

위상최적설계를 이용한 자석 형상 설계

강제남, 박승규, 왕세명  
 광주과학기술원 기전공학과

Magnet Design by using Topology Optimization

Jenam Kang, Seoungkyu Park, Semyung Wang  
 K-JIST(Kwangju Institute of Science & Technology)

**Abstract** - The magnet design is investigated by using the topology optimization and FEM. The design sensitivity equation for topology optimization is derived using the adjoint variable method and the continuum approach. The proposed method is applied to the topology optimization of C-core.

내에서 어떤 목적 함수(objective function)를 최대 또는 최소로 하는 최적의 재료의 배치를 구하는 것이다.

외부로부터 자계(flux)  $\phi$ 와 전류  $J_s$ 가 작용하고 있는 전자기 시스템의 경우에 일반화된 위상 최적 설계 문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{minimize(maximize)} \quad f(A, \mu) \quad (1)$$

$$\text{subject to} \quad a_Q(A, \bar{A}) = l_Q(\bar{A}) \text{ for all } \bar{A} \in \bar{A} \quad (2)$$

1. 서 론

최근 그 가능성이 실현화되면서 많은 산업체에서 최적 설계 방법론을 설계도구로서 사용하는 경향이 늘고 있다. 최적설계 방법론은 체계적인 공학 설계 과정을 위한 수단으로 볼 수 있으며 그러한 도구를 적절히 사용하면 설계자의 개념을 최종 설계로 구체화시키는 데에 드는 시간을 상당히 줄일 수 있다 [1].

비교적 짧은 역사에도 불구하고 위상최적설계(topology optimization)는 지금까지 많은 수학자와 공학자의 관심을 가져 왔다. 전자기 시스템의 경우에 기존의 형상 최적설계(shape optimization)는 현재 설계의 개선에 중점을 두는 반면, 위상최적설계는 초기 개념 설계에 중점을 두고 있다 [2].

선행된 연구에서는 자속이 흐르는 길을 만들어 주는 코어들에 대한 위상최적설계의 적용을 보여 주었다 [3]. 또한, MEMS 분야에서 기존에 정전계의 힘(electrostatic force)을 이용했던 액추에이터들이 MEMS 공정 기술의 향상으로 정자계의 힘(magnetostatic force)을 이용하는 쪽으로 연구가 활성화되고 있다.

본 논문에서는 유한 요소 해석(Finite Element Analysis, FEA) 프로그램 중의 하나인 ANSYS를 이용하여 자속을 발생시키는 힘에 해당하는 자석의 형상 설계를 위한 위상최적설계 기법을 개발하였다.

전자기장의 변분식을 해석적으로 미분함으로써(연속체 방법, continuum method) 설계 민감도 해석을 위한 수식을 얻어내었고 [4], 이 때 밀도법이 이용되었으며 ANSYS와 연결되어 민감도 계산이 가능하도록 하였다. 전체적인 프로그램의 제어와 민감도 계산을 위해 설계 프로그램이 개발되었다. 최적 설계 알고리즘으로는 DOT의 SLP를 사용하였으며, ANSYS를 목적함수나 구속조건을 위한 해석기로 사용하였다.

제시된 이론은 그 유용성과 실용성을 보이기 위하여 C-core의 자석 형상 설계에 적용되었다.

본 논문에 의해 개발된 자석 설계 기술을 MEMS 분야에 적용하여 자기 시스템 설계에 이용할 수 있다.

여기에서  $f(A, \mu)$ 는 자기 에너지(magnetic energy), 자기력(magnetic force), 자기 토크(magnetic torque)등과 같은 목적 함수이고,  $A$ 는 벡터 포텐셜(vector potential),  $\bar{A}$ 는 가상 벡터 포텐셜이다. 또한 투자율(permeability)  $\mu$ 와 시스템 출력(system output)  $A$ 의 함수인  $a_Q(A, \bar{A})$ 는 에너지 쌍선형 형태(energy bilinear form)이고  $l_Q(\bar{A})$ 는 힘 선형 형태(load linear form)이다.

2.2 전자기 시스템의 설계 민감도 해석

다음과 같이 적분 형태로 표현되는 전자기 시스템의 목적 함수는 식(3)과 같다.

$$\psi = \int \int \int_{\Omega} g(A, \nabla A, u) d\Omega \quad (3)$$

$A$ 는 벡터 포텐셜,  $u$ 는 식(4)와 같이 투자율, 전류 밀도, 보자력(Coercive Force) 등의 설계 벡터이다.

$$u = [u, J_s, H_c]^T \quad (4)$$

보조 변수에 대한 보조 방정식은 다음과 같다.

$$a_u(\lambda, \bar{\lambda}) = \int \int \int_{\Omega} [g_A \bar{\lambda} + g_{\nabla A} \nabla \bar{\lambda}] d\Omega \quad (5)$$

식(3)의 목적함수의 변분식과 직접 미분 결과를 이용하면 설계 민감도는 식(6)이 된다 [3].

$$\begin{aligned} \psi' &= \int \int \int_{\Omega} [g_A A' + g_{\nabla A} \nabla A' + g_u \delta u] d\Omega \\ &= \int \int \int_{\Omega} g_u \delta u d\Omega + \int \int \int_{\Omega} [g_A A' + g_{\nabla A} \nabla A'] d\Omega \quad (6) \\ &= \int \int \int_{\Omega} g_u \delta u d\Omega + l'_{\delta u}(\lambda) - a'_{\delta u}(A, \lambda) \end{aligned}$$

2. 위상설계민감도

2.1 위상 최적 설계

위상최적설계의 목적은 주어진 구속 조건(constraint)

2.3 정자기의 맥스웰 방정식과 변분식

정자기장(magnetostatic field)은 다음과 같은 맥스웰 방정식으로 표현된다.

$$\nabla \times H = J_s, \quad H = \frac{1}{\mu}(B - \mu_0 M), \quad \nabla \cdot B = 0 \quad (7)$$

여기에서  $H$ 는 자계 밀도(magnetic field intensity),  $J_s$ 는 입력 전류 밀도(current density),  $B$ 는 자속 밀도(magnetic flux density),  $\mu$ 는 재료의 투자율,  $\mu_0$ 는 공기의 투자율,  $M$ 은 자화 벡터(magnetization vector [A/m])이다. 여기에서  $B = \nabla \times A$ 과 식 (7)에서  $H$ 를 소거하면 벡터 포텐셜에 대한 하나의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = J_s + \nabla \times \left( \frac{\mu_0}{\mu} M \right) \quad (8)$$

여기서, ANSYS는 자화 벡터 대신 보자력을 입력으로 받아들이기 때문에 자화 벡터와 보자력 사이의 관계식은 식 (9)와 같다.

$$H_c = \frac{\mu_0}{\mu} M \quad (9)$$

따라서, 식(8)과 식(9)에 의해서 자기 시스템의 지배방정식을 식(10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = J_s + \nabla \times H_c \quad (10)$$

이제 적분 형태로 표현된 변분식을 구하기 위해서 식 (10)의 양변에 가상 벡터 포텐셜을 곱한 후 전 영역에 대해 적분하고 경계 조건을 대입하면, 다음과 같은 변분식(variational equation)을 구할 수 있다 [4].

$$a_{\Omega}(A, \bar{A}) = l_{\Omega}(\bar{A}) \text{ for all } \bar{A} \in \bar{A} \quad (11)$$

여기에서  $\bar{A}$ 는 허용 벡터 포텐셜 공간(the space of admissible vector potential)이고, 에너지 쌍선형 형태  $a_{\Omega}(A, \bar{A})$ 는

$$a_{\Omega}(A, \bar{A}) = \int \int \int_{\Omega} (\nabla \times A) \cdot \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} \right) d\Omega \quad (12)$$

이고, 힘 선형 형태  $l_{\Omega}(\bar{A})$ 는 식(13)과 같다.

$$l_{\Omega}(\bar{A}) = \int \int \int_{\Omega} (J_s \cdot \bar{A} + H_c \cdot (\nabla \times \bar{A})) d\Omega \quad (13)$$

## 2.4 정자기의 위상 설계 민감도

식 (5)의 보조 방정식은 이 경우에는  $\nabla \bar{\lambda} = 0$ 이므로,

$$a_u(\lambda, \bar{\lambda}) = \int \int \int_{\Omega} [g_A \bar{\lambda}] d\Omega \quad (14)$$

이 된다. 만약 등가의 전류 밀도가

$$J_{eq} = g_A \quad (15)$$

이면, 보조 변수  $\lambda$ 는 식 (10)의 오른쪽 항을 식 (15)로 바꾸었을 때의 해이다.

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = J_{eq} = g_A \quad (16)$$

(6)의 설계 민감도 식과 식 (12)와 식 (13)의 에너지 변분식을 이용하면, 보자력에 대한 민감도 식은

$$\frac{\partial \Psi}{\partial H_c} = \int \int \int_{\Omega} [g_{H_c} + (\nabla \times \lambda)] d\Omega \quad (17)$$

## 3. 밀도법

공기와 재료가 함께 있는 다공질의 재료(porous material)를 표현하기 위해서 보자력  $H_c$ 가  $\rho$ 의 지수 형태로 표현되는 가상의 재료(fictitious material)를 이용한다.

$$H_c = H_{\omega} \cdot \rho^P \quad (18)$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq V, \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega \quad (19)$$

여기에서  $P$ 는 벌칙 상수(penalization factor),  $\rho$ 는 밀도 함수(density function)이고,  $H_{\omega}$ 는 자석의 초기 보자력이다. 만약, 밀도 함수  $\rho$ 가 1이면 재료의 보자력은  $H_{\omega}$ 로 자석이 되고,  $\rho$ 가 0이면 보자력은 0로 공기가 된다.

## 4. 수치 예제

그림 1과 같은 C-core 액추에이터의 목적은 자석에 의하여 전기자(armature)를 끌어당기는 것이다. 목적에 부합하기 위해서 주어진 자석으로 최대의 자기력을 낼 수 있는 자석의 위상을 구하는 위상최적설계의 필요성이 대두된다.

따라서 식 (20) - (22)와 같이 자석의 체적을 줄이면서 전기자에 유도되는 전자기력을 최대화하는 최적화 문제를 구성할 수 있다.

여기서, 목적함수는 시스템에너지이고, 설계 변수는 보자력, 구속조건은 자석의 부피이다. 초기 보자력,  $H_{\omega}$ 의 세기 871562.78 [A/m]이고 자석의 비투자율은 1.05로 하였다.

$$\text{maximize } W = \int \int \int_{\Omega} \frac{1}{2} B \cdot H d\Omega \quad (20)$$

$$\text{subject to } g_1 = \frac{\int \int \int_{\Omega} \rho A t d\Omega_2}{V_r} - 1 \leq 0 \quad (21)$$

$$g_2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{NDV} (\rho_k - 0.5)^2}{NDV \cdot GI} \leq 0 \quad (22)$$

bounded to  $0 \leq \rho \leq 1$ , for all  $\rho \in \Omega_2$

여기에서  $V_c$ 는 최적화 후에 남아야만 하는 코어의 체적을 의미하고,  $G_c$ 는 최적화 후에 코어가 가져야 하는 회색 표시 지수(gray level indicator)를 의미한다. 첫 번째 구속 조건은 체적 한계이고, 두 번째 구속 조건은 최적화 도중에 나타날 수 있는 회색 영역을 제거하기 위해 사용되었다 [3].

코어 및 전기자의 너비는 모두 20mm이고, 코어의 전체 높이와 길이는 각각 60mm, 50mm이다.

그림 2는 정자기 시스템의 자석 설계를 위한 위상 최적설계 수행 후의 체적이 초기 체적의 80% 미만하도록 하고 ( $V_c = 0.8 V_{initial}$ ), 벌칙 상수  $P=3$  일 때의 최적화 결과를 순차적으로 나타낸 것이다. 그림 2에서 표현된 부분은 그림 1에서 자석부분(design domain)에 해당되는 부분만 확대하여 나타낸 것이다.

표 1에서는 초기모델과 최종모델에서의 시스템 에너지와 자석 부피를 비교하여 나타낸 것이다. 최적화된 코어를 사용했을 때 시스템 에너지는 초기 모델 보다 약 2.9%정도 줄어들었음을 알 수 있다. 하지만 자석의 부피는 20%를 줄임으로써 재료를 절감할 수 있다.

다시 말해서, 시스템 에너지의 손실을 최소한으로 줄이면서 자석의 부피를 초기 모델보다 20%정도 줄일 수 있었다.

결국, 자석 설계를 위한 위상 최적설계를 사용하여 최소한의 자석의 양으로 최대의 효과를 나타내는 자기 시스템을 보다 쉽게 설계할 수 있다.

그렇지만, 그림 2의 위상 최적설계의 결과에서 알 수 있듯이 이를 실질적으로 제작하기에는 많은 어려움이 있다. 하지만, MEMS와 같은 제작 공정에서는 쉽게 그 구현이 가능하다. 더불어, 자석 착자 기술의 지속적인 발전으로 MEMS 분야에서의 자석을 이용한 자기 시스템의 설계가 많이 대두되고 있다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 자석을 설계하기 위한 전자기 시스템의 위상 최적 설계에 대한 연구가 수행되었다. 연속체 방법을 사용한 위상 설계 민감도식이 유도되었고, 위상 최적 설계를 수행 할 수 있는 프로그램이 개발되었다. 최적화 알고리즘으로는 DOT의 SLP가 사용되었으며, 해석 기로는 ANSYS 가 사용되었다.

제안된 밀도법과 유도된 민감도식을 사용하여 개발된 프로그램을 검증하기 위해서 주어진 전류 입력에 대해서 최대의 자기력을 낼 수 있는 C-core 액추에이터 코어의 최적화된 위상을 구하는 문제에 적용하여 보았다.

위상 최적설계를 이용한 자석설계의 MEMS분야로의 적용에 대한 가능성을 확인하였다.

## 6. 후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 전남대학교 고품질 전기전자부품 및 시스템 연구센터의 연구비 지원에 의해 연구되었음

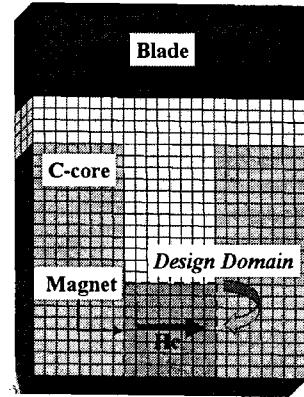
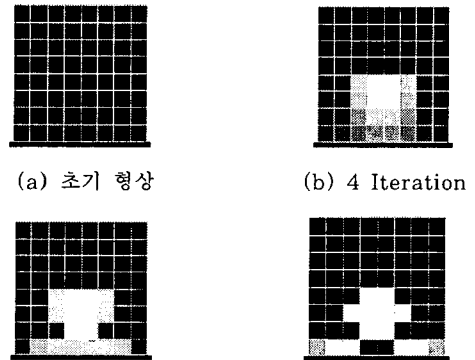


그림 1. C-core 액추에이터



(a) 초기 형상 (b) 4 Iteration (c) 15 Iteration (d) 최종형상(39 Iteration)  
그림 2. C-core액추에이터의 위상최적설계 결과 I

표 1. 비교

	초기모델	최종모델	(%)
에너지 [J/m]	44.857	43.527	2.9%
부피 [%]	100	80	20%

### (참 고 문 헌)

- [1] M.P. Bendsoe, and N. Kikuchi, Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, pp. 197-224, 1988
- [2] D. N. Dyck, and D. A. Lowther, Automated Design of Magnetic Devices by Optimizing Material Distribution, IEEE Transactions on Magnetics, VOL. 32, NO. 3, MAY 1996
- [3] S. Wang and J. Kang, Topology Optimization of Nonlinear magnetostatics, IEEE Transactions on Magnetics, March, 2002 in print for 2002.
- [4] Edward J. Haug, K. K. Choi, Vadim Komkov, Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. ACADEMIC PRESS, INC, 1986