

비선형 경계조건을 고려한 내부 유체의 3차원 자유수면 유동해석

3-D analysis of sloshing motion in a fluid container with nonlinear boundary conditions

김문겸* 임윤목** 조경환*** 박종현*** 이성민****
Kim, Moon Kyum Lim, Yun Mook Cho, Kyung Hwan Park, Jong Huen Lee, Sung Min

ABSTRACT

Large amplitude sloshing can occur in contained fluid region due to the seismic ground motion. Also, The pressure by large amplitude sloshing damages the connections between the wall and roof of a fluid container and causes outflow of contained fluid. Therefore, to predict the dynamic behavior accurately, three dimensional analysis with the nonlinear boundary condition must be performed. In this study, the numerical solution procedure is developed using the boundary element method with the Lagrangian particle approach. In order to demonstrate the accuracy and validity of the developed method, the fluid motion for a free oscillation with small amplitude and a forced vibration are analyzed. And the numerical results are compared with the linear theory results and the previous studies with the nonlinear boundary condition.

1. 서론

유체저장 구조물에 지진하중이 작용하게 되면 구조물 내부의 유체에 큰 자유수면변위가 발생하게 되며 이러한 자유수면변위는 유체저장 구조물의 벽체와 Roof 사이의 연결부 파손이나 저장 유체의 유출과 같은 결과를 유발하게 된다. 따라서 유체저장 구조물의 설계시에는 자유수면의 슬러싱 높이를 정확하게 산출해야 하며 이를 위해서는 자유수면의 비선형 경계조건을 고려한 3차원 정밀 해석이 필수적으로 요구된다. 본 연구에서는 유체의 자유수면 대변형 해석을 위해 유체를 경계요소로 모형화하고 자유수면 비선형 경계조건을 고려하여 시간영역에서의 유체 자유수면 거동을 해석할 수 있는 수치해석 기법을 개발하였다. 개발된 수치해석 기법의 타당성 및 적용성 검증을 위해 미소 자유진동 해석 및 강제진동 해석을 수행하였다. 비선형 미소 자유진동 해석에서는 비선형 경계조건을 고려한 결과와 선형이론해 및 기존의 연구된 해석해와 비교함으로써 개발된 해석기법의 타당성을 검증하였으며, 수평 및 수직방향 강제진동 해석에서는 비선형 효과에 의한 응답의 변화를 살펴봄으로써 그 적용성을 검증하였다.

* 연세대학교 토목공학과 교수, 정회원
** 연세대학교 토목공학과 부교수
*** 연세대학교 토목공학과 박사과정
**** 연세대학교 토목공학과 석사과정

2. 유체의 경계요소 모형화

2.1 유체 운동의 모형화

구조물 내의 유체가 비점성, 비압축성 이상유체로서 비회전 운동을 한다고 가정하면 유체의 속도는 속도 포텐셜 함수 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 를 도입하여 나타낼 수 있다.^[1]

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1)$$

여기서 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ 는 위치벡터이다.

Laplace 방정식을 만족하는 유체운동에 대한 경계적분방정식은 Lagrange-Green Identity 와 Laplace 방정식의 기본해를 이용하여 다음 식 (2) 와 같이 구할 수 있다.

$$c(\mathbf{x}^i, t) \phi(\mathbf{x}^i, t) = \int_S \phi^*(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}, t) \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial n} ds - \int_S \frac{\partial \phi^*(\mathbf{x}^i, \mathbf{x}, t)}{\partial n} \phi(\mathbf{x}, t) ds \quad (2)$$

여기서 Γ 는 유체의 경계, n 은 경계면에서의 외향법선, ξ 는 단위하중 작용점, \mathbf{x} 는 응답점을 나타내며 $\phi^*(\xi, \mathbf{x}, t)$ 는 Laplace 방정식의 기본해이다.

지배방정식의 경계적분방정식을 수치적분하기 위해서는 경계적분경로를 경계요소와 경계절점으로 이산화해야 한다. 다음의 식 (3) 은 이산화된 경계적분방정식을 나타낸 것이다.

$$[c]^i \{\phi\}^i + \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{r_j} \left[\frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right] [\phi] d\Gamma \right\} \{\phi\}^j = \sum_{j=1}^{NE} \left\{ \int_{r_j} [\phi^*] [\phi] d\Gamma \right\} \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\}^j \quad (3)$$

여기서, $\{\phi\}^i$ 는 절점 i 에서의 변위행렬이고, NE 는 경계요소의 수이며, $[\phi]$ 는 형상함수의 행렬이다. 또한 $\left[\frac{\partial \phi^*}{\partial n} \right]$ 와 $[\phi^*]$ 는 각각 유동률(flux) 과 포텐셜의 기본해를 나타내는 행렬이다. 이산화에 사용된 요소는 개개의 요소마다 9 개의 절점을 갖는 quadratic isoparametric 요소이며 이산화된 경계적분방정식을 간단한 형태의 행렬식으로 표현하면 다음과 같다.

$$H \phi = G \phi_{,n} \quad (4)$$

2.2 유체영역 경계조건의 적용

그림 1 과 같은 원통형 유체 저장탱크에 지진과 같은 동하중이 작용할 경우 유체의 자유수면은 슬러싱 운동을 하게된다. 이 때, 자유수면의 거동은 자유수면에 작용하는 압력은 대기압과 같다는 동역학적 경계조건과 자유수면에 놓여진 유체 입자는 유체가 운동하는 동안 자유수면에 위치해야 한다는 운동학적 경계조건을 만족한다.^[2]

그림 1 에서 자유수면까지의 높이를 $\eta(x, y, t)$ 라 하면 자유수면의 동역학적 경계조건은 Bernoulli 방정식을 이용하여 식 (5) 와 같이 나타낼 수 있으며 자유수면에 놓여진 유체 입자는 유체가 운동하는 동안 자유수면에 위치해야 한다는 운동학적 경계조건은 다음 식 (6) 과 같다.^[3]

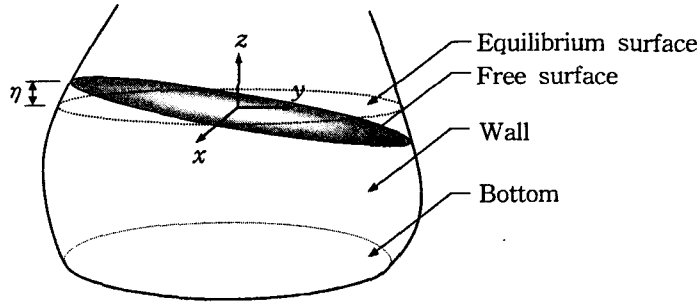


그림 1 유체와 구조물의 경계

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{P(\mathbf{x}, t)}{\rho} + \frac{1}{2} \nabla \phi \nabla \phi + a_x x + a_y y + (g + a_z) \eta(x, y, t) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{D \mathbf{x}_f}{Dt} = \nabla \phi \quad (6)$$

여기서, g , ρ 는 각각 중력가속도와 유체의 밀도, $P(\mathbf{x}, t)$ 는 유체동압력을 \mathbf{x}_f 는 유체 자유수면의 좌표계를 나타낸다.

또한, 구조물 벽면과 바닥면에서는 강성 구조물이라는 가정에 의해 절대변위가 발생할 수 없으므로 유체가 구조물과 접한 경계면의 경계조건은 식 (7) 과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial n} = 0 \quad (7)$$

식 (4) 와 같은 형태로 이산화된 지배 운동방정식과 식 (5), 식 (6), 식 (7) 과 같은 경계조건을 이용하여 유체 자유수면의 운동을 모형화한다.

3. 비선형 경계조건을 고려한 시간영역 해석

3.1 경계조건을 적용

앞에서 유도된 3차원 포텐셜 문제의 경계적분방정식에 벽면과 자유수면의 경계조건을 적용하기 위해서는 유체의 절점을 자유수면상의 절점과 접합면 절점으로 분리해야 한다. 이렇게 분리된 절점에 대해 식 (7) 로 나타내어지는 접합면 경계조건을 적용하여 정리하면 다음과 같은 식 (8) 을 얻을 수 있다.

$$\hat{H}_{ff} \phi_f = \hat{G}_{ff} \phi_{f,n} \quad (8)$$

여기서, \hat{H}_{ff} 와 \hat{G}_{ff} 는 각각 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{H}_{ff} = H_{ff} - H_{fw} H_{ww}^{-1} H_{wf}$$

$$\hat{G}_{ff} = G_{ff} - H_{fw} H_{ww}^{-1} G_{wf}$$

위 식에서 아래첨자 f 는 유체의 자유수면 절점을 의미하고 w 는 구조물 벽면과 유체가 접하고 있는 절점을 의미한다.

이제 식 (8) 을 이용하여 각 절점에서의 포텐셜로부터 유동률을 계산할 수 있으며 각 시간단계에서의 포텐셜을 구하기 위해서는 우선 포텐셜의 시간변화율을 계산하여야 한다. 이는 자유수면의 동역학적 경계조건으로부터 식 (9) 와 같이 표현된다.

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - a_x x - a_y y - (g + a_z) \eta(\mathbf{x}, t) \quad (9)$$

따라서, 이전 시간단계에서 계산된 속도성분 \mathbf{u} , 좌표와 변위 x, y 와 η , 입력자료로부터 주어진 가속도항 a_x, a_y, a_z, g 를 이용하면 식 (9) 로부터 포텐셜의 시간변화율을 계산할 수 있다.

3.2 시간영역 해석

유체의 운동이 유체입자들의 개별운동으로 표현된다는 Lagrangian 접근방법을 이용하면 k 번째 시간단계에서의 포텐셜 ϕ_f^k 는 다음의 식 (10) 과 같이 표현된다.

$$\phi_f^k = \phi_f^{k-1} + \left(\frac{D\phi}{Dt} \right)^{k-1} \Delta t \quad (10)$$

$k-1$ 번째 시간단계에서의 응답요소는 기지의 값이므로 식 (9) 를 이용하여 포텐셜의 시간변화율을 계산하면 k 번째 시간단계에서의 포텐셜 ϕ_f^k 를 구할 수 있고 식 (8) 을 이용하여 유동률 $\phi_{f,n}^k$ 를 구할 수 있다. 계산된 유동률과 운동학적 경계조건인 식 (6) 을 이용하면 속도성분 \mathbf{u}_n^k 를 계산할 수 있다.

이제 포텐셜의 시간적분에 사용된 방법인 forward Euler method 를 사용하여 식 (11) 과 같이 이전 단계의 속도성분으로부터 유체 자유수면의 변위성분을 계산할 수 있다.

$$\delta^k = \delta^{k-1} + \mathbf{u}^{k-1} \cdot \Delta t \quad (11)$$

여기서, δ 는 변위벡터이다. 이와 같이 계산된 유체 자유수면의 변위를 다시 이전 시간단계의 좌표에 더함으로써 변형된 후의 좌표를 산정할 수 있고 이를 이용하여 다음 시간단계인 $k+1$ 번째 단계의 계방정식을 새롭게 구성하여 다시 응답을 구한다. 이러한 일련의 과정을 반복함으로써 전체 시간에서의 응답을 구하게 된다.

4. 수치해석 기법의 검증 및 적용

본 장에서는 개발된 수치해석 기법의 검증을 위해 그림 2 와 같은 원통형 유체저장 구조물을 대상으로 자유진동 해석을 수행하여 선형 이론해 및 기존의 해석결과와 비교해본다. 또한, 조화함수 형태의 수평 및 수직방향 가속도로 강제진동 해석을 수행하여 비선형 효과를 파악한다.

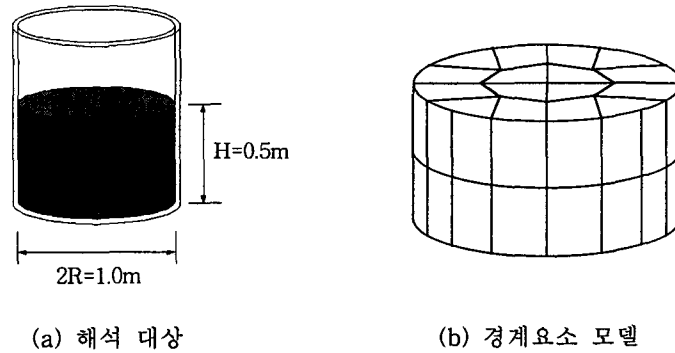


그림 2 검증에 사용된 해석대상 및 경계요소 모델

4.1 미소 자유진동 해석

개발된 수치해석 기법의 검증을 위해 선형화된 미소 진폭과 이론에 의한 이론해가 존재하는 미소 자유진동 해석을 수행하였다. 경계요소 모델은 258개의 절점과 52개의 요소로 구성하였다. 식 (12) 및 식 (13) 과 같이 표현되는 자유수면의 초기조건을 절점변위로 주어 해석을 수행한다.^[3]

$$\eta(r, \theta) = -\frac{A}{g} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} w_i J_1 \left(\frac{\epsilon_i r}{R} \right) \cosh \left(\frac{\epsilon_i H}{R} \right) \cos(\epsilon_i t) \right\} \cos \theta \quad (12)$$

$$w_i^2 = \frac{g}{R} \epsilon_i \tanh \left(\frac{\epsilon_i H}{R} \right) \quad (13)$$

여기서 r, θ 는 각각 원점으로부터의 거리와 x 축과 이루는 각이며, R, H 는 각각 유체영역의 반지름과 높이이다. 또한 J_1 은 1차 1종 Bessel 함수이며 ϵ_i 은 $J_1'(\epsilon R) = 0$ 의 i 번째 해로 본 연구에서는 $i=1$ 로 한다. A 는 임의의 상수로 본 해석에서는 미소 초기변위를 주어야 하므로 $0.1m$ 로 하였다.

그림 3 은 $x = -R, y = 0$ 인 지점의 자유수면 변위를 나타내고 있다. 본 연구에서 개발한 수치해석 프로그램을 검증하기 위해 본 연구의 수치해석 결과를 Kasuga 등^[3]의 수치해석 결과 및 Takayama의 이론해^[4] 결과와 비교한 결과 그림 3 에서 볼 수 있는 바와 같이 잘 일치하는 결과를 보였다. 이러한 결과가 나온 이유는 미소한 진폭을 초기조건으로 주어 해석을 수행하였기 때문에 비선형성이 나타나지 않았기 때문으로 판단된다. 또한 해석에 의해 얻어진 시간-변위 결과를 이용하여 주어진 해석대상의 자유수면 고유진동수를 계산해 그 결과를 Abramson의 이론해^[5]와 비교하였다. 이론해에 의해 계산된 1차 모드 고유진동수는 0.933Hz 이며 Kasuga 의 수치해석 결과를 토대로 산정된 고유진동수도 0.933Hz 로 나타나 본 해석에서 얻어진 결과를 이용하여 계산된 해석대상의 자유수면 1차 모드 고유진동수 0.933Hz 와 일치하는 것을 확인하였다.

이와 같이 자유수면 변위, 포텐셜의 시간변화율 및 고유진동수를 산정하여 이를 선형이론해 및 Kasuga 등의 수치해석 결과와 비교함으로써 본 수치해석 기법이 미소진폭에 의한 자유수면 변위를 효과적으로 산정할 수 있음을 확인하였다.

4.2 수평방향 강제진동 해석

해석대상과 해석에 사용된 모델링은 미소 자유진동 해석에 사용된 해석대상 및 모델링과 동일하며 하중은 식 (14) 와 같이 x 방향 가속도를 입력하여 해석을 수행한다.

$$a_x(t) = D_x \omega^2 \sin(\omega t) \quad (14)$$

여기서 D_x 는 상수이고, ω 는 하중의 각진동수로 본 연구에서는 $D_x = 0.01\text{m}$, $\omega = 5.85\text{rps}$ 로 한다. 해석은 시간간격 $\Delta t = 0.01$ 초로 하여 6 초까지 수행하였다.

그림 4 는 수치해석 결과로부터 얻어진 $x = R$, $y = 0$ 인 지점의 자유수면 변위를 나타내고 있다. 그림 4 에 나타난 바와 같이, 본 연구의 해석결과가 선형이론에 의한 해석결과보다 최대점 발생 시간이 늦어지는 경향을 보이며, 최대 변위도 더 크게 산정됨을 확인하였다. 이는 강제진동 초기에는 비선형 효과가 미소하나, 시간이 지남에 따라 속도성분이 증가하여 비선형 효과가 커지므로 진폭이 커지고 진동주기가 증가하는 것으로 판단된다. 또한, 자유수면의 진폭은 점차 증가하여 열 번째 최대점에서는 선형 해석결과에 비해 최고 19.19% 증가하며 6 초 이후에는 하중 주기와 점차 차이가 커지고 비선형 효과가 커짐으로써, 자유수면 모드를 유지하지 못하고 파형이 깨지는 현상을 보였다.

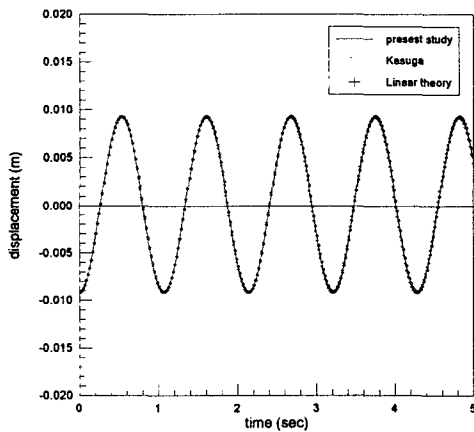


그림 3 미소 자유진동에 의한 수면변위

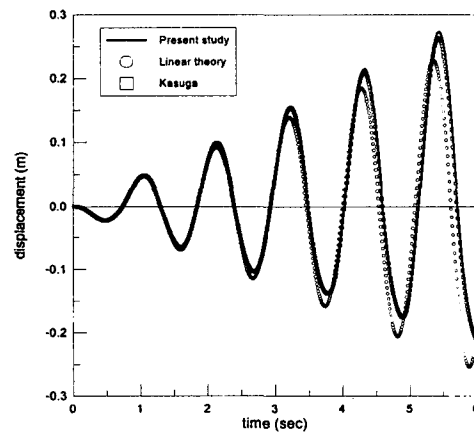


그림 4 수평방향 강제진동에 의한 수면변위

본 연구의 결과와 Kasuga 등의 결과를 비교해 보면 본 해석결과가 상향으로는 3.84% 더 크게 나타났으며 하향으로는 -0.74% 작게 나타나 상향으로는 더 큰 변위를 하향으로는 작은 변위를 발생시키고 있음을 알 수 있다. 이는 Kasuga 등의 이론에서는 Constant Potential 요소를 사용하여 요소의 중심에서 계산된 포텐셜로부터 속도성분을 계산하므로 포텐셜 변화율이 급격한 접합면 부근에서 비교적 큰 오차를 포함하게 되며 그 크기는 작게 산정되기 때문인 것으로 사료된다.

그림 5 는 $x = R$, $y = 0$ 인 자유수면 절점에서 시간에 따른 포텐셜의 시간변화율을 나타낸 그림이다. 그림에서 볼 수 있는 바와 같이 강제진동 해석에서는 비선형항인 속도성분 $0.5u^2$ 이 양의 값을 가지며 점차 증가하여 비선형 효과가 점차적으로 커짐을 확인하였다. 또한, 비선형 효과가 커짐에 따라 중립축 아래쪽에서의 변위는 선형해석에 의한 결과보다 작아지게 되고, 반대로 중립축 위쪽에서의 변위는 선형해석에 의한 결과보다 커지게 되는 것을 확인하였다.

4.3 수직방향 강제진동 해석

해석대상과 해석에 사용된 모델링은 미소 자유진동 해석에 사용된 해석대상 및 모델링과 동일하다. 수직방향 유체운동은 수직방향 하중만 존재할 경우 초기값이 평형상태이면 유체유동이 발생하지 않는다. 따라서 본 연구에서는 유동을 발생시키기 위하여 다음 식 (15) 와 같이 축대칭의 미소 초기변위를 가정한다.

$$\eta(r, t_0) = -A J_0\left(\frac{\epsilon_i r}{R}\right) \quad (15)$$

여기서 t_0 는 초기시간, A 는 상수, r 은 원점으로부터 임의의 절점까지의 거리이며, J_0 는 0차 1종 Bessel 함수, ϵ_i 는 $J_0'(\epsilon) = 0$ 을 만족하는 i 번째 해이다. 본 연구에서는 $A = 0.005\text{m}$, $i = 1$ 로 하기로 한다. 하중은 다음의 식 (16) 와 같이 z 방향 가속도만 가하는 것으로 한다.

$$a_z(t) = D_z \omega^2 \sin(\omega t) \quad (16)$$

여기서 $D_z = 0.117\text{m}$, $\omega = 8.0\text{rps}$ 이며 해석은 시간간격 $\Delta t = 0.01$ 초로 하여 5.6 초까지 수행하였다.

그림 6 은 수치해석 결과로부터 얻어진 $x=0$, $y=0$ 인 지점의 자유수면 변위를 나타내고 있다. 본 수치해석 결과가 수직방향 유동을 잘 모사해 주는지 확인하기 위하여 해석결과를 미소변형을 가정한 선형이론 결과와 비교하였다. 그림 6 에서 볼 수 있는 바와 같이 진동초기에는 선형이론에 의한 결과와 유사하였으나 시간이 지남에 따라 진폭이 증가하고 선형이론에 의한 결과보다 최대점 발생시간이 늦어지는 경향을 보이고 있음을 확인하였다. 이는 강제진동 초기에는 비선형 효과가 미소하여 선형이론의 결과와 유사한 응답을 보이나, 시간이 지남에 따라 속도성분이 증가하고 비선형 효과가 커지므로 진폭이 커지고 진동주기가 증가한 것으로 사료된다. 또한 선형이론과 비교한 유체 자유수면의 변위를 보면 상향으로 변위가 발생하였을 경우에 큰 오차를 보이고 하향으로 변위가 발생하였을 경우에는 오차가 거의 발생하지 않음을 확인하였다. 이 또한 비선형 효과에 의해 상향 변위가 커진 것이며, 하향 변위가 차이가 없는 이유는 단부의 상향변위가 커져 부피를 일정하게 유지하기 위하여 상대적으로 변위가 작게 산정되었기 때문이라 사료된다.

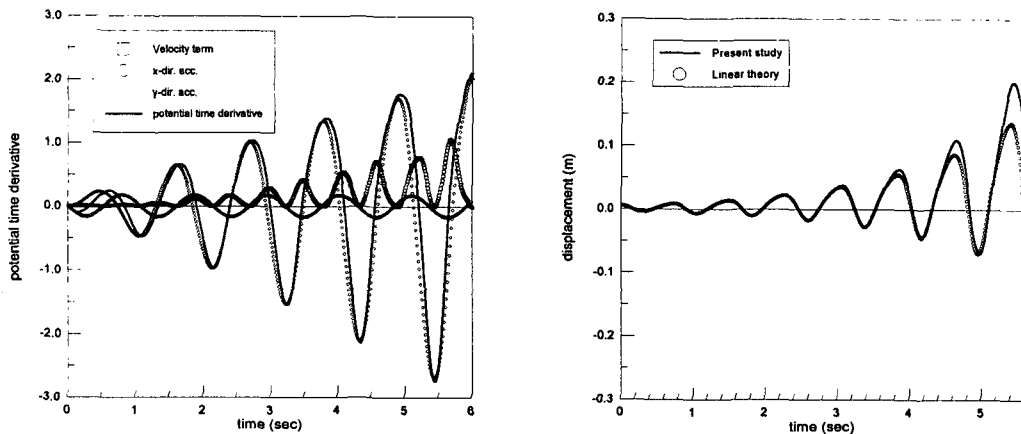


그림 5 수평방향 진동에 의한 포텐셜 시간변화율 그림 6 수직방향 강제진동에 의한 수면변위

5. 결 론

본 연구에서는 3차원 유체저장 구조물의 자유수면 거동을 해석하기 위해 경계요소를 이용하여 유체의 경계면을 모형화하였다. 유체저장 구조물은 구조물 벽면의 거동이 유체의 거동에 비해 미소하고 그 영향이 작아, 강성 경계조건을 적용하였다. 유체 자유수면은 큰 하중이나 공진 현상시 발생할 수 있는 대변형을 고려하여 비선형 경계조건을 적용하였다. 본 연구를 통하여 비선형 경계조건을 고려한 자유수면 3차원 유동해석을 수행함으로써 얻어진 결론은 다음과 같다.

1. 본 연구에서 개발된 경계요소를 이용한 해석기법은 유체영역의 내부를 이산화하지 않고 경계만을 이산화하여 효과적인 해석을 수행할 수 있음을 확인하였다. 또한 9 절점 꼭면 경계요소를 사용함으로써 적은 수의 요소로도 정확도가 높은 해를 얻을 수 있음을 확인하였다.
2. 개발된 수치해석기법의 검증을 위하여 미소 자유진동 해석과 큰 진폭의 수평 및 수직방향 강제진동 해석을 수행한 결과를 선형 이론 및 기존의 연구 결과와 비교하였다. 미소 자유진동 해석 결과, 자유수면 변위가 미소한 경우 비선형 효과가 작아 선형 이론에 의한 해법으로도 정확한 해를 도출할 수 있음을 확인하였다.
3. 수평방향 및 수직방향 강제진동 해석 결과, 본 해석기법이 자유수면의 대변형을 잘 모사해 줄 수 있음을 확인하였고, 이 경우 진폭이 커짐에 따라 비선형 효과가 커져, 유체 자유수면 경사가 급격해지고 변형형상 또한 비대칭적 형상으로 바뀌어 상부로의 변위가 상당히 커졌으며, 진동 주기도 점차 커짐을 알 수 있었다.

감사의 글

본 연구는 두뇌한국21 사업과 건설교통부 2001년도 건설기술연구개발사업의 연구비 지원으로 수행되었으며 이에 감사드립니다.

참고문헌

1. Currie, I. G., *Fundamental Mechanics of Fluid*, McGraw-Hill, New-York, 1974.
2. Stoker, J. J., *Water Waves*, Interscience Publishers, New York, 1954.
3. Kasuga, L., Sugino, R., and Tosaka, N., "Sloshing motion in a cylindrical container by boundary element method," *Boundary Element Methods*, Eds. M. Tanata, Q. Du and T. Honma, Elsevier, 1993, pp. 315-324.
4. Takayama, T., "Theory of transient fluid waves in a vibrated storage tank," *Report of the Port and Harbour Research Institute*, Vol. 15, No. 2, 1976, pp. 3-53.
5. Abramson, H. N., "The dynamic behavior of fluids in moving containers" NASA-SP-106, 1966.
6. Nakayama, T. and Washizu, K., "The boundary element method applied to the analysis of two-dimensional nonlinear sloshing problems," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1981, pp. 1631-1646.
7. Nakayama, T. and Washzu, K., "Nonlinear analysis of liquid motion in a container subjected to forced pitching oscillation," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1980, pp. 1207-1220.
8. 김문겸, 임윤목, 조성용, 조경환, "유한요소-경계요소 조합에 의한 3차원 유체저장 구조물의 주파수영역 응답 해석", *한국지진공학회 학술발표회 논문집*, Vol. 3, No. 1, 1999, pp. 275-283.