

**외란이 있는 시스템의 출력미분치 추정
(Estimation of Output Derivative of The System with Disturbance)**

김유승(숭실대학교 대학원), 양호석(숭실대학교 대학원), 이진복(숭실대학교)

Yu Seung Kim(Graduate School, Soongsil Univ), Ho Seog Yang(Graduate School, Soongsil Univ), Gun Bok Lee(Soongsil University)

abstract - This work is concerned with the estimation of output derivatives and their use for the design of robust controller for linear systems with systems uncertainties due to modeling errors and disturbance. It is assumed that a nominal transfer function model and quantitative bounds for system uncertainties are known. The developed control schemes are shown to achieve regulation of the system output and ensures boundedness of the system states without imposing any structural conditions on system uncertainties and disturbances. Output derivative estimation is first conducted through restructuring of the plant in a specific parameterization. They are utilized for constructing robust nonlinear high-gain feedback controller of a SMC(Sliding Mode Controller)Type. The performances of the developed controller are evaluated and shown to be effective and useful through simulation study.

1. 서 론

현대 제어이론을 적용한 고정밀 제어를 통하여 자기 부상 열차, 자기 베어링, 자기 헤드등 자기 부상 시스템의 고기능화를 추구하기 위해 많은 연구가 진행되어 왔다. 이러한 연구들은 시스템 모델링과 제어방식에 의해 다음의 유형으로 대별할 수 있다. 즉 선형모델을 토대로 한 선형제어 방식을 사용한 경우와 비선형 모델에 의한 비선형 제어방식을 채택한 경우이다. 다시 선형 제어 방식은 전상태의 측정을 통한 상태 피드백 제어와 관측기에 의한 상태 추정을 통한 피드백 제어 그리고 주파수 영역에서 외란과 시스템 모델링 오차를 반영한 주파수 형성에 의한 최적제어등으로 분류할 수 있으며 비선형 제어방식도 전상태의 측정을 전제로 한 상태 피드백 제어와 관측기를 사용하는 경우로 나눌 수 있으며 제어기의 구조에 따라 슬라이딩 모드형 제어(Sliding Mode Control, SMC)와 궁극유계 제어(Ultimate Boundedness Control, UBC)의 두 유형으로 구분할 수 있다.

본 연구에서는 또 다른 제어방식으로서 깎셈서로부터 측정된 변위출력으로부터 시스템의 불확실성과 외란을

추정하고 이들 추정치를 토대로 출력의 미분값을 추정하며 추정된 출력의 미분값을 이용하여 시스템의 피드백 제어의 가능성 유무를 검토하고 외란에 대해서도 추정기가 강인한 성능을 보이며 실제값을 잘 추정하는지의 여부를 가늠하고자 한다.

여러 제어방식의 특징을 살펴보면 모든방식이 독특한 특징과 제한조건을 가지고 있다. 전상태를 측정하는 경우에는 충분한 상태정보로부터 성능의 극대화를 기할 수 있으나 많은 경우 전상태의 측정이 불가능하며 관측기를 사용하는 경우는 시스템의 불확실성과 외란에 기인한 관측오차와 전체 제어시스템의 차수의 증가에 의한 복잡성과 불안정성의 증가의 문제가 있다. 외란과 모델링 오차를 직접 고려하는 H 최적제어도 여러 가지 기준에서 가장 우수한 방법으로 평가되고 있으나 시스템 모델링에 수반하는 불확실성 자체에 의한 성능저하는 극복할 수 없다. 여기서 제안하는 출력피드백 방식은 출력과 그 미분값의 추정치에 이미 시스템 불확실성의 영향이 반영되어 있기 때문에 불확실성에 기인한 성능저하를 방지할 수 있으며 비선형 제어법칙이 일반적으로 요구하는 정합조건의 만족여부에도 구애받지 않는다. 그러나 출력만을 제어하기 때문에 최소위상시스템에만 적용할 수 있다는

제한을 갖는다. 따라서 출력만의 측정에 의한 신호처리와 제어시스템의 단순화를 기할 수 있기 때문에 자기 부상시스템을 비롯한 보다 광범위한 시스템의 제어에 적용할 수 있다.

출력 미분치를 이용할 경우 시스템의 전상태를 측정하지 않고도 시스템의 전상태 정보를 얻어 낼 수 있으며 이를 이용하여 제어를 설계할 경우 보다 효율적이고 시스템의 복잡성을 회피하며 보다 안정한 제어를 설계할 수 있다.

이 논문에서는 출력미분치의 추정값이 실제값을 어느 정도 추종하는지의 여부와 함께 시스템에 다양한 형태의 외란이 작용하여도 제한한 추정기의 성능이 실제값을 잘 추종함을 보일 것이다.

2. 시스템 모델링

그림1에 모델링 대상으로 간주한 자기부상시스템의 개략도가 나타나 있으며 그림 2는 수학적 지배방정식을 세우기 위한 단순화된 모델을 나타낸다.

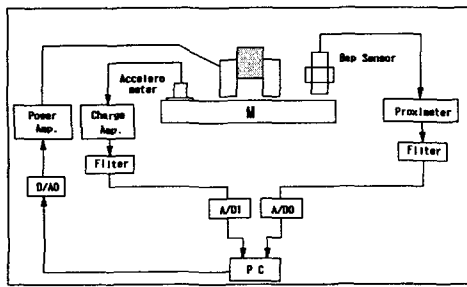


Fig. 1 Schematic Diagram of Experimental Setup

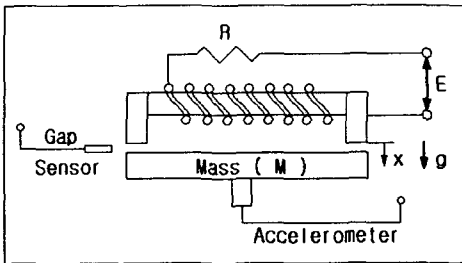


Fig. 2 Electromagnetic Suspension System

시스템의 지배 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= g - \frac{k_1 * x_3^2}{M * (2x_1 + k_2)^2} + \frac{f(t)}{M} \end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = \frac{2x_1 + k_2}{k_1} (E - R x_3) + \frac{2x_2 x_3}{2x_1 + k_2}$$

여기서

$$k_1 = \mu_0 N^2 A$$

$$k_2 = \frac{L_c}{\mu_c} + \frac{L_m}{\mu_m}$$

x_1 ; 간극

x_2 ; 부상체 속도

x_3 ; 전류

$f(t)$; 시스템 외란(부양체의 안내면사이의 마찰력)

식(1)의 비선형 방정식을 임의의 작동점에서 선형화하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Fx + Gu + Hd \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2)$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{Agk}{E_0} \sqrt{\frac{Mg}{k_1}} & 0 & \frac{-2gR}{E_0} \\ 0 & 2\sqrt{\frac{Mg}{k_1}} & -\frac{E_0}{k_1} \sqrt{\frac{k_1}{Mg}} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{E_0}{k_1 R} \sqrt{\frac{k_1}{Mg}} \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

식(2)를 라플라스 변환하여 다음식과 같은 항으로 변환하고

$$y = C(sI - F)^{-1}(Gu + Hd) \quad (3)$$

위의 관계로부터 다음의 입-출력 전달함수 형태로 변환한다.

$$\tilde{A}(s)y = \tilde{B}(s)u + \tilde{D}(s)d \quad (4)$$

여기서

$$\tilde{A}(s) = \det(sI - F)$$

$$\tilde{B}(s) = C \text{Adj}(sI - F)G$$

$$\tilde{D}(s) = C \text{Adj}(sI - F)H$$

다항식은 식(3)의 시스템 행렬 F, G, H의 각 요소로부터 구할 수 있다. 시스템 외란 $d(t)$ 의 상한치는 다음과 같이 아는 것으로 가정한다.

$$|\Delta d_i| \leq \delta d_i, \quad i = 0, 1, 2 \quad (6)$$

3. 출력 미분값의 추정

2.1 시스템 파라미터

시스템은 다음 방정식에 의해 표현되어 지는 것으로 간주한다.

$$A(s) y_p = B(s)u + d \quad (1)$$

여기서 u 는 제어입력이며, y_p 는 플랜트 출력이고 d 는 한정된 외부 외란이다.

$$|d(t)| \leq D \quad (2)$$

$A(s)$ 와 $B(s)$ 는 아래와 같이 표현되는 시스템 공칭모델이다.

$$A(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0$$

$$B(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0$$

출력 미분치 추정기를 설계하기 전에 먼저 시스템 구조의 재구성과 새로운 신호를 생성시키는 것이 필요하며 그 신호는 아래에 소개하는 바와 같다.

새로운 신호 w_1, w_2 and w_3 를 정의한다. 먼저 w_1, w_2 는 상태공간 표현으로부터 구해진다. 그리고 다음과 같은 시스템 고유행렬과 b_λ 을 선택한다.

$$\Lambda \in R^{(n-1) \times (n-1)} \quad \text{and} \quad b_\lambda \in R^{n-1}$$

$$\det(sI - \Lambda) = \lambda(s)$$

그리고 (Λ, b_λ) 는 가제어 행렬형태이다.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda_0 & \cdot & \cdot & \dots & -\lambda_{n-2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$b_\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = y_p$$

$$\dot{w}_2 = \Lambda w_2 + b_\lambda y_p$$

$$\dot{w}_3 = \Lambda w_3 + b_\lambda u$$

상태 w_2, w_3 와 이들의 초기조건은 임의로 줄수 있다.

그리고 필터 신호는 다음과 같이 표현된다.

$$(sI - A)^{-1} b_\lambda = \frac{1}{\lambda(s)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ \vdots \\ s^{n-2} \end{bmatrix} \quad (8)$$

수치적인 조건으로 $\lambda(s)$ 는 Hurwitz polynomial이다.

$$\dot{y}_p = (s\lambda(s) - A(s)) y_\lambda + B(s) u_\lambda + \eta_\lambda + d_\lambda \quad (10)$$

여기서 하첨자 λ 는 $\lambda(s)$ 에 의해 여과된 '여과신호(filtered signal)'이다. 식(10)의 오른쪽 항들을 애초 정의했던 신호들로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{y}_p &= \theta_1 w_1 + \theta_2 w_2 + \theta_3 w_3 + d_1 \\ &= \sum_{i=1}^3 \theta_i w_i + d_1 \end{aligned} \quad (11-a)$$

여기서

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \lambda_{n-2} - a_{n-1} \\ \theta_2 &= [-a_0 + \lambda_0(a_{n-1} - \lambda_{n-2}), \\ &\quad \lambda_0 - a_1 + \lambda_1(a_{n-1} - \lambda_{n-2}), \\ &\quad \lambda_{n-3} - a_{n-2} + \lambda_{n-2}(a_{n-1} - \lambda_{n-2})] \in R^{n-1} \\ \theta_3 &= [b_0, b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0] \in R^{n-1} \\ d_1 &= d_\lambda \end{aligned} \quad (11-b)$$

식 (2),(3)과 $\lambda(s)$ 과 d_1 은 주지하다 시피 다음과 같이 유계이다.

$$|d_1(t)| \leq \bar{d}_1 \equiv \bar{d}_\lambda$$

계속해서 우리는 다음과 같은 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} y_p^{(i)} &= \theta_1 y_p^{(i-1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \theta_2 \Lambda^{j-1} b_\lambda y_p^{(i-j-1)} \\ &\quad + \theta_2 \Lambda^{i-1} w_1 + \theta_3 \Lambda^{i-1} w_2 + d_i \end{aligned} \quad (12-a)$$

$$i = 1, 2, \dots, r-1$$

여기서 r 은 상관도 $n-m$ 이고,

$$d_i = d_\lambda^{i-1} \quad (12-b)$$

$d_i = d_\lambda^{i-1}$ 는 다음과 같이 유계이다.

$$|d_i| \leq \bar{d}_i \equiv \bar{d}_\lambda^{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, r-1 \quad (12-c)$$

출력 미분치 $y_p^{(i)}$ 를 추정하기 위한 추정기를 개발하기 위해 방정식 (12-a)에서 시스템에 작용하는 외부 외란항 d_i 를 추정해야 한다. $y_p^{(i)}$ 를 추정하기 위해 여기서 다음과 같은 외란 추정기, β_i 를 제안한다.

$$\dot{q}_i = \theta_1 y_p^{(i-1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \theta_2 \Lambda^{i-1} b_\lambda y_p^{(i-j-1)} + \theta_2 \Lambda^{(i-1)} w_2 + \theta_3 \Lambda^{(i-1)} w_3 + \beta_i \quad (13-a)$$

$$e_i = y_p^{(i-1)} - q_i \quad (13-b)$$

$$\beta_i = \gamma e_i + M_i(w_i)h(e_i) \quad (13-c)$$

$$M_i(w) > \bar{d}_i \quad (13-d)$$

여기서 \dot{q}_i 는 $y_p^{(i)}$ 의 추정기이고, e_i 는 추정에러, β_i 는 d_i 의 추정기이고 γ 는 임의로 준 양의상수이다. \bar{d}_i 는 식 (12-b)에 의해 정의되었다.

$h(e_i)$ 는 그 값이 -1과 1사이에서 증감하며 $h(-e_i) = h(e_i)$ 의 성질을 갖는 함수이다.

정리1) 식(1)과 같은 시스템에서 식(13) 처럼 주어진 출력미분치 추정기를 고려하자. 만약 시스템의 입력 u 가 regularity condition을 만나면, 주어진 $\epsilon_i > 0$ 일 때, 유한한 시간 T_i 에 충분한 크기의 M_i 가 존재한다. 즉,

$$|e_i| = |\dot{q}_i - y_p^{(i)}| < \epsilon_i, i=1, \dots, r-1 \quad \text{after } t \geq T_i$$

2. 2 출력 미분치 추정기의 구현

식(13)과 같은 추정기 장치에서 추정에러 e_i 는 $i=1$ 인 경우를 제외하고는 유용하지 못하다.

반면 $y_p^{(i-1)}$ 을 추정하기 위해서는 선행 추정치로부터 얻어져야 한다. 그러므로 우리는 새로운 추정에러를 정의하여 식 (13)에 대입한다.

$$\dot{q}_i = \theta_1 \dot{q}_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \theta_2 \Lambda^{i-1} b_\lambda \dot{q}_{i-j-1} + \theta_2 \Lambda^{(i-1)} w_2 + \theta_3 \Lambda^{(i-1)} w_3 + \beta_i \quad (14-a)$$

$$\hat{e}_i = e_i = y_p - q_1 \quad (14-b)$$

$$\hat{e}_i = \dot{q}_{i-1} - q_i \quad (14-c)$$

4. 시뮬레이션

제한된 출력미분치 추정기의 성능을 상관도 2,3으로 시뮬레이션 하였다. 여기서 상관도는 전달함수의 분모와 분

자의 차수의 차이이다.

System 1 ($r=2$):

$$A(s) = s^3 + s^2 + 13s + 10, \quad B(s) = s + 2$$

$$u(t) = 3\cos 0.5t$$

상관도 2인 경우로 시뮬레이션 하기 위하여 식(14)에서 주어진 바와 같이 추정기를 사용하고 위에 주어진 바와 같은 시스템과 불확실성을 포함한 시스템을 사용한다. 그리고 추정기의 파라미터는 아래와 같다.

$$M_1(w) = 8|y| + 11|w_1| + 14|w_1^2| + |w_2| + |w_2^2| + 8$$

$$e_1 = y - q_1$$

$$h(e_1) = \frac{e_1}{|e_1| + \delta_1}$$

$$\beta_1 = \gamma e_1 + M_1(w)h(e_1)$$

또한 여기서 외란은 유계이며 외란의 형태는 다음과 같다.

$$d(t) = \frac{f(t)}{M} = \frac{1}{M}[\mu \text{sgn}(x_2) + X \sin \omega t]$$

w 는 제어 능력보다 다소 느리게 하여 2 Hz 정도까지를 그 상한으로 설정한다.

시스템에 작용하는 마찰력은 그 최대값이 Mg 으로 이 값이 상한이다. 이와같이 마찰력이 작용하는 것으로 간주하고 Disturbance에 기인한 Uncertainty bound를 산정한다.

그림1과 그림2에서 이 논문에서 고려하는 시스템의 시뮬레이션 응답을 보였다. 그림1은 아주 짧은 시간동안 출력미분치 \dot{y}_p 의 정확한 값이 얻어짐을 나타낸다.

그림2에서는 불확실성항에 대한 추정기 β_1 의 응답케적을 보이고 있다. 이 추정기의 응답케적이 주지하다시피 시스템 불확실성항 d_1 을 잘 추정하고 있음을 알 수 있다.

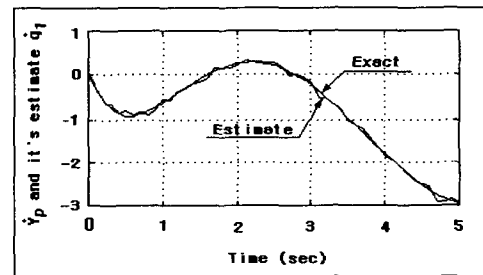


Fig. 1 Estimation of output derivative (Relative degree = 2)

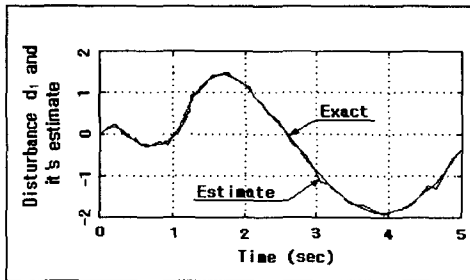


Fig. 2 Disturbance and it's estimation
(Relative degree = 2)

System 2 (r=3):

$$A(s) = s^3 + s^2 + 13s + 10, \quad B(s) = 1$$

$$u(t) = 3\cos 0.5t$$

상관도 3인 경우 \dot{y}_p and \ddot{y}_p 을 추정하기 위한 추정기의 파라미터는 아래와 같다.

$$M_1(w) = 8|y| + 11|w_1^1| + 14|w_1^2| + 10|w_2^1| + 8$$

$$M_2(w) = 8|\dot{q}_1| + 28|w_1^1| + 31|w_1^2| + 14|y_p| + 10|w_2^1| + |w_2^2| + 8$$

$$\hat{e}_2 = \dot{q}_1 - q_2$$

$$h(\hat{e}_2) = \frac{\hat{e}_2}{|\hat{e}_2| + \delta_2}$$

그림3과 그림4는 \dot{y}_p 와 \ddot{y}_p 의 정확한 추정치가 몇초안에 얻어짐을 보이고 있다. 그림5와 그림6은 출력 미분치의 추정결과를 통해 얻은 불확실성함의 결과이다.

\dot{y}_p 의 경우 초기 오차값이 크지만 실제값을 추종하여 수렴해 가는 경향을 보이고 있다. 또한 외란에 대해서도 제한한 추정기를 통하여 출력의 미분치를 추종하는 것을 보이고 있으므로 외란이 있는 시스템에 이 추정기를 설계하여 시스템의 전상태 정보를 취득할 수 있음을 알 수 있다.

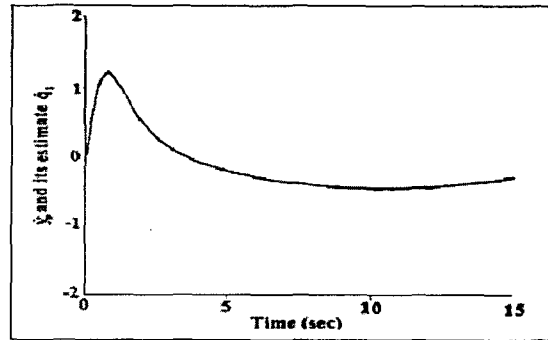


Fig. 3 Estimation of output derivative
(Relative degree = 3)

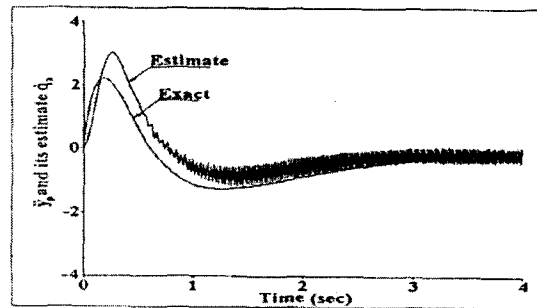


Fig. 4 Estimation of output derivative
(Relative degree = 3)

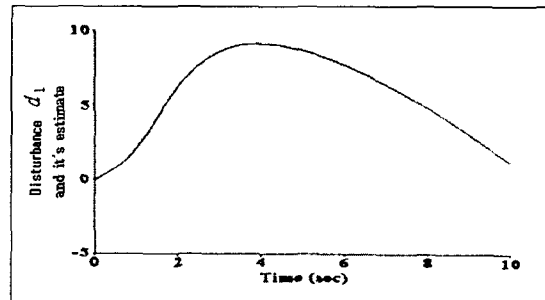


Fig. 5 Disturbance and it's estimation
(Relative degree = 3)

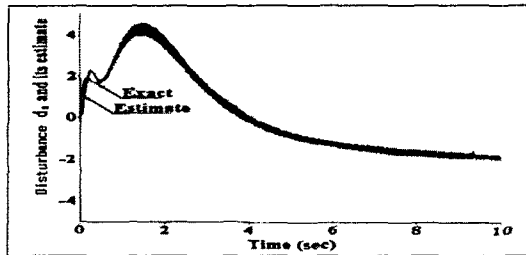


Fig. 6 Uncertainty terms and it's estimation

(Relative degree = 3)

시뮬레이션 결과를 통해 제안한 미분치 추정기가 매우 효과적이고 제어목적에 사용되는데 훌륭한 가능성을 갖고 있음을 보였다.

4. 결론 및 향후 연구방향

이 논문에서는 출력미분값의 추정을 위하여 제안한 추정기를 통해 그 추정치가 실제값을 잘 추종함을 시뮬레이션으로 보였다. 상관도가 높을 경우 이차 미분치 추정시 초기 상태에 오차가 발생하나 전체적 경향을 잘 추종함을 알 수 있다. 또한 외란이 작용하는 피드백 루프가 형성되어도 추정치가 실제값을 잘 추종하고 있음을 알 수 있다.

이 미분치를 이용하여 시스템의 전상태 정보를 취득할 수 있으며 이를 통해 성능의 극대화를 기할 수 있고 시스템 불확실성이 존재하는 경우라도 그 영향을 반영할 수 있으며 전체 제어시스템의 차수 증가를 방지하여 복잡성과 불안정성 증가 요인을 억제할 수 있다.

향후 연구방향은 이를 이용한 제어기의 설계와 이를 시스템에 적용하여 실험을 통해 입증할 것이다. 또한 상태관측 제어기와 비교하여 이 논문에서 제안한 출력 미분치 추정을 통한 제어방식이 효율적임을 보일 것이다.

참고 문헌

- [1] M.S. Chen, and M. Tomizuka, " Robust output feedback control for uncertain linear systems," Conference of Decision and Control, 1988.
- [2] M. Coless, and G. Leitmann, "Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems," IEEE Trans, Automat. Contr., Vol. AC-26, pp.1139~1144,1981.
- [3] C. A. Desoer, and M. Vidyasagar, Feedback Systems : Input-Output Properties, Academic Press, Newyork,1975.
- [4] A. Isidori, Nonlinear Control Systems : An Introduction, Springer Verlag, New york,1985
- [5] G. Leitmann, "On the efficiency of nonlinear control in uncertain linear systems," J. of Dyn. Sys., Mea. and Cont., Vol. 103, No. 2, pp.95~

102,1981

- [6] T. Kailath, Linear System, Prentice-Hall, N. J Englewood Cliffs, 1980.
- [7] S. Sastry, and M. Bodson, Adaptive Control, stability, convergence, and robustness, Prentice-Hall N. J. Englewood Cliffs,1980
- [8] J. E. Slotine, "Sliding controller design for nonlinear systems," Int. J. Contr., Vol. 40, pp.421~434, 1984.