

## 사각형 강체를 포함한 사각평판의 경계조건에 따른 처짐 연구

한동섭\*(동아대 대학원 기계공학과), 심재준(동아대 대학원 기계공학과), 김태형(경남정보대 컴퓨터응용기계과), 안찬우(동아대 기계공학과), 한근조(동아대 기계공학과)

The Study on the Deflection of the Rectangular Plates including the rectangular rigid body with respect to the boundary conditions

D. S. Han(Dept. of Mech. Eng., DAU), J. J. Shim(Dept. of Mech. Eng., DAU), T. H. Kim(Mech. Eng. Subd., KIT), C. W. Ahn(Dept. of Mech. Eng., DAU), and G. J. Han(Dept. of Mech. Eng., DAU)

### ABSTRACT

This paper deals with the effect of reinforced plate on the deflection of the rectangular plate, when the rectangular plate is reinforced with rectangular rigid body at the centroid of the plate. For Two boundary conditions such as simple supported and clamped boundary, this study derives deflection formula of reinforced plates with respect to the stiffness ratio and the length ratio of rigid body using the least square method. The results are as follows:

1. As  $r_c \geq 1000$ , the maximum deflection with respect to  $r_l$  converges into constant value.
2. Deflection formula with respect to  $r_l$  is derived as the fifth order polynomial.

**Key Words** : Deflection (처짐), Rectangular plate (사각평판), Rigid body (강체), Bending (굽힘)

### 기호설명

$r_c$  = Stiffness ratio of the rigid body  
 $r_l$  = Length ratio of the rigid body  
 $w_{s,max}$  = Maximum deflection of a simple supported plate  
 $w_{c,max}$  = Maximum deflection of a clamped plate  
 $\mu_s$  = Deflection coefficient of a simple supported plate  
 $\mu_c$  = Deflection coefficient of a clamped plate

### 1. 서론

항공기산업의 발전과 더불어 대두된 가장 큰 문제는 강도는 유지하면서 구조물을 경량화 시키는 방법이라 할 수 있다. 이를 해결하기 위하여 평판을 다양한 형태로 보강하여 사용하게 되는데, 이러한 평판에 대한 이론은 오래 전부터 Reissner, Mindlin 등 수많은 공학자들에 의해 다양하게 진행되어왔다. 그러나 복합적인 구조를 갖는 판에 대한 해석은 이러한 이론적인 방법으로 적용하기 곤란하므로 컴퓨터를 이용하여 해결하기 시작하였다.<sup>1)</sup>

전자장비가 많이 붙게 되는 항공기의 경우 사각

평판에 보강재 또는 보강판을 대고 그 위에 장비를 부착하게 되는데, 이때 이러한 보강재가 사각평판의 처짐에 어떠한 영향을 미치는지 살펴보기 위하여 본 연구에서는 단순지지와 완전고정의 두 가지 경계조건에서 각각 강체의 강성비와 길이비를 설계변수로 하여 유한요소해석을 바탕으로 강체를 포함하는 평판의 처짐식을 최소자승법을 이용하여 도출함으로써 현장에서 바로 사용할 수 있는 비교적 단순한 형태의 실험식을 제시하고자 한다.<sup>2),3)</sup>

### 2. 평판의 굽힘이론

#### 2.1 경계조건에 따른 사각평판의 처짐

일반적으로 사각평판에서 하중  $p$ 가 작용할 때 처짐은 최소 포텐셜 이론에 근거하여 구할 수 있다.<sup>4),5)</sup>

포텐셜 에너지는  $\Pi = U - W$  이므로

$$\Pi = \frac{D}{2} \int \int_A \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] - w p \right\} dx dy \quad (1)$$

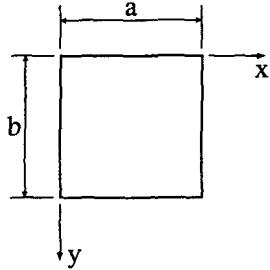


Fig. 1 Coordinate system of a rectangular plate

### 2.1.1 단순지지경계

단순지지경계에서 사각평판의 경계조건은

$$\begin{aligned} w=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 \quad (x=0, x=a) \\ w=0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \quad (y=0, y=b) \end{aligned} \quad (2)$$

이므로 다음과 같이 처짐식을 가정할 수 있다.

$$w_s = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3)$$

분포하중  $p_0$ 가 작용하고,  $a=b$ 일 때 최대처짐은

$$w_{s, \max} = \mu_s \frac{p_0 a^4}{D} \quad (4)$$

여기서,  $D$ 는 휨강성계수이며 다음과 같다.

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

### 2.1.2 완전고정경계

완전고정경계에서 사각평판의 경계조건은

$$\begin{aligned} w=0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \quad (x=0, x=a) \\ w=0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \quad (y=0, y=b) \end{aligned} \quad (5)$$

이므로 다음과 같이 처짐식을 가정할 수 있다.

$$w_c = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(1 - \cos \frac{2m\pi x}{a}\right) \left(1 - \cos \frac{2n\pi y}{b}\right) \quad (6)$$

분포하중  $p_0$ 가 작용하고,  $a=b$ 일 때 최대처짐은

$$w_{c, \max} = \mu_c \frac{p_0 a^4}{D} \quad (7)$$

## 2.2 파라메타의 정의

### 2.2.1 강체면의 강성비

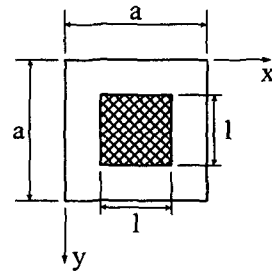
강성비( $r_e$ )는 사각평판의 Young계수  $E_p$ 에 대한 강체의 Young계수  $E_r$ 의 비를 무차원화 하여 나타낸 것으로 식(8)과 같다. 강성비는 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000의 7종류의 모델을 사용하였다.

$$r_e = \frac{E_r}{E_p} \quad (8)$$

### 2.2.2 강체면의 길이비

길이비( $r_l$ )는 사각평판의 한 변에 대한 강체의 한 변의 길이를 무차원화 하여 나타낸 것으로 식(9)와 같다. 길이비는 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9의 9종류의 모델을 사용하였다.

$$r_l = \frac{l}{a} \quad (9)$$



(a) dimensions of the plate



(b) simple supported B.C. (c) clamped B.C.

Fig. 2 Dimensions of the rectangular plate including a rectangular rigid body (aspect ratio=1)

## 3. 결과 및 고찰

### 3.1 단순지지경계에서 사각평판의 처짐

단순지지된 사각평판에 분포하중  $p_0$ 가 작용할 때 최대 처짐은 식(4)와 같고, 이때 강성비  $r_e=1$ , 길이비  $r_l=0$ 인 경우, 즉 보강되지 않은 순수한 평판의 처짐계수  $\mu_s=0.00416$ 이며, 강성비와 길이비가 변함에 따라 처짐계수는 각각 Table 1과 같이 나타난다.

Table 1 Deflection coefficient of simple supported rectangular plates with respect to the stiffness ratio and length ratio ( $\mu_s \times 10^{-3}$ )

| $r_c \backslash \eta$ | 0.1  | 0.2  | 0.3  | 0.4  | 0.5  | 0.6  | 0.7  | 0.8  | 0.9  |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2                     | 4.03 | 3.77 | 3.48 | 3.19 | 2.93 | 2.71 | 2.52 | 2.36 | 2.21 |
| 3                     | 3.97 | 3.60 | 3.18 | 2.77 | 2.41 | 2.11 | 1.87 | 1.68 | 1.51 |
| 4                     | 3.93 | 3.50 | 3.01 | 2.54 | 2.13 | 1.79 | 1.52 | 1.31 | 1.15 |
| 5                     | 3.91 | 3.44 | 2.90 | 2.39 | 1.94 | 1.58 | 1.30 | 1.09 | 0.93 |
| 10                    | 3.85 | 3.28 | 2.64 | 2.04 | 1.52 | 1.12 | 0.82 | 0.62 | 0.48 |
| 100                   | 3.78 | 3.09 | 2.33 | 1.63 | 1.05 | 0.61 | 0.32 | 0.14 | 0.07 |
| 1000                  | 3.77 | 3.06 | 2.28 | 1.57 | 0.99 | 0.55 | 0.25 | 0.08 | 0.02 |
| ( $\infty$ )          | 3.77 | 3.06 | 2.28 | 1.57 | 0.98 | 0.54 | 0.24 | 0.08 | 0.01 |

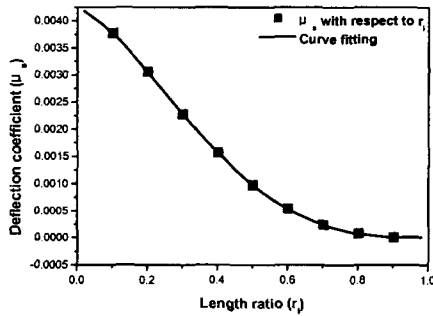


Fig. 3 Deflection coefficient of simple supported rectangular plates with respect to the length ratio at  $r_c = \infty$  ( $\mu_s$ )

Table 1을 살펴보면, 각각의 길이비( $\eta$ )에서 강성비( $r_c$ )가 증가함에 따라 처짐계수  $\mu_s$ 는 각각 0.00377, 0.00306, 0.00228, 0.00157, 0.00098, 0.00054, 0.00024, 0.00008, 0.00001의 값에 수렴하게 됨을 알 수 있다. 즉 강성비가 1000이상이면 강체로 보아도 무방하다고 할 수 있다. 따라서 사각형 강체가 존재할 때 길이비( $\eta$ )에 따른 처짐계수를 그래프로 나타내면 Fig. 3과 같고, 이를 수식화하여 5차식으로 나타내면

$$\mu_s = A_0 + A_1 r_1 + A_2 r_1^2 + A_3 r_1^3 + A_4 r_1^4 + A_5 r_1^5 \quad (10)$$

이 되고, 이때 상관계수는 1.00이며, 계수는 Table 2에 나타내었다.

Table 2 Parameters for deflection coefficient formula of simple supported rectangular plates

| $A_0$   | $A_1$    | $A_2$    | $A_3$   | $A_4$    | $A_5$   |
|---------|----------|----------|---------|----------|---------|
| 0.00424 | -0.00269 | -0.02477 | 0.05012 | -0.03682 | 0.00994 |

Table 3 Deflection coefficient of clamped rectangular plates with respect to the stiffness ratio and length ratio ( $\mu_c \times 10^{-3}$ )

| $r_c \backslash \eta$ | 0.1  | 0.2  | 0.3  | 0.4  | 0.5  | 0.6  | 0.7  | 0.8  | 0.9  |
|-----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 2                     | 1.21 | 1.13 | 1.04 | 0.97 | 0.93 | 0.89 | 0.87 | 0.84 | 0.78 |
| 3                     | 1.19 | 1.06 | 0.94 | 0.84 | 0.77 | 0.72 | 0.69 | 0.66 | 0.60 |
| 4                     | 1.17 | 1.03 | 0.89 | 0.76 | 0.67 | 0.61 | 0.58 | 0.55 | 0.50 |
| 5                     | 1.16 | 1.01 | 0.85 | 0.71 | 0.61 | 0.54 | 0.50 | 0.47 | 0.43 |
| 10                    | 1.14 | 0.95 | 0.76 | 0.59 | 0.46 | 0.38 | 0.32 | 0.29 | 0.26 |
| 100                   | 1.12 | 0.88 | 0.65 | 0.44 | 0.29 | 0.17 | 0.10 | 0.06 | 0.04 |
| 1000                  | 1.11 | 0.87 | 0.63 | 0.42 | 0.26 | 0.14 | 0.07 | 0.02 | 0.01 |
| ( $\infty$ )          | 1.11 | 0.87 | 0.63 | 0.42 | 0.26 | 0.14 | 0.06 | 0.02 | 0.00 |

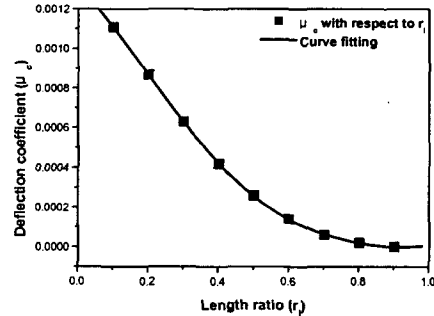


Fig. 4 Deflection coefficient of clamped rectangular plates with respect to the length ratio at  $r_c = \infty$  ( $\mu_c$ )

### 3.2 완전고정경계에서 사각평판의 처짐

완전고정된 사각평판에 분포하중  $p_0$ 가 작용할 때 최대 처짐식은 식(7)과 같고, 이때 강성비  $r_c=1$ , 길이비  $\eta=0$ 인 경우, 즉 보강되지 않은 순수한 평판의 처짐계수  $\mu_c = 0.00126$ 이며, 강성비와 길이비가 변함에 따라 처짐계수는 각각 Table 3과 같이 나타난다.

Table 3을 살펴보면, 각각의 길이비( $\eta$ )에서 강성비( $r_c$ )가 증가함에 따라 처짐계수  $\mu_c$ 는 각각 0.00111, 0.00087, 0.00063, 0.00042, 0.00026, 0.00014, 0.00006, 0.00002, 0의 값에 수렴하게 됨을 알 수 있다. 즉 강성비가 1000이상이면 강체로 보아도 무방하다고 할 수 있다. 따라서 사각형 강체가 존재할 때 길이비( $\eta$ )에 따른 처짐계수를 그래프로 나타내면 Fig. 4와 같고, 이를 수식화하여 5차식으로 나타내면

$$\mu_c = B_0 + B_1 r_1 + B_2 r_1^2 + B_3 r_1^3 + B_4 r_1^4 + B_5 r_1^5 \quad (11)$$

이 되고, 이때 상관계수는 0.999이며, 계수는 Table 4에 나

타내었다.

Table 4 Parameters for deflection coefficient formula of clamped rectangular plates

| $B_0$   | $B_1$    | $B_2$    | $B_3$   | $B_4$    | $B_5$   |
|---------|----------|----------|---------|----------|---------|
| 0.00130 | -0.00148 | -0.00587 | 0.01432 | -0.01179 | 0.00353 |

#### 4. 결론

단순지지경계와 완전고정경계에서 강체의 강성비와 길이비에 따른 사각형 강체를 포함한 사각평판의 처짐의 변화를 최소자승법을 이용하여 계산한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 경계조건에 관계없이 강성비( $r_c$ )가 1000이상이 되면, 각각의 길이비( $r_l$ )에서 처짐계수가 일정한 값에 수렴하게 되어 강체로 간주할 수 있음을 알 수 있다.

2. 단순지지된 사각평판에서 길이비에 따른 처짐계수( $\mu_s$ )는 최소자승법을 이용하여 5차 다항식의 형태로 나타낼 수 있으며, 그때의 상관계수는 1.00으로 매우 신뢰할 수 있고, 길이비가 0.9이상이면 처짐이 거의 발생하지 않음을 알 수 있다.

3. 완전고정된 사각평판에서 길이비에 따른 처짐계수( $\mu_c$ )는 최소자승법을 이용하여 5차 다항식의 형태로 나타낼 수 있으며, 그때의 상관계수는 0.999로 매우 신뢰할 수 있고, 길이비가 0.8이상이면 처짐이 거의 발생하지 않음을 알 수 있다.

#### 참고문헌

1. S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, "Theory of Plates and Shells," McGraw-Hill Co., pp. 180-228, 1959.
2. J. Hoffman, "Numerical methods for engineers," McGraw-Hill, Co., Singapore, 1992.
3. 한근조, 안성찬, 심재준, 이현철, 장활수, "면적비와 위치변화가 점용접된 두 사각평판의 좌굴응력에 미치는 영향," 한국정밀공학회지, 제18권, 제12호, pp. 54-59, 2001.
4. A. C. Ugural, "Stresses in Plates and Shells," McGraw-Hill Co., pp. 59-93, 1981.
5. 오세욱, "재료역학," 동명사, pp. 393-395, 1992.