

원형 교각주위 흐름의 모의를 위한 천수방정식의 유한요소해석

최성욱¹⁾, ○한승규²⁾

1. 서론

원형 교각주변의 흐름에 관한 연구는 하천수리학 분야에서 세굴과 관련하여 큰 비중을 갖는 문제이다. 그러나 컴퓨터 계산능력의 제약으로 교각주변 흐름의 3차원적 특성을 수치모의 하는데 한계가 있으며 지금까지는 주로 모형실험에 의존해 왔다. 따라서 2차원 수치모의를 통해서 교각주변의 흐름특성을 파악하고 이를 세굴 연구에 활용하는 방안을 고찰해 볼 필요가 있다. 이와 같은 이유로 Yulistiyanto 등(1998)은 천수방정식을 해석하여 원형 교각주변의 흐름을 모의한 바 있다. 이 연구에서는 유한차분법인 MacCormack 기법을 사용하였으며 이동상 모의의 어려움 때문에 고정상에 대한 수치실험을 수행하였다. 또한 그 결과를 Yulistiyanto(1997)의 실험과 비교하여 수치모의의 타당성을 입증하였다.

본 연구에서는 천수방정식의 수치해석을 통하여 원형 교각주변에서의 수심평균된 2차원 유속장과 수심을 해석하였다. 수치모의 기법은 유한요소기법 가운데 하나인 상향가중 유한요소법(Petrov-Galerkin finite element scheme)을 사용하였다. 하천의 흐름해석에는 지형적 복잡성을 고려해야 하기 때문에 경계조건을 부여하는데 많은 어려움이 있으며 유한요소법은 이러한 경우 매우 효율적인 방법으로 알려져 있다. 또한 상향가중 유한요소법은 Galerkin 방법이 불연속적인 해에서 나타내는 수치진동을 감쇄시키는 기능도 포함하고 있다. 수치모의 결과의 검증을 위해서 Yulistiyanto 등(1998)의 수치실험과 동일한 조건에서 모의하였으며 그 결과를 비교하였다.

2. 수치모형

2.1 지배방정식

하상변동을 모의하기 위해 사용되는 방법은 대상 흐름의 규모에 따라 달라지지만 대부분의 경우 천수방정식은 적합한 모형으로 알려져 있다. 본 연구에서는 이러한 천수방정식을 지배방정식으로 사용하였으며 식(1)-(3)과 같다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_x q_y}{h} \right) + gh \frac{\partial z_0}{\partial x} + gn^2 \frac{q_x (q_x^2 + q_y^2)^{1/2}}{h^{7/3}} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q_x q_y}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q_y^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{\partial z_0}{\partial y} + gn^2 \frac{q_y (q_x^2 + q_y^2)^{1/2}}{h^{7/3}} = 0 \quad (3)$$

식(1)-(3)을 행렬 형태로 표현하면 다음과 같다.

1) 연세대학교 사회환경시스템공학부 부교수 (e-mail: schoi@yonsei.ac.kr)

2) 연세대학교 대학원 사회환경시스템공학부 박사과정 (e-mail: skhan77@yonsei.ac.kr)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} + D = 0 \quad (4)$$

여기서 t 는 시간, x 와 y 는 공간좌표계, h 는 수심, q_x 와 q_y 는 각각 x , y 방향으로의 단위 폭 당 유량, z_0 는 기준면으로부터 하상의 높이, n 은 Manning 조도계수, 그리고 g 는 중력가속도이다. 그리고 U 는 $[h, q_x, q_y]$ 로 이루어진 벡터 행렬이며, A , B , 그리고 D 는 계수행렬이다.

2.2 수치모형의 구성

가중잔차법(weighted residual method)을 이용하여 해석하기 위해서는 주어진 미분방정식이 약적분 형식(weak integral forms)으로 표현되어야 한다. 이를 위해서는 그림 1과 같이 주어진 미분방정식을 isoparametric 요소 좌표계로 변환하는 것이 일반적이다. 미분방정식의 좌표계를 (x, y, t) 라 할 때, 이에 대응하는 isoparametric 좌표계 (ζ, η, τ) 는 식(5)와 같으며 (x, y) 좌표계는 식(6), (7)과 같이 표현될 수 있다.

$$x = x(\zeta, \eta, \tau), \quad y = y(\zeta, \eta, \tau), \quad t = \tau \quad (5)$$

$$x(\zeta, \eta, \tau) = \sum_{\alpha=1}^n X_{\alpha}(\tau) N_{\alpha}(\zeta, \eta) \quad (6)$$

$$y(\zeta, \eta, \tau) = \sum_{\alpha=1}^n Y_{\alpha}(\tau) N_{\alpha}(\zeta, \eta) \quad (7)$$

여기서 α 는 절점, n 은 요소 절점의 개수, X_{α} 와 Y_{α} 는 요소 절점의 좌표, 그리고 N_{α} 는 다음과 같이 주어진 4절점 사각형 요소의 형상함수(shape function)이다. 계수 ζ_{α} 와 η_{α} 는 표 1과 같다.

$$N_{\alpha} = \frac{1}{4} (1 + \zeta_{\alpha}\zeta) (1 + \eta_{\alpha}\eta), \quad \alpha = 1, 2, 3, 4 \quad (8)$$

유한요소법에서 식(4)의 해 \hat{U} 는 다음과 같은 근사식으로 나타내어진다.

$$\hat{U} = N_{\alpha} U_{\alpha} \quad (9)$$

여기서 U_{α} 는 각 절점에서의 해이다. 식(4)를 수치모의하기 위해 가중잔차법에서 사용되는 약정식(weak form)으로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} W^T \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau} + A \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} + D \right) d\Omega = 0 \quad (10)$$

여기서 W 는 가중함수이고 Ω 는 전체 계산영역이다.

상향가중 유한요소법에서는 형상함수와 동일한 가중함수를 사용하는 것 대신에 불연속적인 시험함수(test function)를 사용한다. 2차원 개수로 흐름을 해석하기 위한 상향가중 유한요소법의 가중함수는 다음과 같이 주어진다(Katopodes, 1984).

$$N'_{\alpha} = N_{\alpha} + \epsilon_x A^T \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial x} + \epsilon_y B^T \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial y} \quad (11)$$

여기서 ϵ_x 와 ϵ_y 는 감쇄매개변수이며 위첨자 T 는 전치행렬을 의미한다. Akanbi(1986)는 아래와 같은 감쇄매개변수를 제안하였으며 본 연구에서는 Akanbi(1986)가 제안한 방법을 적용하였다.

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \frac{\Delta L}{[\sqrt{(q_x/h)^2 + (q_y/h)^2} + c] \sqrt{15}} \quad (12)$$

식(12)에서 $c = \sqrt{g\hat{h}}$ 이고, \hat{h} 는 요소의 도심에서 수심을 의미한다. 또한 ΔL 은 그림 1에 나타난 것과 같이 요소의 도심을 통과하는 유선방향 길이이다. 그러나 제안된 감쇄매개변수가 최적의 감쇄율을 정

해주는 것은 아니며 수치실험을 통하여 결정되어야 한다.

상향가중 유한요소법의 가중함수를 적용한 가중잔차법의 근사오차는 다음과 같이 표현된다.

$$f = \int_{\Omega} N^T \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau} + A \frac{\partial \hat{U}}{\partial x} + B \frac{\partial \hat{U}}{\partial y} + D \right) d\Omega \quad (13)$$

식(13)은 행렬 A , B , 그리고 D 가 수심과 유량의 함수로 이루어져 있고 가중함수 N' 역시 흐름변수에 관한 함수이기 때문에 비선형 방정식이다. 수치모의를 간략화하면서 동시에 시간에 관한 2차 정확도를 얻기 위하여 시간에 대한 미분항은 유한차분법의 중앙차분법을 사용하여 근사화시켰다. 또한 최종적으로 구성된 비선형 연립미분방정식은 Newton-Raphson 법을 사용하여 해를 구하였다.

3. 수치모형의 적용

3.1 수치모의 조건

본 연구에서 구성된 수치모형을 이용하여 교각주위의 흐름특성을 모의하였다. 수치모의 조건과 그에 따른 수리학적 매개변수들을 표 2에 제시하였으며 개략도는 그림 2에 도시하였다. 수치실험은 각기 유량을 달리한 세 가지 경우에 대하여 실시하였다. 이 가운데 실험 1은 Yulistiwa 등(1998)이 실시한 수치모의 조건과 동일한 조건을 사용하였다.

수치실험은 정류상태를 대상으로 수행하였으며 상류단과 하류단은 교각에 의한 영향을 배제할 수 있을 정도로 교각으로부터 충분히 먼 곳에 위치하여 있다. 상류단 경계조건은 횡방향 유량을 영으로 종방향 유량을 상수로 하여 주어진다. 하류단 경계조건도 상수로 유지될 수 있으며 등류수심으로 정하여진다. 벽에서의 경계조건은 벽에 수직방향의 유량이 영이며 접선방향은 활동조건(slip condition)을 만족시킨다. 계산을 수행하기 위한 격자망은 그림 3과 같이 구성하였다. 절점의 간격은 최소 4.4 cm에서부터 최대 53 cm 까지 이다.

3.2 수치모의 결과

표 2의 세 가지 실험조건에서 수치모의한 결과를 그림 4-6에 도시하였다. 그림 4는 실험조건 1에 대한 유속장(flow field)을 나타낸 것이다. 자유수면 흐름에서 원형교각에 의해 변화된 2차원 유속장의 특징 중 하나가 교각 주변에서 흐름의 가속현상이다. 그림 4는 원형교각의 측면에서 흐름이 가속되는 현상을 잘 보여주고 있다. 표 3은 각 실험조건에서 상류단 유입유속과 교각측면의 최대유속을 정리한 것이다. 수치모의 결과에 의하면 상류단 유입부에서의 유속에 비해 교각 측면의 최대유속이 약 1.8-1.9 배에 이르는 것으로 나타났다. 이와 같이 가속된 흐름은 바닥에서의 전단응력을 증가시키며 교각 주변에서 국부세굴의 주요 원인이 된다.

그림 5는 실험 1에서 흐름의 중심선과 교각 주변을 따라 수위의 변화를 도시한 것으로 하류단과의 수심차를 하류단 수심으로 무차원화 시켜 나타내었다. 흐름이 교각에 의해 장애를 받을 경우 교각 전면부에서는 선수파(bow wave)가 발생한다. 그림 5에는 이러한 선수파가 묘사되어 있다. 그림 5에서는 수심의 변화를 Yulistiwa 등(1998)의 수치모의 결과와 비교하였다. Yulistiwa 등의 연구결과는 실험과의 비교를 통해서 유속과 수위 모두 합리적인 결과임이 증명되었다. 본 연구에서 교각 전면부의 선수파는 약간 과소평가되고 있으며 교각측면의 수위 강하현상은 더욱 현저하게 나타나는 것을 알 수 있다. 이러한 격차는 교각 측면에서 유속이 과대산정 되었음을 의미한다. 또한 교각 후면에서 수위의 회복에 큰 차이를 보이고 있다. 일반적으로 선수파의 크기는 에너지 보존법칙에 의거하여 $U^2/2g$ 로 정해진다. 여기서 U 는 상류부 유입유속을 의미한다. 표 4는 각 실험조건에서 선수파의 크기와 $U^2/2g$ 값을 비교한 것이다. 표에서 알 수 있듯이 선수파는 정확하게 모의되는 것으로 나타났다. 그림 6은 실험 1에서 수치모의 영역 전체에 걸친 수심의 분포를 등심선으로 나타낸 것이다. 세 가지 수치실험 모두 교각의 전면부에서 수위가 상승하고 측면에서 감소하였다가 후면에서 다시 회복되는 유사한 분포

경향을 보였다. 또한 좌우 대칭의 형상을 갖으며 교각 근처에서 수심의 변화가 큰 것을 알 수 있었다.

4. 결론

본 연구에서는 수치모형을 이용하여 원형 교각주위의 2차원 흐름을 모의하였다. 지배방정식은 2차원 천수방정식을 사용하였으며 지배방정식을 이산화하기 위한 수치모의 기법으로 상향가중 유한요소법을 사용하였다. 수치모의는 세 가지 유량조건에 대하여 수행되었으며 각각에 대한 2차원 유속장과 수심 분포를 계산하였다. 이상의 연구 결과로부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 교각에 의해 발생하는 수위 변화를 수치모의 하였다. 에너지 보존법칙을 고려할 때 선수파의 크기는 정확하게 묘사되는 것으로 나타났다. 그러나 Yulistiyanto 등(1998)의 결과와 비교해 볼 때 교각 측면에서 수위 하강현상은 작게 모의되었으며 교각후면에서 수위 회복현상은 크게 나타났다.
2. 수치모의 결과 원형 교각측면에서 유속의 가속화 현상을 관찰할 수 있었다. 이와 같이 가속된 흐름은 하상에서 토사 유출량을 증가시키므로 세굴의 한 원인이 된다. 따라서 본 연구에서 모의된 흐름 양은 교각주위에서 발생하는 국부세굴을 연구하는데 중요한 자료로써 활용될 수 있을 것으로 보인다.

감사의 글

본 연구는 21세기 프론티어연구개발사업인 수자원의 지속적 확보기술개발사업단의 연구비지원(M1-01-KI-01-0001-01-K09-01-011-1-0)에 의해 수행되었습니다.

참고문헌

- Akanbi, A.A.(1986). "Hydrodynamic modeling of two-dimensional overland flow." Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, The University of Michigan, Ann Arbor, MI.
- Katopodes, N.D.(1984). "Two-dimensional surges and shocks in open channel." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 110(6), 794-812.
- Yulistiyanto, B.(1997). "Flow around a cylinder installed in a fixed-bed open channel." Ph.D. thesis, No. 1631, Ecole, Polytechnique Federale, Lausanne, Switzerland.
- Yulistiyanto, B., Zech, Y., and Graf, W.H.(1998). "Flow around a cylinder: shallow-water modeling with diffusion-dispersion." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 124(4), 419-429.

표 1. 4절점 사각형 요소에서 형상함수의 계수

α	1	2	3	4
ζ_{α}	-1	1	1	-1
η_{α}	-1	-1	1	1

표 2. 수치실험 조건

실험	원형교각		수로							
	D (m)	Re_D ($\times 10^5$)	B/L (m/m)	Q (m^3/s)	S_0 ($\times 10^{-4}$)	Manning 조도계수 n	U_∞ (m/s)	V_∞ (m/s)	h_∞ (m)	Fr
1	0.8	7.040	4/8	3.978	4.110	0.025	0.880	0.000	1.130	0.264
2	0.8	4.866	4/8	2.000	4.110	0.025	0.582	0.000	0.859	0.201
3	0.8	3.578	4/8	0.800	4.110	0.025	0.428	0.000	0.467	0.200

표 3. 상류단 유속과 교각 측면 최대유속의 유속 비

실험	상류단 유입유속(a) (m/s)	최대 유속(b) (m/s)	유속 비 (b/a)
1	0.878	1.663	1.894
2	0.582	1.089	1.871
3	0.428	0.771	1.801

표 4. 선수파의 크기 오차

실험	선수파의 크기 : $h - h_\infty$ (m)	$U^2/2g$ (m)	오차 (%)
1	0.042	0.039	7.692
2	0.018	0.017	5.882
3	0.009	0.009	0.000

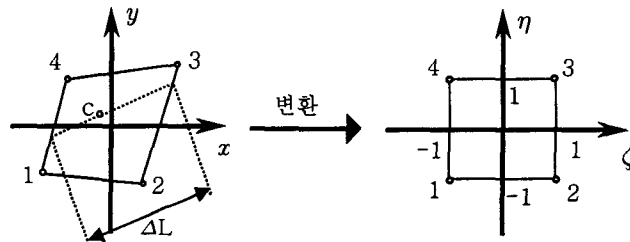


그림 1. Isoparametric 요소 좌표계로의 변환

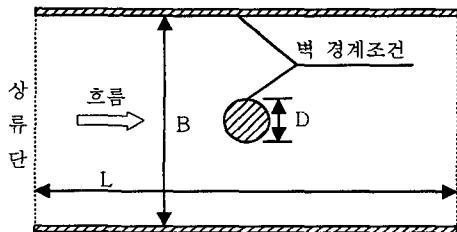


그림 2. 수치모의 대상 개략도

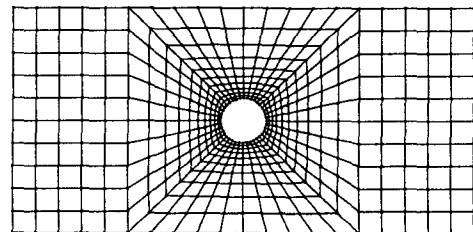


그림 3. 유한요소 격자망

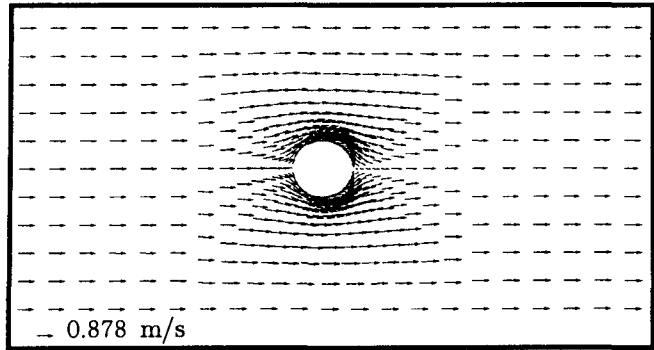


그림 4. 실험 1의 수치모의에 의한 유속 벡터

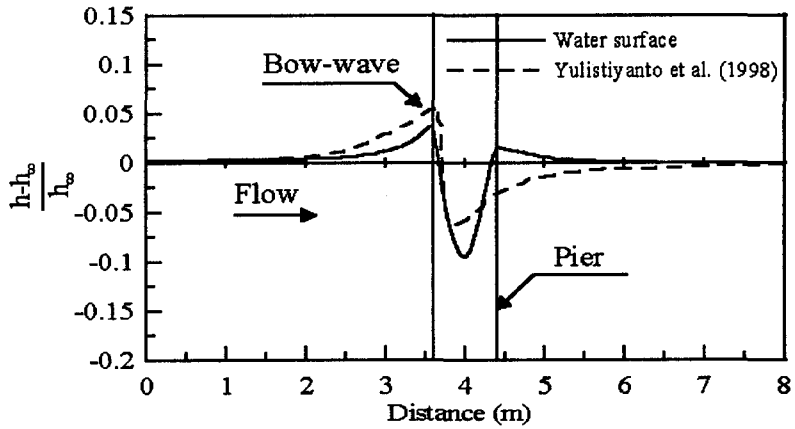


그림 5. 실험 1에서 수로 중심의 수위변화

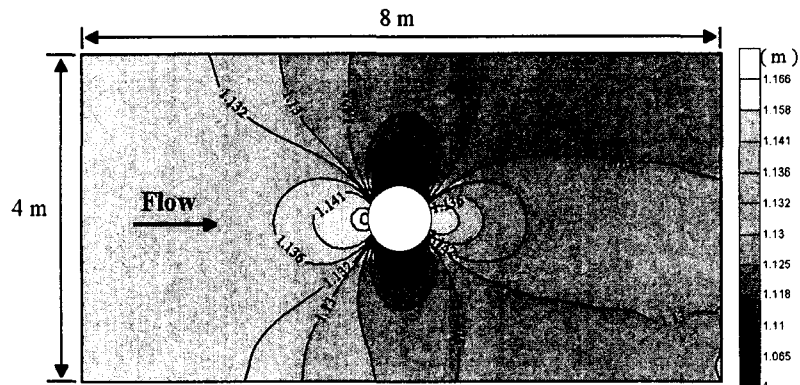


그림 6. 실험 1에서의 수심 분포도