k \Delta_k$ 와  $\rho_k - c_k \Delta_k$ 일 때 경계에서의 전위값  $\phi_i$ 을 계산한다. 그리고 경계에서 측정된 전위값  $\varphi_i$ 을 이용하여 두 개의 목적함수값  $E(\rho_k + c_k \Delta_k)$ 와

$E(\rho_k - c_k \Delta_k)$ 을 계산한다

단계 3: 단계 2에서 구한 두개의 목적함수를 이용하여 그라디언트 계산하고 계수  $k+1$ 에서 사용될 새로운 매개변수  $\rho_{k+1}$ 를 기본적인 SA 방법으로 추정한다.

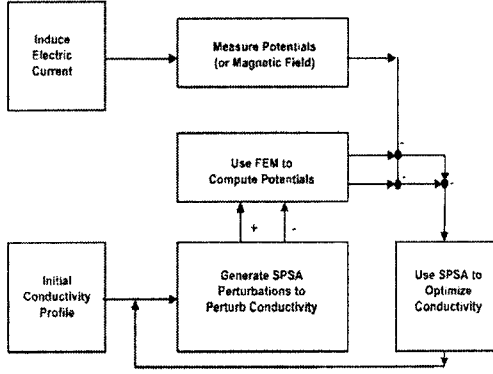


Fig. 2 Configuration of EIT using SPSA method.

### 3. 시뮬레이션 및 결과

SPSA 방법의 적용은 영상을 복원하는데 먼저 mNR 방법을 사용하여 구한 값과 SPSA 방법을 이용하여 구한 값을 비교 분석한다. SPSA 방법은 목적함수의 미분 가능 여부에 무관하기 때문에 저항률 분포를 추정하기 위해 사용하였다. 이때, 저항률의 분포는 mNR 방법의 경우와 같이 저항률을  $\rho_1 \sim \rho_9$ 로 그룹지어 각 저항률을 매개변수 벡터로 나타내어 SPSA 방법으로 구하였다. SPSA의 성능은 주로 매개변수 벡터의 초기치와 SPSA 방법에 사용된 계수들의 크기에 따라 결정되는데, 본 연구에서는 매개변수 벡터의 초기치를 mNR 방법에서 구한 유전율 값을 사용하였으며 계수들의 크기는  $A=100$ ,  $\alpha=0.602$ ,  $\gamma=0.161$ 로 놓았고 SPSA는 10000 스텝까지 구하였을 때의 결과를 나타내었다.

mNR 방법과 메쉬그룹핑을 하지 않고 SPSA 방법을 수행할 경우에 얻어진 저항률은 Table 1와 같다.

Table 1 True resistivities and computed resistivities using mNR and SPSA.

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$\rho_5$	$\rho_6$	$\rho_7$	$\rho_8$	$\rho_9$
real	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.5	0.5
mNR	0.521	0.497	0.483	0.538	0.603	0.572	0.496	0.502	0.499
SPSA	0.523	0.501	0.481	0.517	0.592	0.602	0.500	0.499	0.500

Table 1을 보면 SPSA 방법으로 계산된 결과는 mNR 방법보다는 약간 개선되었지만 각각 저항률들이 참값에 수렴하지는 않음을 알 수 있다. 이것은 전역해의 탐색능력은 뛰어나지만, 어느 정도 수렴한 경우에는 더 이상의 개선을 시키지는 못하는 SPSA 방법의 특성에 기인한 것이다. 특히 EIT의 영상복원은 외부전극에서 측정된 전압 값 외의 다른 내부저항 분포에 대한 정보가 없기 때문에 SPSA 방법에서 계산된 전압과의 차이가 이용된 목적함수 값이 작은 값으로 갱신되어 기다려도 실제 해의 개선은 별로 없게 된다. 이런 경우 SPSA 방법을 이용한 알고리즘으로는 저항률의 복원성능을 많이 향상시킬 수 없다. 따라서 본 논문에서는 메쉬그룹핑을 이

용한 SPSA 방법을 사용한다. 최대값에 근접하는 그룹  $\rho_{\max}(\rho_5, \rho_6)$ 와 최소값에 속하는 그룹  $\rho_{\min}(\rho_2, \rho_3, \rho_7, \rho_8, \rho_9)$  그리고 나머지 중간값을 갖는 그룹  $\rho_{\text{temp}}(\rho_1, \rho_4)$ 로 분류하여 매개변수 벡터의 원소의 개수가 4개인 SPSA 방법을 사용하여 10000 스텝까지 시뮬레이션하였다. 시뮬레이션을 수행할 때 중간값을 갖는 그룹  $\rho_{\text{temp}}(\rho_1, \rho_4)$ 의 저항률 값이  $\rho_{\max}$ 보다 큰 값을 갖는 경우는  $\rho_{\max}$ 로,  $\rho_{\min}$ 보다 작은 값일 경우에는  $\rho_{\min}$ 으로 값을 보정하였다. 이 때 얻어진 저항률들에 관한 결과를 Table 2와 Fig. 3에 나타내었는데, mNR 방법에서 가장 많은 오차를 나타내는 중간값 그룹  $\rho_{\text{temp}}(\rho_1, \rho_4)$ 의 값들이 SPSA 방법으로 구했을 때 참값에 많이 근접하는 것을 알 수 있다.

Table 2 True resistivities and computed resistivities using mNR and SPSA.

	$\rho_1$	$\rho_2$	$\rho_3$	$\rho_4$	$\rho_5$	$\rho_6$	$\rho_7$	$\rho_8$	$\rho_9$
real	0.5	0.5	0.5	0.5	0.6	0.6	0.5	0.5	0.5
mNR	0.521	0.497	0.483	0.538	0.603	0.572	0.496	0.502	0.499
SPSA	0.511	0.500	0.500	0.506	0.596	0.596	0.500	0.500	0.500

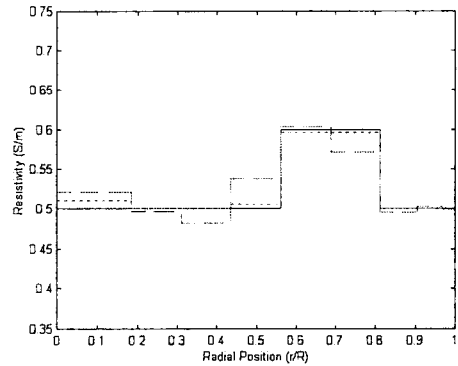


Fig. 3 True resistivities (solid line) and computed resistivities using mNR (dashed line) and SPSA (dotted line).

### [참 고 문 헌]

- J.G. Webster, *Electrical Impedance Tomography*, Adam Hilger, 1990.
- T.J. Yorkey, J.G. Webster, and W.J. Tompkins "Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography", *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, vol. BME 34, pp. 843-852, 1987.
- M. Vauhkonen, *Electrical Impedance Tomography and prior information*, Natural and Environmental Sciences, Kuopio University Publications Co., 62, 1997.
- J.E. Bultler and R.T. Bonnecaze, "Imaging of particle shear migration with electrical impedance tomography," *Physics of Fluids*, vol. 11, no. 8, pp. 1982-1994, 1999.
- J.C. Spall, "Multivariate stochastic approximation using a simultaneous perturbation gradient approximation," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 37, pp. 332-341, 1992.