

동적 벌점함수 유전 알고리즘과 다단계 설계방법을 이용한 공작기계 구조물의 설계 최적화

최영휴*(창원대 기계설계공학과), 배병태(창원대 대학원 기계설계공학과),
김태형, 박보선(대우중합기계)

Multi-step design optimization of a high speed machine tool structure
using a genetic algorithm with dynamic penalty

Y. H. Choi(Dept. of Mech. Design & Manufacturing Eng., CNU), B. T. Bae(Grad. Students, CNU),
T. H. Kim, B. S. Park(Daewoo Heavy Industry co. ltd)

ABSTRACT

This paper presents a multi-step structural design optimization method for machine tool structures using a genetic algorithm with dynamic penalty. The first step is a sectional topology optimization, which is to determine the best sectional construction that minimize the structural weight and the compliance responses subjected to some constraints. The second step is a static design optimization, in which the weight and the static compliance response are minimized under some dimensional and safety constraints. The third step is a dynamic design optimization, where the weight, static compliance, and dynamic compliance of the structure are minimized under the same constraints. The proposed design method was examined on the 10-bar truss problem of topology and sizing optimization. And the results showed that our solution is better than or just about the same as the best one of the previous researches. Furthermore, we applied this method to the topology and sizing optimization of a crossbeam slider for a high-speed machining center. The topology optimization result gives the best desirable cross-section shape whose weight was reduced by 38.8% than the original configuration. The subsequent static and dynamic design optimization reduced the weight, static and dynamic compliances by 5.7 %, 2.1% and 19.1% respectively from the topology-optimized model. The examples demonstrated the feasibility of the suggested design optimization method

Key Words : Genetic algorithm(유전 알고리즘), Optimal design(최적설계), Dynamic penalty(동적 벌점함수), Static & dynamic compliances(정·동적 컴플라이언스), Multi-step optimization(다단계 설계방법)

1. 서론

최근 공작기계는 가공시간의 단축과 제품의 품질 향상을 위하여 고속· 고정밀화 되는 추세이다. 고속 고정밀화를 위해서는 대개 구조물의 중량은 줄이고 강성은 높여야하므로, 상충되는 목적을 동시에 달성해야 하는 다목적 최적화가 필요하게 된다.

최근의 공작기계 구조물 최적화 관련 연구를 보면, Yoshimura¹는 공작기계의 중량과 동특성 최적화 문제를 다루었고, Balling²은 해석프로그램과 최적설계 프로그램의 연결방법을 제시하였다. Weck³은 컴퓨터를 이용한 최적화와 강성거동을 연구하였으며, Park⁴은 유전알고리즘을 공작기계 구조물의 토폴로

지 및 치수최적화에 적용하였다. Deb^{5,6}은 입계면적 개념을 사용하여 트러스 구조물의 형상 및 치수최적화를 수행하였으며, Tong⁷은 동적 구속조건이 있는 트러스 구조물의 최적화를 수행하였다.

본 연구에서는 개선된 동적 벌점함수를 도입한 유전 알고리즘을 이용하여, 구조물의 단면형상 토폴로지 최적화와 치수최적화를 순차적으로 진행하는 다단계 최적설계 방법을 제안한다. 본 설계과정에서의 목적함수인 중량과 정적 및 동적 컴플라이언스는 가중치방법을 사용하여 단일 목적함수로 변환하였다. 제안된 방법을 10-bar 트러스 최적설계문제에 적용하여 검증하고, 고속 머시닝센터의 이송체 구조물 최적설계에 적용하여 그 유용성을 확인하였다.

2. 설계문제의 정의

2.1 구조물의 성능평가 함수

2.1.1 동적 컴플라이언스

설계문제의 목적함수를 정의하기에 앞서 먼저 유한요소법으로 모델링된 n 자유도계 구조진동계의 운동방정식은 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$[M]\{\ddot{X}\} + ([K] + j[H])(X) = \{F\} \quad (1)$$

여기서, $[M]$, $[K]$, $[H]$ 는 각각 질량행렬, 강성행렬, 구조감쇠행렬이며, $\{X\}$, $\{F\}$ 는 각각 자유도벡터와 외력벡터이다. k -점에만 조화가진력이 작용하는 경우, j -점에서의 컴플라이언스 또는 리셉턴스 응답함수의 성분, $|R_{jk}(\omega)|$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} |R_{jk}(\omega)| &= \left| \frac{X_j}{F_k}(\omega) \right| \\ &= \left| \frac{\sum_{r=1}^n \frac{r\phi_j r\phi_k}{m_r(\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r^2)}}{\sum_{r=1}^n \frac{r\phi_j r\phi_k}{k_r \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_r} \right)^2 + i\eta_r \right]}} \right| \quad (2) \end{aligned}$$

여기서, ω_r 는 r -번째 고유진동수, $r\phi_j$ 는 r -번째 모달벡터(modal vector)의 j -번째 요소이고, m_r 과 k_r 은 각각 모달질량과 모달강성, 그리고 η_r 은 r -번째 모드의 손실계수이다.

위 식(2)의 $R_{jk}(\omega)$ 을 동적 컴플라이언스라 하며, 강성의 역수에 해당된다. $\omega = \omega_r$ 인 공진영역에서는 다른 주파수 성분의 컴플라이언스는 상대적으로 미미하므로 $R_{jk}(\omega)$ 의 r 차 공진응답 또는 피크응답의 크기는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$R_{peak}(r) = |R_{jk}(\omega_r)| \approx \left| \frac{-i r\phi_j r\phi_k}{k_r \eta_r} \right| \quad (3)$$

2.1.2 정적 컴플라이언스

식(2)에서 $\omega = 0$ 인 경우를 정적 컴플라이언스, R_{jk}^s 라고 하며 다음과 같이 된다.

$$|R_{jk}^s| = \left| \frac{X_j}{F_k}(\omega=0) \right| = \left| \sum_{r=1}^n \frac{r\phi_j r\phi_k}{k_r(1+i\eta_r)} \right| \quad (4)$$

2.1.3 구조물 중량

m 개의 유한요소로 모델링된 구조물의 i -번째 요소가 일정한 단면형상을 가지고, 그 단면적이 A_i , 길이가 L_i , 밀도가 ρ_i 라면 구조물의 총 중량은 다음과 같이 된다.

$$W = \sum_{i=1}^m \rho_i A_i L_i \quad (5)$$

2.2 설계문제 정의

본 연구의 구조설계 최적화 문제는 변위와 안전도 등의 구속조건하에서 중량과 정적 및 동적 컴플라이언스 최소화 문제로서 다음과 같이 정의한다.

$$\text{minimize } f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 w_i \frac{f_i(\mathbf{x})}{f_i^*} \quad (6)$$

$$\text{subject to } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, q \quad (7)$$

여기서, $f_1(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \rho_i A_i(\mathbf{x}) L_i$ 은 구조중량이고, $f_2(\mathbf{x}) = |R_{jk}^s|$ 은 정적 컴플라이언스이며, $f_3(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^n R_{peak}(r)$ 은 동적 피크 컴플라이언스, $f_4(\mathbf{x}) = \text{area under } |R_{jk}(\omega)|$ 는 운전속도 영역에 걸친 동적 컴플라이언스값의 적분이며, 이들 목적함수들은 모두 설계변수, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, \dots, x_m)$ 를 내포한 함수(implicit functions)이다. 그리고 f_i^* 는 각각 i -번째 목적함수에 대한 스케일링 인자이고, w_i 는 $\sum_{i=1}^4 w_i = 1$ 인 가중치이다. $g_i(\mathbf{x})$ 은 i -번째 구속함수이다. $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x_1, \dots, x_m)$ 는 설계변수 벡터이고, x_i 는 i -번째 설계변수로서 구조부재의 두께이다,

2.3 동적 벌점함수

본 연구에서는 기존의 정적 벌점함수와 달리 구속조건 위반 회수와 위반 수준을 모두 고려하는 다음 식과 같은 동적 벌점함수를 도입한다.

$$p(x) = \varepsilon \cdot [c_1 \times p_1(x) + c_2 \times p_2(x)] \quad (8)$$

$$\text{위에서, } p_1(x) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{g_i(x)}{g_i^*} \right)^2$$

$$p_2(x) = \delta \frac{1}{\phi^*} \sum_{i=1}^n \phi_i(x)$$

위의 식 (8)에서 $\phi_i(x)$ 는 i -번째 구속조건에 대한 벌점이다. 즉, 구속함수가 구속조건을 초과하는 개

수를 나타내는 값이고, $g_i(x)$ 는 구속조건이 기준을 초과하는 정도를 나타내는 양이며, ε 은 최대화와 최소화를 구분하는 1과 -1을 나타내는 지시 값이다. 그리고 c_1 과 c_2 는 벌점함수의 우변에서 1항과 2항의 비중을 나타내는 가중치 값이며, g^* 와 ϕ^* 는 각 항목들의 전체 벌점함수에 대한 민감도를 조정하기 위한 스케일인자이다.

3. 다단계 최적설계 과정

3.1 토폴로지 최적화 단계(Step 1)

토폴로지 최적화는 주어진 영역 혹은 공간 내에 물질을 분포시켜 요구되는 강도를 유지하는 최적의 구조형상을 설계하는 방법이다. 식(6)의 목적함수에서 가중치를 적절히 조정함으로써, 중량만을 목적함수로 선택할 수도 있고, 중량과 정적 컴플라이언스만을 목적함수에 포함시킬 수도 있다.

3.2 정적최적화 단계(Step 2)

정적최적화 단계에서는 중량과 정적 컴플라이언스를 최소화한다. 즉 이 단계는 정하중 조건이 동하중 조건과 달라지는 상황을 고려하여 통상 정적설계를 만족시키는 설계를 동적설계에 선행하기 위한 목적이다. 그러므로 식(6)의 목적함수에서 동적 컴플라이언스 항목에 대한 가중치를 영으로 설정한다. 정적최적화 단계에서는 동적최적화를 위해서 중량 구속조건과 컴플라이언스 구속조건을 동시에 만족하는 "해가 존재할 수 있는 집단(feasible set)"을 생성한다.

3.3 동적최적화 단계(Step 3)

동적최적화 단계에서는 구조중량과 함께 동적 컴플라이언스를 최소화한다. 동적최적화 단계에서는 정적최적화 단계에서 생성된 "해가 존재할 수 있는 집단에 대해 "좋은 해 집단(good solution set)"라는 적합도가 높은 상위개체를 선별한 다음 그 개체집단에 대해서 최적해를 탐색한다.

4. 설계방법의 검증

4.1 단일 치수최적화 검증

구조 부재의 단면 치수만을 최적화하는 문제에 대한 검증을 위하여 Fig. 1에 나타난 10요소 트러스 구조물의 치수최적화 문제를 선택하고, Deb의 논문⁵에 정리된 종래의 설계방법들의 결과와 본 연구에서 제시한 설계방법에 의한 최적설계 결과를 비교한다.

설계문제에서 변위는 각 방향으로 최대 2 in로 제한되며, 목적함수는 중량과 2번 절점에서 y방향 정적 컴플라이언스를 함께 설정하고, 식(6)을 이용하여 단일 목적함수로 변환하기 위하여, 중량에 대한 가중치를 0.99999로, 정적 컴플라이언스에 대한 가중치를 0.00001로 하였다. 그리고 유전자 설계변수로 개체수와 세대수는 80과 150, 교차확률은 0.8, 돌연

변이 확률은 0.02로 정하였다.

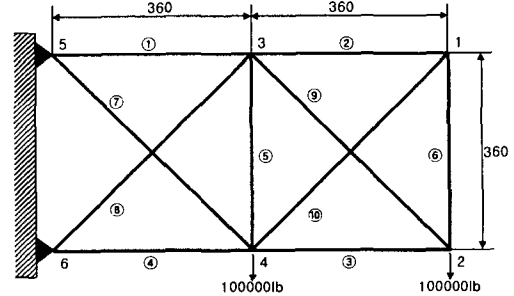


Fig. 1 The 10-bar, 6-node planar truss structure

정적 치수최적화 결과, 변위나 응력 구속조건을 만족하는 최적해를 얻었으며, 그 결과를 Table 1에 비교하여 나타내었다. 결과를 보면 설계변수는 서로 간에 다소 차이가 있으나, 목적함수인 구조물 중량은 지금까지 알려진 가장 좋은 최적해인 Belegundu의 OPTDYN¹⁰의 결과보다 약 1.8% 감소하였다.

Table 1 Comparison of 10-bar truss optimization results

Design Variables	Best solution found		
	This paper	Belegundu ^{1,2)}	
		CONMIN	OPTDYN
x1	30.9537	25.2824	25.7740
x2	1.1294	1.89736	0.1000
x3	22.8726	24.8677	25.1138
x4	16.5550	15.8272	19.3880
x5	1.1008	0.1000	0.1000
x6	1.0248	1.7464	0.1000
x7	8.1894	16.7571	15.3591
x8	22.5968	19.7282	20.3224
x9	21.5689	20.9786	20.7437
x10	1.0419	2.5100	1.14018
weight, $f(x)$	5369.4400	5563.3200	5471.2480

4.2 다단계 최적설계방법 검증

4.2.1 토폴로지 최적화(STEP 1)

Fig. 1과 같은 트러스 구조물의 형상 토폴로지 최적화 문제를 위한 설계변수는 각 요소의 단면적을 설정하였다. 설계변수는 부재의 존재 유무를 판정하기 위하여 따라 0.09(absence)와 22.90(presence)의 두 가지 값 중에서 어느 한 값만 가질 수 있도록 하였다. 이러한 설계변수 값의 부여 방법은 park⁴의 토폴로지 설계방법에서와 동일하나, 본 연구에서는 동적 벌점함수를 적용하였다. 목적함수로는 중량만 설정하였고, 구속조건으로 정적 컴플라이언스가 $1E-5$, in/lb 이하가 되도록 설정하였다. 본 연구에서의 설계방법을 사용한 최적형상 설계결과를 Fig. 2에 나타내었다. 이는 임계면적(critical area) 개념을 사용하여,

부재의 단면적이 임계면적 보다 작은 값이 나오면 부재가 존재하지 않는 것으로 간주하는 Deb⁶의 최적화 결과와 동일하다.

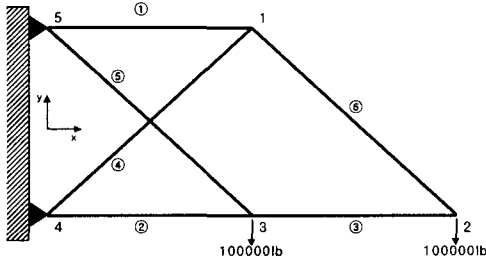


Fig. 2 Optimum truss shape after topology optimization

4.2.2 정적 치수최적화(STEP 2)

정적 치수최적화 검증문제는 Fig. 2의 형상최적화를 끝낸 6요소 트러스 구조물의 부재별 단면치수를 최적화하는 것이다. 목적함수와 구속조건은 4.1절의 단일 치수최적화 문제의 경우와 같다. 설계변수인 구조부재의 단면적은 1 in²에서 30 in²까지 1 in²씩 단계적으로 변화하는 이산치 변수(discrete value)이다. 유전자 설계변수로 개체수와 세대수는 80과 150, 교차확률은 0.8, 돌연변이 확률은 0.02로 설정하였다. 최적화 결과를 Table 2에 나타내었는데, Deb⁷에 비하여 설계변수인 부재별 두께의 차이는 약간 있었지만 중량은 일치하는 값을 보였다.

Table 2 Optimized design variables and weight

Element no.	This Paper (unit: in ²)	Hajela ¹⁰ (unit: in ²)	Deb ⁶ (unit: in ²)
1	30	28	30
2	24	24	24
3	16	16	16
4	6	6	6
5	21	21	20
6	20	22	21
Weight(lb)	4912.85	4942.70	4912.85

4.2.3 동적 치수최적화(STEP 3)

동적최적화는 Fig. 2의 트러스구조의 2번 절점에 y방향으로 3500 cos(ωt), lb의 하중을 가하여 구속조건을 만족하는 범위 내에서 목적함수를 최적화한다.

Table 3 Comparison of dynamic design optimization

	Design variables[in ²]						Object functions	
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	weight[lb]	dynamic compliance
This paper	33	24	15	6	20	20	4933.9	5.38E-4
Deb ⁶	30	24	16	6	20	21	4912.3	(6.66E-4)

註) ()는 Deb⁶의 최적설계변수를 근거로 계산한 값

동적최적설계를 위한 목적함수는 중량과 식(6)에 설명한 3 가지의 동적컴플라이언스로 가중치를 주어 단일 목적함수로 변환하였고, 만족수준은 각 절점에서의 컴플라이언스와 중량이 각각 1E-5 in/lb, 6000 lb이하가 되도록 설정하였다. 최적설계 결과는 Table 3에 나타내었다. Table 3의 결과를 보면 Deb⁶에 비하여 중량이 0.4% 증가한데 비하여 동적 컴플라이언스는 19.2% 감소하였다. 이는 동적하중이 작용할 때, 컴플라이언스가 5.50E-4 in/lb을 넘지 않도록 동적설계를 최적화 한다면 Deb⁶의 설계보다 본 논문의 동적최적화 설계가 더 유용하다는 의미가 된다.

5. 이송체 구조 최적설계에의 적용

5.1 토폴로지 최적설계(STEP 1)

고속 머시닝센터의 이송체의 원시설계는 Fig. 3과 같이 평판 상자형 구조물이다. 재료의 밀도는 7.6e-9 N/mm³, 탄성계수는 200E-3 N/mm²이다. 구조해석시의 구속조건과 하중 조건은 그림과 같다.

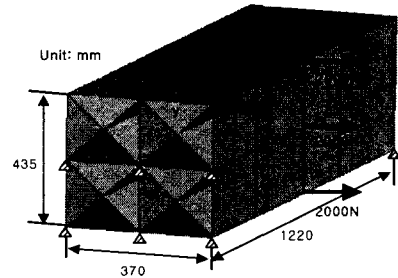


Fig. 3 Original design of crossbeam structure

설계변수인 평판 부재의 두께는 이산치 20 mm와 0.02 mm로 설정하여 사용하였다. 단, 분포하중이 적용되는 앞판과 구속되어 있는 밀판은 설계변수에서 제외하였다. 설계문제를 정식화하면 식(6)과 같고, 구속조건과 설계변수는 각각 식(9), (10)과 같다.

$$\text{subject to } g_1: |R_{jk}^i| \leq 4.50E-4, \mu m/N \quad (9)$$

$$x_i = \{0.002, 20\}^T, \text{ mm}, \quad i=1,2,\dots,24 \quad (10)$$

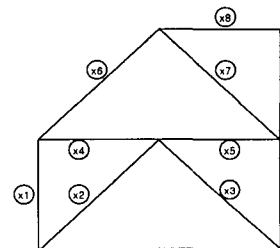


Fig. 4 Optimum topology of the crossbeam

유전자 설계변수의 개체수는 수렴조건을 고려하여 80으로 설정하였고, 세대수는 150세대로 하였으며, 교차와 돌연변위 확률은 0.8과 0.02로 하였다.

최적설계된 토폴로지 형상은 Fig. 4와 같다.

5.2 정적 최적설계(STEP 2)

정적 최적설계단계는 1단계의 토폴로지 최적화 모델에 정적 최적화단계를 수행하는 것이다. 설계변수는 Fig. 4에 나타난 8개 부재의 두께이다,

정적 최적화 문제는 중량과 하중 작용점에서의 정적 컴플라이언스를 목적함수로 설정하고, 구속조건으로는 중량과 정적 컴플라이언스로 정의하였다.

정적최적화 문제의 정식화는 식(6)과 같은데 가중치는 $w_1 = w_2 = 0$ 이고, 구속조건은 식(11-1, 2)와 같으며, 설계변수는 식(12)과 같이 설정된다.

$$\text{subject to } g1 : f_1 = W \leq 600 \text{ kg} \quad (11-1)$$

$$g2 : |R_{jk}^s| \leq 4.20E-4 \text{ } \mu\text{m/N} \quad (11-2)$$

$$x_i = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 38, 40, 45\}^T \text{ mm} \\ , i = 1 \sim 8 \quad (12)$$

유전자 설계변수 개체수와 세대수는 수렴조건을 고려하여 80과 140으로 설정하였다. 교차 및 돌연변이 확률은 0.8과 0.01로 하였으며, 2점 교차연산자를 사용하였다. Fig. 5에는 동적최적화를 위해 생성한 “해가 존재할 수 있는 집단”(feasible set)을 나타내었다.

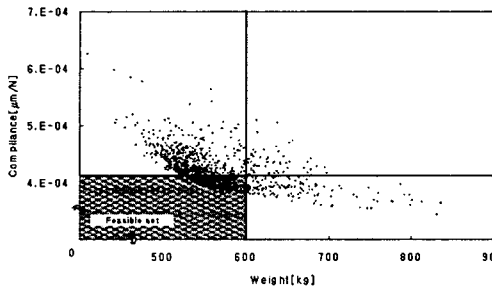


Fig. 5 Representation of the feasible set

5.3 동적 최적설계(STEP 3)

Fig. 6에 나타난 동적 최적화 모델은 동하중 조건을 제외하면 정적 최적화 모델과 동일하다.

Fig. 6에서 크로스 빔의 상단의 중앙에 각 축 방향별로 $F_x = 1000 \cos(\omega t)$, $F_y = 1000 \cos(\omega t)$, $F_z = 1000 \cos(\omega t)$ 의 하중을 적용하였으며, 그 지점에서 각각의 축 방향 응답을 계산하였다.

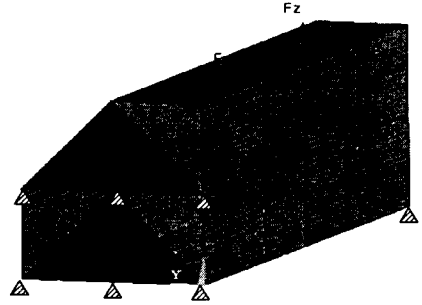


Fig. 6 The dynamic optimization model

목적함수는 식(6)과 같다. 여기서 컴플라이언스는 iso-axial 방향의 컴플라이언스 값을 사용한다. 설계변수는 식(12)과 같은 이산치를 가지며, 구속조건은 식(11)과 같은데 $g1$ 만 다음과 같이 조정된다.

$$g1 : f_1(x) \leq 580 \text{ kg} \quad (11-3)$$

5.4 결과 검토

각각의 설계단계 후의 설계변수와 목적함수인 중량을 원시모델과 비교하여 Table 4에 나타내었다.

Table 4 Comparison of design variables & total weight after each design step completed

Variables (mm)	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	Weight (kg)
After step 1	20	20	20	20	20	20	20	20	594.2
After step 2	13	8	9	9	23	28	20	35	551.3
After step 3	13	8	9	30	22	28	20	20	559.9
Original structure	number of components = 24								971.0

제1단계의 형상 최적설계 후와 마지막 제3단계 동적 최적설계 후의 절대 컴플라이언스를 Table 5에 나타내었다.

Table 5 The results of calculated the absolute static- & dynamic-compliances

Compliance step	Static Compliance($\mu\text{m/N}$)	Dynamic Compliance($\mu\text{m/N}$)
	iso-axial	iso-axial
After step 1	0.00138	0.01673
After step 3	0.00135	0.01354

제3단계 동적 최적설계 후의 정적 및 동적 절대 컴플라이언스는 제1단계 토폴로지 최적설계 모델에 비하여 각각 2.2%와 19.2% 씩 감소하였다.

제 3단계 최적설계(Step 3) 후의 주파수 응답함수와 제1단계 토폴로지 최적화후의 모델에 대한 주파수 응답함수를 Fig. 7에 비교하여 나타내었다.

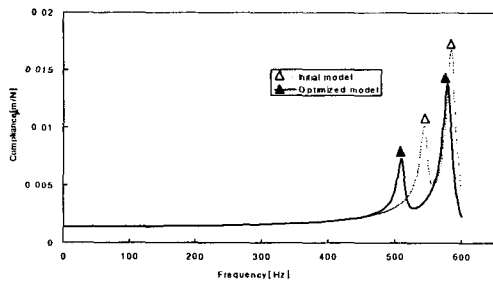


Fig. 7 Comparison of Dynamic compliances

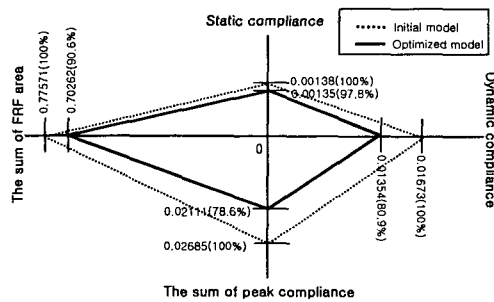


Fig. 8 Comparison of objectives before and after optimization

Fig. 8은 동적설계 최적화 후에 각각의 목적 함수들이 초기 모델에 비하여 얼마나 변화되었는지를 방사형 그래프로 나타낸 것이다.

6. 결론

본 연구에서는 개선된 동적 별점함수를 갖는 유전 알고리즘을 이용한 다단계 설계방법을 제안하였다. 설계방법은 단면 형상 토폴로지 최적설계 단계, 정적 치수설계 최적화 단계, 동적 치수설계 최적화 단계로 이루어진다. 제안된 설계방법을 10 요소 트러스의 토폴로지 및 치수 최적설계 문제를 통하여 검증하고, 고속 이송체 구조물의 최적설계에 적용하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 제안된 방법에 의한 10 요소 트러스 토폴로지 및 치수 최적설계 결과는 기존에 알려진 가장 좋은 최적설계 해보다 더 낮거나 동일한 결과를 보였다.

2) 이송체 구조물의 토폴로지 최적설계(step 1) 결과 구조중량은 원시모델보다 38.8% 감소하였다.

3) 이송체의 동적설계 최적화(step 3) 결과 step 1 설계단계 후의 모델에 비하여 iso-axial 방향의 정적 컴플라이언스가 2.1% 감소하고, 동적 컴플라이언스는 19.1% 감소하였으며, 중량은 5.7% 감소하였다.

이러한 결과로부터 본 논문에서 제안된 동적 별점함수를 갖는 유전 알고리즘을 이용한 다단계 설계방법의 유용성을 확인하였다.

후기

본 연구는 산업자원부의 중기거점기술개발사업의 일환으로 대우종합기계(주)의 연구비 지원으로 수행된 연구결과의 일부입니다.

참고문헌

1. M. Yoshimura, "Design Optimization of Machine Tool Dynamics Based on an Explanation of Relationships between Characteristics," JSPE, Vol.53, No. 4, pp601~606, 1987.
2. R. J. Balling, A. R. Parkison and J. C. Free, "Methods for interfacing analysis software to optimization software," Computer and Structure, Vol. 22, No. 1, pp 87-98, 1986
3. M. Weck, "Computer-Aided Optimization and Metrological Recording of the Stiffness Behavior of Machine Tools," Proc. of 5th IMEC, pp.1~14, 1992.
4. J. K. Park, "A Study on the Optimal sizing and Topology Design of Machine-tool Structures Using a Genetic Algorithm," 창원대학교 대학원 공학박사 학위논문, 1996.12.
5. K. Deb and R. B. Agrawal, "Simulated binary crossover for continuous search space," Complex Systems 9 (1995) 115-148.
6. K. Deb and S. Gulati, "Design of truss-structure for minimum weight using genetic algorithm," Finite elements in analysis and design, 2001
7. W. H. Tong and G. R. WH, "An optimization procedure for truss structures with discrete design variables and dynamic constraints," computer & structure, 155-162, 2000
8. F. Y. Cheng, DAN Li, "Multi-objective Optimization Design with Pareto Genetic Algorithm," J. of Structural Eng. Vol.123, No. 9, pp.1252~1261, 1997.
9. 류연선, 임오강, 박경진, "최적설계입문," 반도출판사, 1994.
10. P. Hajela and C. J. Shin, "Multi-object optimum design in mixed integer and discrete design variable problems," AIAA J., 28(4), 670-675. 1990.
11. David E. Goldberg. "Genetic Algorithm in Search, Optimization, and Machine Learning," Addison-Wesley, 1989.
12. K. Deb and M. Goyal, "A combined genetic adaptive search for engineering design," Computer Science and Informations 26, 3a-45, 1996.