

## 평면 변형 하에서의 비정상 이상 공정 이론

정관수\* · 이원오\* · Owen Richmond

### Non-steady Ideal Forming in Plane Strain

K. Chung, W. Lee and O. Richmond

#### Abstract

In the ideal forming theory<sup>(1)</sup>, which has been previously developed as a direct method for optimizing forming process, material elements are required to deform following the minimum plastic work path (or the proportional true strain path). Besides the general theory<sup>(2,3)</sup>, specific ideal forming theories have been developed for membrane sheet forming<sup>(4)</sup> as well as two-dimensional steady bulk forming<sup>(5~7)</sup>. In this work, the ideal forming theory was successfully applied for non-steady bulk forming under the plane strain condition. Here, the shape change complying with the minimum plastic work path, was effectively described by developing a numerical code based on the characteristic method. Numerical results obtained for a specific industrial part also include the optimum pre-forming shape and its evolving shape change to the final shape as well as the boundary traction history.

**Key Words** : Ideal Forming Theory, Ideal Bulk Forming, Characteristic Method

#### 1. 서 론

이상 공정 이론(ideal forming theory)에서 모든 물체는 공정 시 에너지 소비 면에서 가장 최적의 변형을 하도록 요구되며, 이러한 변형은 매순간에서의 주변형선(principal lines)들이 공정 내내 지정된 물체선(material lines) 상에 고정되어야 가능하다. 이러한 변형 조건을 만족시키는 평면 변형 조건(plane strain condition)하에서의 등방 강 완전 소성체(isotropic rigid perfect plastic material)의 변형은 균일 면적 분포를 갖는 Lagrangian 직교 좌표계를 이용하여 표현할 수 있다<sup>(8)</sup>. 본 연구에서는 이러한 Lagrangian 직교 좌표계를 이용한 이상 공정을 구현하기 위해 특성선에 의한 해법(characteristic

method)에 기초를 둔 수치 해석 코드를 개발하였다. 아울러 주어진 최종 형상에 대하여 가장 적합한 초기 형상을 얻기 위한 최적화 이론과 중간 형상 및 각 형상에서의 응력 분포와 경계 외력에 대한 이론을 마련하였다.

응용 예로서 실제 산업용 부품에 대하여 균일 면적 분포를 갖는 직교 좌표계를 구현하고, 최적의 초기 형상과 중간 형상 및 각 형상에서의 응력 분포와 경계 외력을 구해보았다.

#### 2. 이상 변형 좌표계와 평형 방정식

이상 공정 이론을 만족시키는 등방 강 완전 소성체의 변형을 기술하는 균일한 면적을 갖는 Lagrangian 직교

\* 서울대학교 재료공학부

좌표계는 두 개의 기하 변수 ( $h, \phi$ )로 표현이 가능하고, 다음과 같은 관계식을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} h \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= 0 \\ h^3 \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \frac{\partial h}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 ( $\xi, \eta$ )는 물체에 고정되어 있는 주변형선으로 이루어진 Lagrangian 직교 좌표계의 변수이고,  $h$ 와  $\psi$ 는 각각  $\xi$ -기저 벡터의 크기와  $x$ 축에 대한 사이각이다. 식(1)을 특성선에 의한 해법에 의해 표현하면

$$\begin{aligned} d \ln h + d\psi &= 0 \quad \text{on the } \frac{d\eta}{d\xi} = h^2 \text{ line} \\ d \ln h - d\psi &= 0 \quad \text{on the } \frac{d\eta}{d\xi} = -h^2 \text{ line} \end{aligned} \quad (2)$$

이 되고 평면 변형 하에서의 평형 방정식을 구해보면

$$\begin{aligned} \frac{p}{2k} + \ln h &= p_0 \quad \text{at } \dot{\epsilon} > 0 \text{ region} \\ \frac{p}{2k} - \ln h &= p_1 \quad \text{at } \dot{\epsilon} < 0 \text{ region} \end{aligned} \quad (3)$$

이 되고, 여기서  $p$ 는 등방 응력,  $k$ 는 전단 항복 응력,  $p_0$ 와  $p_1$ 은 임의의 상수이다.

### 3. 응용 및 결과

#### 3.1 Lagrangian 직교 좌표계

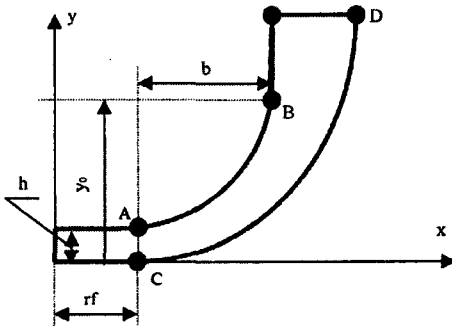


Fig. 1 Schematic Geometry of defined problem for the real-part model

Fig. 1에서 Line 1과 Line 2는  $y$ 축에 대해 대칭을 이루는 모습으로 실제 산업용 부품을 대개 변수화하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(\theta) &= b^2 \frac{\tan(\theta)}{(y_0 - H)d(\theta)} + rf \\ y(\theta) &= y_0 - \frac{y_0 - H}{d(\theta)} \end{aligned} \quad \text{-Line 1 (4)}$$

$$\begin{aligned} x^*(\theta) &= b^2 \frac{\tan(\theta)}{(y_0 - H)d(\theta)} + rf \\ &\quad + e^{\theta - r_0} \sqrt{H} (\cos \theta + \sin \theta) \\ y^*(\theta) &= y_0 - \frac{y_0 - H}{d(\theta)} \\ &\quad - e^{\theta - r_0} \sqrt{H} (\cos \theta - \sin \theta) \end{aligned} \quad \text{-Line 2 (5)}$$

여기서  $d(\theta) = \sqrt{1 + \frac{b^2}{(y_0 - H)^2} \tan^2 \theta}$ 이고,  $\theta$ 의 범위는  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ 이다. 또한 사용한 상수는

$$\begin{aligned} b &= 3.122/5.65, H = 0.149/5.65 \\ rf &= 5.785/5.65, y_0 = 5.281/5.65 \\ r_0 &= -(\ln H)/2 \end{aligned} \quad (6)$$

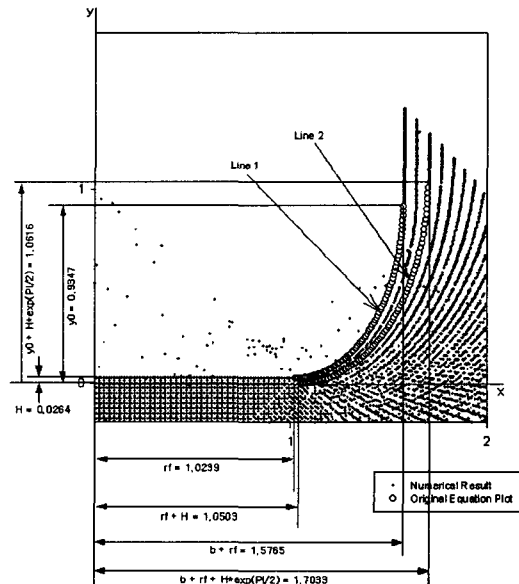


Fig. 2 Principal line coordinate system numerically obtained for the original real-part

이며 Fig. 1에서 'AB'가 Line 1을, 'CD'가 Line 2를 나타낸다. Fig. 2는 식(4)과 (5)의 해석적 해와 함께 수치 해석 코드의 결과도 함께 보여주고 있다.

### 3.2 최적 초기 형상과 중간 형상

절대 변형율의 평균값  $K$ 는

$$K = \frac{\int |\epsilon| dA}{A} \quad (7)$$

로 정의할 수 있고,  $\epsilon = \ln(h_f/h_i)$ ,  $A$ 는 물체의 면적을 뜻하며  $f$ 와  $i$ 는 각각 최종 형상과 초기 형상을 의미한다. 여기서 최적  $h_i$ 를 얻는 조건은  $K$ 를 최소화하여 얻을 수 있으며 그 식은

$$\frac{dK}{dh_i} = 0 \quad (8)$$

이 된다. 초기 형상을 얻는 방법에는 여러 가지가 있지만 여기서는 산업적으로 쉽게 접근할 수 있는 직각 사각형을 초기 형상으로 가정한다. 또한 중간 형상은  $h$ 와  $\psi$ 를 다음과 같이 일정하게 변화시켜서 얻는다.

$$\begin{aligned} h(\alpha) &= ah_f + (1-\alpha)h_i \\ \psi(\alpha) &= a\psi_f + (1-\alpha)\psi_i \end{aligned} \quad (9)$$

여기서  $\alpha$ 의 범위는  $0.0 \leq \alpha \leq 1.0$ 이다.

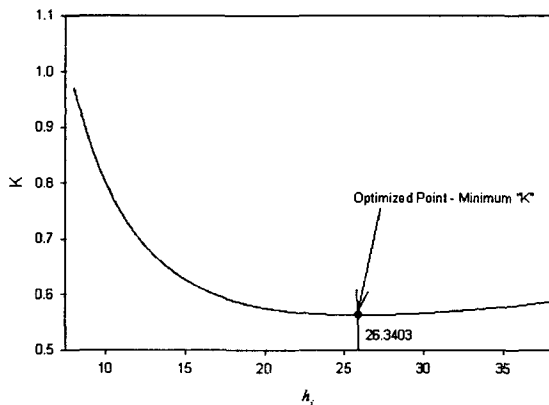


Fig. 3 Average absolute strain with optimized point

Fig. 3은 절대 변형율의 평균값을  $h_i$ 에 대해 그린 것인데,  $h_i = 26.3$ 일 때,  $K$ 가 최소가 되고, 이 값과 식(9)를 가지고 중간 형상을 얻어보면 Fig. 4와 같이 된다.

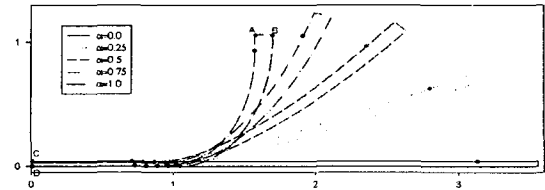


Fig. 4 Intermediate shapes

### 3.3 $h$ 분포

$\epsilon$ 은  $h$ 에 의존하기 때문에 각각의 형상에서  $h$ 의 분포를 통해  $\epsilon$ 의 부호를 알아보아야 한다.

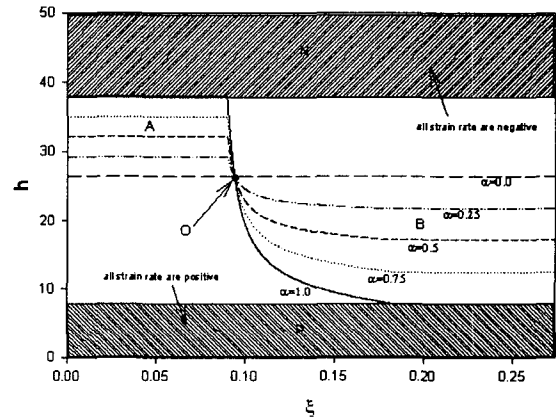


Fig. 5  $h$  distribution of intermediate shapes for optimized initial scaling factor

Fig. 5를 보면  $\epsilon$ 의 부호가 +/- 모두 존재하기 때문에 영역 A, B에 따라서 식(3)을 적절히 사용하여야 한다.

### 3.4 자유 끝단 경계 조건 하에서의 경계 외력 (boundary traction under free edge condition)

각각의 중간 형상마다 응력과 경계 외력의 분포는 여러 경계 조건을 줌으로써 알아볼 수 있다. 경계 조건들은 식(3)의 상수  $p_0$ 와  $p_1$ 을 결정해 준다. 여기서는 매 순간의 형상 끝단에 응력이 걸리지 않는 자유 경계 조건

을 주고자 한다.

Fig. 4에서 끝단 AB에서 수직 방향 응력( $\sigma_y$ )이 0이면 되므로

$$p_1 = -\frac{1}{2} - \ln h_{AB} \quad (10)$$

이 되고, Fig. 5에서의 점 O의 응력 연속성에 의해

$$p_0 = \frac{1}{2} + \ln \frac{h_0^2}{h_{AB}} \quad (11)$$

을 얻는다. Fig. 6은 각각의 중간 형상에서의 자유 끝단 경계 조건에 대한 경계 외력을 보여준다.

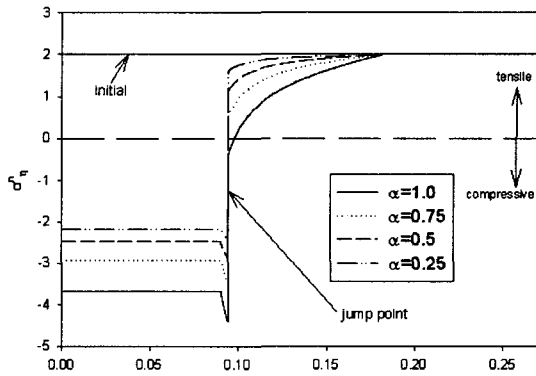


Fig. 6 Boundary traction of intermediate shapes for free boundary condition

Fig. 6에서  $\sigma_y^* = \sigma_y/k$ 이고, 점프 포인트는 강 소성체로 물체를 정의했기 때문에  $\sigma_y^* = 2$  (or  $\sigma_y = 2k$ ) 만큼의 양으로 나타나는 것이다.

#### 4. 요약 및 결론

평면 변형 하에서 비정상 이상 변형을 균일한 면적을 갖는 Lagrangian 직각 좌표계로 구현할 수 있었고, 실제 산업 부품에 응용하여 최적화된 초기 형상과 이에 따른

중간 형상들을 얻어내었다. 또한 각각의 형상들로부터 자유 끝단 경계 조건에 따른 응력과 경계 외력의 분포를 알 수 있었다. 이러한 최적의 공정 설계 정보를 제공하는 이상 공정 이론은 실제 공정의 최적 설계에 유익하게 이용될 수 있을 것이다.

#### 참고 문헌

- (1) Chung, K. and Richmond, O., 1992, "Ideal Forming - I. Homogeneous Deformation with Minimum Plastic Work", Int. J. Mech. Sci., Vol. 34, pp. 575~591.
- (2) Chung, K. and Richmond, O., 1993, "A Deformation Theory of Plasticity Based on Minimum Work Paths", Int. J. Plasticity, Vol. 9, pp. 907~920.
- (3) Chung, K. and Richmond, O., 1994, "The Mechanics of Ideal Forming", J. Appl. Mech., Vol. 61, pp. 176~181.
- (4) Chung, K., Barlat, F., Brem, J.C., Lege, D.J. and Richmond, O., 1997, "Blank Shape Design for a Planar Anisotropic Sheet Based on Ideal Forming Design Theory and FEM Analysis", Int. J. Mech. Sci., Vol. 39, pp. 105~120.
- (5) Richmond, O. and Devenpeck, M.L., 1962, "A Die Profile for Maximum Efficiency in Strip Drawing", Proc. 4th. U.S. Natn. Cong. Appl. Mech., pp. 1053~1057.
- (6) Richmond, O. and Morrison, H.L., 1967, "Streamlined Wire Drawing Dies of Minimum Length", J. Mech. Phys. Solids., Vol. 15, pp. 195~203.
- (7) Richmond, O., 1968, "Theory of Streamlined Dies for Drawing and Extrusion", Mechanics of Solid State, Univ. of Toronto Press. pp. 154~167.
- (8) Richmond, O. and Alexandrov, S., 2000, "Nonsteady Planar Ideal Plastic Flow : General and Special Analytic Solution", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 48, pp. 1735~1759.