ENO 기법 유한체적수치모형을 이용한 댐붕괴파 해석

○강민구* · 박승우**

Ⅰ. 서론

우리나라는 6월 중하순부터 7월 중하순에 걸친 장마와 8, 9월의 태풍내습에 따른 집중 호우에 의해 연강수량의 2/3 정도가 6~9월의 홍수기에 집중되기 때문에 여름에 홍수가 빈번하게 발생한다. 이러한 집중호우로 인해 발생되는 저수위의 상승을 방지하기 위한 상류댐의 방류는 하천수위를 급격하게 증가시켜 하천제방을 붕괴하거나 월류하여 제내지를 침수시킬 수 있으며, 집중호우로 인한 저수지의 붕괴는 하류부의 농경지 침수나 인명손실과 같은 홍수피해를 초래한다. 이러한 홍수피해를 경감시키기 위해서는 적절한 홍수예경보 시스템의 가동이나 하천제방이나 저수지 붕괴에 따른 제내지 및 하류부의 침수위, 침수시간, 침수범위 등의 예측을 통한 재난대책 수립이 필요하다.

일반적으로 자연하천의 흐름은 부드럽고 연속적인 상류형태로 형성이 되지만, 보나 급경사 하천에서는 사류도 존재하므로 상류와 사류가 공존하는 천이류 형태를 나타낸다. 자연하천에서는 저수지 수문조작, 댐이나 제방붕괴 등에 따라 발생하는 충격파와 같이 상류와 사류의 경계면이 이동하는 불연속적인 흐름이 발생하기도 하며, 이를 해석하는데는 많은 어려움이 있다(김 등 , 2001). 또한, 제방붕괴에 따라 제내지로 전달되는 흐름은 홍수터 및 농경지의 저류 및 감쇠, 구조물주위에서 흐름 등 복잡한 형태를 나타내므로 물리적인 양상을 수식으로 표현하는데 어려움이 있다.

댐붕괴파와 같은 불연속적인 흐름은 편미분방정식으로 구성된 지배방정식을 수치해석기법을 이용하여 해석하며, 지배방정식을 이산화하는 방법으로는 특성법(MOC), 유한차분법(FDM), 유한요소법(FEM), 유한체적법(FVM) 등이 사용된다. 이들 수치해석 기법중 유한차분법은 Taylor 급수전개를 이용하여 지배방정식을 이산화하므로 차분식이 항상 물리적 보존성을 갖는다고 할 수 없으며, 불규칙한 영역에 비정형격자를 적용하기 어려운 단점이 있다. 유한요소법은 물리적 보존성을 만족하고 복잡한 계산영역에도 적용이 가능하나 모형의 구동이 어렵고, 시간이 많이 소요되는 단점이 있다. 최근에는 질량과 운동량 보존의 물리적 의미를 충실히 표현할 수 있고 유한요소법과 같이 비구조적 격자에도 적용할 수 있는 유한체적법이 저수지 수문개방이나 댐붕괴와 같은 불연속적인 흐름 해석에 유용한 방법으로 알려져 있다(Zhao 등, 1994).

본 연구에서는 다른 기법들 보다 계산시간이 적게 소요되고, 실행이 용이하며, 정확도가 높다고 알려진 ENO 기법을 이용한 2차원 유한체적모형을 개발하여 모형의 적용성을 평가하였다. 개발된 모형을 해석해가 알려져 있는 1차원 댐붕괴해석에 적용하여 정확도 확보를 위해 사용한 고정

* 정회원, 서울대학교 대학원

** 정회원, 서울대학교 농업생명과학대학 교수

밀 기법인 수정 MUSCL과 minmod 경사제한자의 모의결과를 비교하였으며, 가상적인 2차원 댐 붕괴문제에 적용하여 모의 결과를 정성적으로 검토하였다. 또한, 개수로의 부정류 해석에 대한 모형의 적용성을 평가하기 위하여 말단이 폐쇄된 수로의 입구에서 정상파가 주어졌을 때 수위와 유속을 모의하여 해석해와 비교하였으며, 입구와 말단이 폐쇄된 수로에서 파의 진동을 모의하여 모형의 거동을 평가하였다.

Ⅱ. 모형의 개발

2.1 지배방정식

본 모형에서는 Navier-Stokes 방정식을 수심적분한 이차원 천수방정식을 지배방정식으로 사용하였다. 지배방정식은 연속 방정식과 운동량 방정식으로 구성되어 있으며, 벡터형식으로 표현하면 식 (1), 식 (2)와 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}=S;\quad U=[h,hu,hv]^T;\quad E=[hu,hu^2+gh^2/2,huv]^T \tag{1}$$

$$G=[hv,huv,hv^2+gh^2/2]^T;\quad S=[0,gh(S_{0x}-S_{fx}),gh(S_{0y}-S_{fy})]^T \tag{2}$$

여기서, h는 수심(m), u는 x 방향의 유속(m/s), v는 y 방향의 유속(m/s), S_{ox}는 x 방향의 경사, S_{oy}는 y 방향의 경사, S_{fx}는 x 방향의 마찰경사, S_{fy}는 y 방향의 마찰경사를 나타낸다.

마찰경사인 S_{fx}, S_{fy}는 Manning의 조도계수를 이용하여 계산하며, 식 (3)과 같다.

$$S_{fx}=\frac{n^2u\sqrt{(u^2+v^2)}}{h^{4/3}}\ ,\ S_{fy}=\frac{n^2v\sqrt{(u^2+v^2)}}{h^{4/3}} \tag{3}$$

2.2 지배방정식의 이산화

연속방정식과 운동량 방정식으로 구성된 지배방정식의 해를 유한체적법에 의해 구하기 위하여는 적분형태의 이산화 과정이 필요하다. 지배방정식을 Gauss 발산정리를 이용하여 적분형태로 나타내면 식 (4)와 같다.

$$\int_v\frac{\partial U}{\partial t}dv+\oint_s(F\cdot n)ds=\int_v Sdv \tag{4}$$

여기서, n은 유한체적 경계면에 수직한 법선벡터, v는 유한체적 영역, s는 유한체적 영역의 경계, F는 유한체적 경계의 flux를 나타낸다.

유한체적이 사각형일 경우 식 (4)에서 면적분항은 식 (5)와 같이 유한체적의 경계에서 flux의 합으로 근사화 할 수 있다.

$$\oint_s(F\cdot n)ds\approx\sum_{r=1}^{4}(F_r\cdot n_r)ds_r \tag{5}$$

여기서, ds_r은 각 경계의 길이를 나타내며, F_r은 각 경계의 flux를 나타낸다.

2.3 ENO 기법(Essentially Non-Oscillatory Scheme)

지배방정식에 대한 적분형태의 이산화방정식인 식(4)의 변수 U를 계산하기 위해서는 유한체적 경계면에서의 flux 값이 필요하며, 이를 계산하기 위해서는 유한체적 경계면에서 수심과 유속이 필요하다. 문제영역에서 충격파가 발생하면 유한체적의 경계면의 좌우측이 다른 값을 갖는 불연속적인 흐름이 발생하게 되며, 불연속점 부근에서는 수치진동이 발생한다. 이러한 수치진동을 방지하기 위하여 인공점성을 부여하는 방법이나 총변동량을 제한하는 TVD 기법 등이 적용되어 왔으나, 이들 방법들은 불연속구간에서 정확도가 떨어지는 단점이 있다. 최근에는 불연속구간에서 발생하는 수치진동을 방지하기 위하여 연속구간에서 추출한 흐름에 대한 정보를 사용하는 ENO

기법이 적용되고 있다. ENO 기법은 문제영역내에서 균일한 정확도가 유지되며 수치진동이 발생하지 않기 때문에 불연속구간이 포함된 흐름을 해석하는데 적합한 방법으로 알려져 있다. 본 연구에서는 불연속구간에서 발생하는 문제를 해결하기 위하여 계산시간이 적게 소요되고 실행이 쉬우며, 근사적 Riemann 해법과 비슷한 정확도를 보이는 LLF(Local Lax-Fridriechs)법을 바탕으로 하는 ENO 기법을 사용하였다.

LLF법을 이용한 유한체적 경계면에서의 flux 계산식은 식 (6)과 같다.

$$F_{LR}=\frac{1}{2}[F_L+F_R-\alpha(U_R-U_L)]\cdot n \tag{6}$$

여기서, F_{LR}은 유한체적 경계면의 flux, F_L은 유한체적 경계면 왼쪽의 flux, F_R은 유한체적 경계면 오른쪽의 flux, U_R은 유한체적 경계면 오른쪽의 변수 U이며, U_L은 유한체적 경계면 왼쪽의 변수 U를 나타낸다. α는 식 (1)의 Jacobian 행렬의 고유치를 사용하여 결정할 수 있으나, 본 연구에서는 식 (7)과 같이 국부 파속 (wave speed)의 절대값 중 가장 큰 값으로 간략화 시켰다(Nujic, 1995).

$$\alpha \geq \max|\lambda_{i,j}| \quad i=1,N_i, \quad j=1,N_j \tag{7}$$

$$\lambda=V_{i,j}+\sqrt{gh_{i,j}}$$

여기서, N_i, N_j는 각각 x, y 방향의 유한체적의 갯수, $V_{i,j}$는 유한체적 중앙의 유속을 나타낸다.

식 (6)에서의 변수 U_R과 U_L의 계산은 고정밀 기법(high resolution method)을 사용하였다. 고정밀 기법은 공간적으로 2차정도의 정확도를 얻고 불연속면 주위에 과도한 점성효과나 분산효과가 일어나지 않도록 하기 위하여 부드러운 영역에서는 적은 양의 점성을 주고, 불연속면 주위에서는 상대적으로 많은 양의 점성을 주는 방법으로 흐름제한자나 경사제한자를 사용한다. 본 연구에서는 고정밀 기법 중의 하나인 수정 MUSCL을 사용하였다. 수정 MUSCL은 일자원적 특성을 갖는 MUSCL의 단점을 보완하기 위하여 인접한 유한체적의 변수값을 이용하여 유한체적의 중심을 통과하는 식 (8)과 같은 평면식을 구하여 경계면 좌우측의 변수값을 계산한다(이와 이, 1998).

$$z=a_i(x-x_0)+b_i(y-y_0)+z_0 \tag{8}$$

여기서, a_i, b_i는 각각 평면식의 계수, x_0, y_0는 각각 유한체적 중심의 좌표, z_0는 유한체적 중심의 변수값, z는 유한체적 경계면의 변수값을 나타낸다.

2.4 시간축차

$t+\Delta t$ 시간의 유한체적 중심에서 변수 U는 시간에 대하여 2차정도의 모의를 위하여 predictor-corrector 절차를 이용하였으며, 시간간격 Δt는 수치적인 안정을 위하여 인접한 유한체적의 특성곡선과 계산하고자 하는 유한체적의 특성곡선이 만나는 순간보다 작게 주어야 한다. 양해법을 이용할 경우에는 해의 안정을 위해서 CFL 조건을 만족하도록 하여야 하므로 본 연구에서는 Alcrudo 등(1992)이 적용했던 식 (9)와 같은 CFL 조건을 이용하였다.

$$\Delta t \leq \frac{\min[dr(i,j)]}{2\max[(\sqrt{gh}+\sqrt{u^2+v^2})_{i,j}]} \tag{9}$$

여기서, $dr(i,j)$는 유한체적 각 변의 길이를 나타낸다.

2.5 경계조건

본모형에서 다루는 경계조건은 폐경계조건과 개경계조건이다. 폐경계조건은 경계면을 통한 흐

름이 없는 조건으로 경계면에서 수직한 방향의 유속성분이 없고, 접선방향의 유속만 있는 상태이므로 식 (10)과 같이 나타낼 수 있다.

$$h_R = h_L;\ u_R = -u_L;\ v_R = v_L \tag{10}$$

여기서, h_L, h_R은 각각 경계면 안밖의 수심, u_L, u_R은 각각 경계면 안밖의 수직방향 유속, v_L, v_R은 각각 경계면 안밖의 접선방향 유속을 나타낸다.

개경계조건은 경계면에서 수심이나 유량이 일정한 조건으로 식 (11)과 같은 유한체적 경계면의 특성식과 경계조건을 사용하여 나타낼 수 있다(Zhao 등, 1994).

$$u_R = u_L + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_L} - \sqrt{h_R}) \tag{11}$$

Ⅲ. 모형의 적용

3.1 댐붕괴파 모의

(1) 1차원 해석

댐붕괴파 모의에 대한 모형의 적용성을 평가하기 위하여 해석해가 알려져 있는 바닥경사와 바닥마찰이 없는 가상하도 구간에 대한 댐붕파의 전파를 모의하였다. 가상하도는 총길이 2,000 m 이고 하도 중앙에 수심이 10 m 인 댐이 설치되어 있으며, 하도구간의 수심은 5 m와 0.005 m인 경우 2가지를 고려하였다. 격자간격은 5 m 이며, 총격자수는 1,600 개로 구성하였으며, 모의결과와 해석해의 비교는 계산시작후 60 초 경과후의 자료를 사용하였다.

본 모형에서 사용한 고정밀기법인 수정 MUSCL의 적용성을 평가하기 위하여 경사제한자의 다른 형태인 minmod 제한자와 비교하였다. minmod 제한자는 유한체적 경계면에서 직선의 기울기를 minmod 함수를 사용하여 제한하는 방법이다(Nujic, 1995).

(그림 1)과 <표 1>은 h_1/h_0=0.5인 경우, 경사제한자별 모의결과와 해석해를 비교한 것이다. 각 제한자별 α에 따른 모의결과를 비교해보면, 최대유속과 이에 상응하는 Froude 수는 비슷한 값을 나타냈으나, 하도구간으로 퍼져나가는 충격파와 댐의 상류로 파져나가는 희석파의 도달거리의 모의결과와 해석해를 비교해 보면, $\alpha = 0.4|\lambda_{max}|$인 수정 MUSCL을 경사제한자로 사용한 경우의 모의결과가 다른 방법들 보다 해석해와 잘 일치하는 결과를 나타냈다.

(그림 2)와 <표 2>는 h_1/h_0=0.0005인 경우, 경사제한자별 모의결과와 해석해를 비교한 것이다. 각 제한자별 α에 따른 모의결과를 비교해보면, 최대유속과 이에 상응하는 Froude 수가 수정 MUSCL은 해석해 보다 다소 큰 결과를 나타냈으며, minmod 제한자는 해석해 보다 작은 결과를 나타냈다. 충격파와 희석파의 도달거리에 대한 모의결과와 해석해를 비교해 보면, $\alpha = 0.4|\lambda_{max}|$이고 수정 MUSCL을 경사제한자로 사용한 경우의 모의결과가 다른 방법들 보다 해석해와 잘 일치하는 결과를 나타냈다.

(2) 2차원 댐붕괴파 해석

2차원 댐붕괴파 모의에 대한 모형의 적용성을 평가하기 위하여 기존 모형들이 적용되었던 2차원 댐붕괴 모의에 적용하였다. 댐의 크기는 100m×200m이며, 댐의 초기 수위는 10m, 수로의 크기는 100m×200m이며, 수로의 초기 수위는 5 m, Manning 조도계수는 0.03, 바닥경사는 없는 것으로 하였다. 계산격자간격은 5 m 이며, 총 1,600 개의 격자로 구성하였으며, 댐파괴단면의 길이는 100 m 이며, 댐의 파괴는 대칭형과 비대칭형으로 구분하여 모의하였다.

(그림 3)~(그림 5)는 댐의 파괴시 수면고, 등수심도, 유속벡터도를 나타낸 것이다. (그림 4)는 댐파괴후 7.2 초 경과후 수심상태를 나타낸 것으로 댐 붕괴에 따른 희석파와 충격파를 잘 모의하

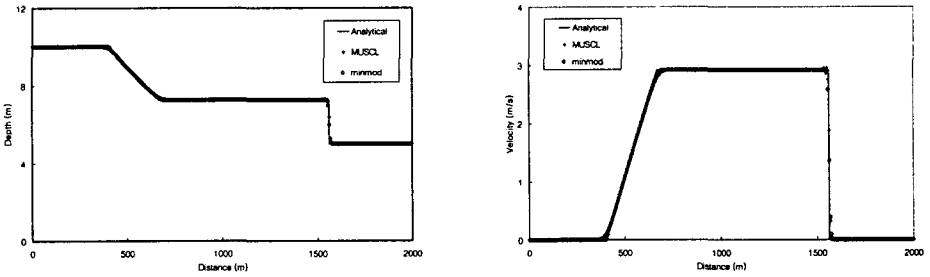
고 있으며, 기존의 연구결과와 비슷한 형태를 나타내고 있다(Fenema 등, 1990; Zhao 등, 1994).

<표 1> 흐름제한자별 모의결과와 해석해 비교 (h_1/h_0=0.5)

제한자	MUSCL			Minmod			해석해
α	$0.4\|\lambda_{max}\|$	$0.7\|\lambda_{max}\|$	$1.0\|\lambda_{max}\|$	$0.4\|\lambda_{max}\|$	$0.7\|\lambda_{max}\|$	$1.0\|\lambda_{max}\|$	
최대유속	2.95	2.92	2.92	2.92	2.92	2.92	2.92
최대유속 Froude No.	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35
충격파 도달거리	1567.50	1567.50	1572.50	1602.50	1602.50	1627.50	1561.00
희석파 도달거리	407.50	392.50	392.50	357.50	352.50	332.50	406.00

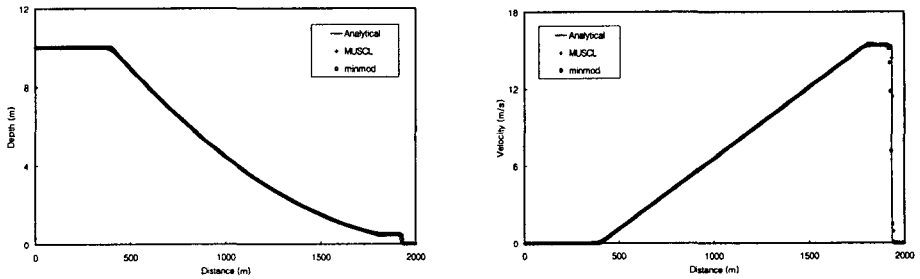
<표 2> 흐름제한자별 모의결과와 해석해 비교 (h_1/h_0=0.0005)

제한자	MUSCL			Minmod			해석해
α	$0.4\|\lambda_{max}\|$	$0.7\|\lambda_{max}\|$	$1.0\|\lambda_{max}\|$	$0.4\|\lambda_{max}\|$	$0.7\|\lambda_{max}\|$	$1.0\|\lambda_{max}\|$	
최대유속	15.48	15.52	15.53	15.38	15.38	15.39	15.40
최대유속 Froude No.	7.15	7.23	7.25	6.97	6.96	6.97	7.00
충격파 도달거리	1942.50	1937.50	1937.50	1947.50	1947.50	1947.50	1934.00
희석파 도달거리	402.50	392.50	392.50	347.50	327.50	317.50	406.00



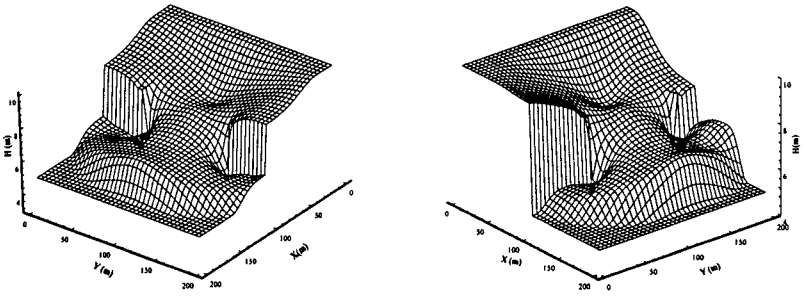
(a) 수위 (b) 유속

(그림 1) 1차원 댐붕괴파 해석해와 모의결과 비교(α= $0.4|\lambda_{max}|$, h_1/h_0=0.5, t=60 sec)



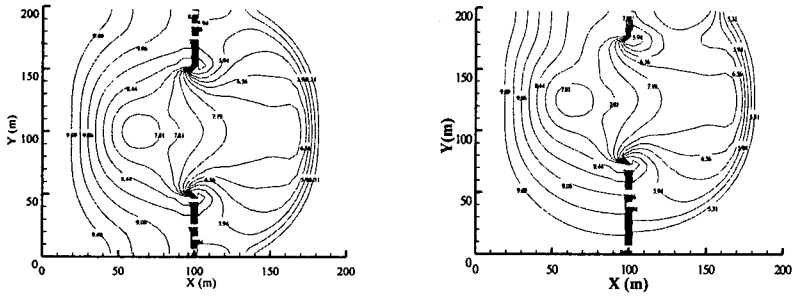
(a) 수위 (b) 유속

(그림 2) 1차원 댐붕괴파 해석해와 모의결과 비교(α= $0.4|\lambda_{max}|$, h_1/h_0=0.0005, t=60 sec)



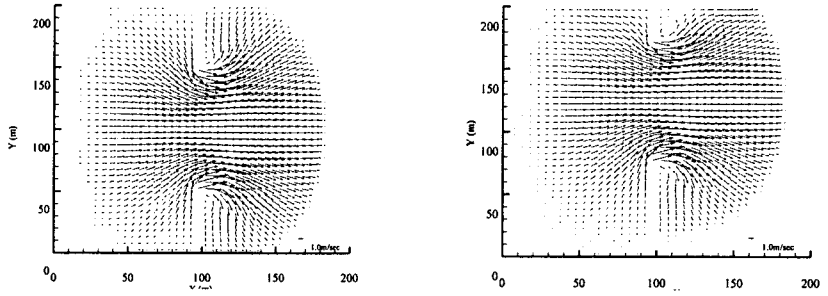
(a) 대칭형 (b) 비대칭형

(그림 3) 2차원 댐붕괴시 수심변화 (7.2초 경과후)



(a) 대칭형 (b) 비대칭형

(그림 4) 2차원 댐붕괴시 등수심도 (7.2초 경과후)



(a) 대칭형 (b) 비대칭형

(그림 5) 2차원 댐붕괴시 유속벡터 (7.2초 경과후)

3.2 개수로 부정류 해석

(1) 1차원 말단폐쇄 수로

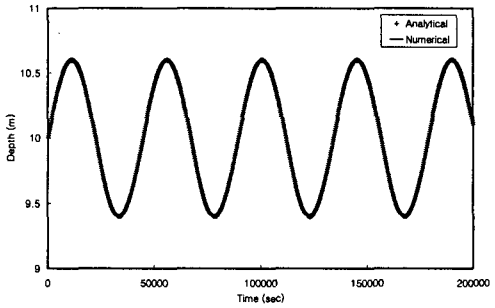
개발된 모형의 개수로 부정류해석에 대한 적용성을 평가하기 위하여 일차원 직사각형 수로의 입구에서 정상파(standing wave)가 주어질 경우의 수위와 유속을 모의하여 해석해와 비교하였다 국부이송과 바닥 마찰이 없을 경우 해석해는 식 (12), (13)과 같다.

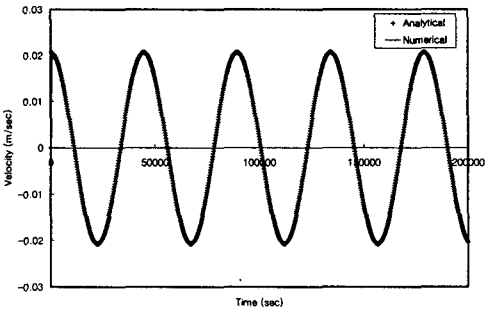
$$\eta(x,t) = a\frac{\cos[k(l-x)]}{\cos(kl)}\sin\omega t + d \tag{12}$$

$$u(x,t)=\frac{a}{d}\sqrt{gd}\frac{\sin[k(l-x)]}{\cos(kl)}\cos\omega t \tag{13}$$

여기서, a는 입사파 진폭(m), x는 수로입구로부터 거리(m), d는 평균수심 (m), l은 수로길이(m), ω는 T가 입사파 주기일 경우 $\frac{2\pi}{T}$로 정의되는 각속도(rad/sec), k는 $\frac{\omega}{\sqrt{gh}}$로 정의되는 파동수를 나타낸다.

해석해를 이용한 모형의 검정에 사용된 수로는 길이 5,000 m, 폭 400 m, 평균수심은 10 m이며, 만입구 정상파의 진폭은 0.6 m, 주기는 12.42 시간이다. 모형의 구동을 위한 격자간격은 100 m로 하여 총 200개의 격자로 구성하였으며, 계산시간간격은 2.0 초로 하여 200,000 초 동안 모의하였다. (그림 6)과 (그림 7)은 대상수로의 입구에서 2,550 m 떨어진 지점의 수심과 유속에 대한 해석해와 모의결과를 비교한 결과이며 모의결과와 해석해가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.





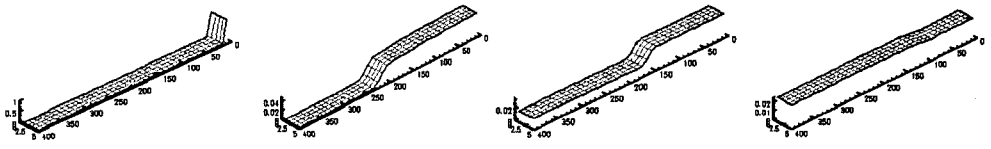
(그림 6) 수심에 대한 해석해와 모의결과 비교 (그림 7) 유속에 대한 해석해와 모의결과 비교

(2) 2차원 진동시험

개수로 부정류 해석에 대한 모형의 적용성을 평가하기 위하여 진동시험을 실시하였다. 유체의 점성을 무시할 경우 마찰이 없는 수로에서 초기조건에 특정한 수면변화를 줄 경우, 이로 인하여 수면진동이 무한히 반복되야 하므로 이를 이용하여 모형을 검증하였다.

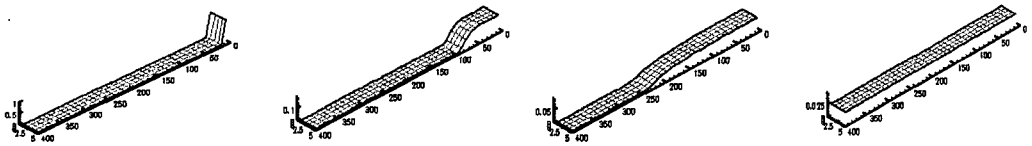
진동시험을 위한 조건은 길이 400m, 너비 5m, 바닥경사는 0.0인 가상수로를 설정하였다. 수로의 양끝단(x=0m, x=400m)은 막혀있는 상태이므로, 파가 양끝 단에 이르러서는 반사파가 생기게 된다. 수로의 초기조건은 0m≤x<10m인 지점에서는 수심이 1.0m이며, 이 지역 이외의 지점에서는 건조한 상태이다.

진동시험에 의한 결과와 마찰경사가 있는 경우를 비교하기 위하여 Manning 조도계수를 0.0인 경우와 0.03으로 구분하여 모의하였다. (그림 8)과 (그림 9)는 각각 조도계수가 0.0인 경우와 0.03인 경우 초기상태에서 시간에 따른 파의 진행상태를 나타낸 것이다. 두 조건을 비교해보면, 조도계수가 0.0인 경우에는 파의 진행이 빠르며, 조도계수가 0.03인 경우 10,000초 이후에 정상상태에 이르고 있으나, 조도계수가 0.0인 경우에는 계속 진동하고 있으며 그 이후에도 바닥 마찰이 없으므로 파가 계속 진동을 한다.



(a) 0sec (b) 50sec (c) 1000sec (d) 10000sec

(그림 8) 마찰경사가 없는 경우의 진동시험



(a) 0sec (b) 50sec (c) 1000sec (d) 10000sec

(그림 9) 마찰경사가 있는 경우의 진동시험

Ⅳ. 요약 및 결론

본 연구에서는 다른 기법들 보다 계산시간이 적게 소요되고, 실행이 용이하며, 정확도가 높다고 알려진 ENO 기법을 이용한 2차원 유한체적모형을 개발하여 댐붕괴 모의에 대한 모형의 적용성을 평가하였다. 개발된 모형을 해석해가 알려져 있는 1차원 댐붕괴해석에 적용하여 공간적으로 2차 정도의 정확도를 확보하기 위하여 사용한 고정밀기법인 수정 MUSCL과 minmod 경사제한자의 모의결과를 비교한 결과, 최대유속 모의결과는 제한자별 차이가 없으나 해당시간의 충격파와 희석파의 도달시간은 수정 MUSCL를 사용한 경우가 다른 방법들보다 해석해에 가까운 결과를 나타냈다. 또한, 가상적인 2차원 댐 붕괴문제에 적용하여 모의한 결과는 기존에 발표된 모형들과 유사한 결과를 나타냈다. 개수로의 부정류 해석에 대한 모형의 적용성을 평가하기 위하여 말단이 폐쇄된 수로의 입구에서 정상파가 주어졌을 때 수위와 유속을 모의하여 해석해와 비교했으며 모의결과는 해석해와 유사한 결과를 얻었으며, 입구와 말단이 폐쇄된 수로에서 파의 진동을 모의한 결과 바닥마찰이 없는 수로에서는 무한히 진동하며, 바닥마찰이 있는 수로에서는 시간이 경과후 진동이 멈추는 결과를 보였다.

참 고 문 헌

1. 김원, 한건연, 김상호(2001). 음해적 ENO 기법을 이용한 댐 붕괴류 해석, **대한토목학회 논문집**, 제 21권 제 4-B호, pp. 417~426.
2. 이길성, 이성태(1998). 충격파 모의를 위한 이차원 유한체적 비정상 흐름 모형, **한국수자원학회 논문집**, 제 31권 제 3호, pp. 279-290.
3. 이종욱, 조용식(2001). TVD 수치모형의 개발: Ⅱ. 천수방정식, **한국수자원학회논문집**, 제 34권 제 2호, pp. 187-195.
4. 이진희, 김경탁, 심명필(1996). 개수로에서의 2차원 부정류해석을 위한 유한체적법, **한국수자원학회지**, 제 29원 제 5호, pp. 173-184
5. Alcrudo, F., Garcia-Navarro, P., and Saviron, J. M.(1992). Flux difference splitting for 1D open channel flow equation, *Int. J. Numer. Methods in Fluids*, 14, pp. 1009-1018.
6. Fennema, R. J.,and Chaudhry M. H.(1990), Explicit methods for 2-D transient free-surface flows, *Jouranl of Hydraulic Engineering*, 116(8), pp. 1013-1034.
7. Nujic, M.(1995). Efficient implementation of non-oscillatory schemes for the computation of free-surface flows, *Journal of Hydraulic Research*, 33(1), pp. 101-111.
8. Zhao, D. H., and Shen H. W., Tabios Ⅲ G. Q., Lai J. S., and Tan W. Y.(1994). Finite-volume two-dimensional unsteady-flow model for river basins, *Journal of Hydraulic Engineering*, 120(7), pp. 863-883.