

TVD 기법을 이용한 불연속 흐름의 수치해석

A numerical analysis of a discontinuous flow with TVD scheme

전 정 숙*, 조 용 식**

1. 서 론

일반적으로 하천에서는 비교적 단순한 형태의 흐름이 발생되나 하천에 보가 있는 경우, 하폭이나 하상이 급격하게 변화하는 경우, 댐 여수로의 경우 및 댐붕괴의 경우 등에서는 상류(subcritical flow)와 하류(supercritical flow)가 혼재된 천이류가 발생하게 된다. 천이류의 경우에는 정수압 분포 가정을 할 수 없으므로 Boussinesq 방정식으로 해석해야 한다. Gharangik과 Chaudhry(1991)는 McCormack 기법과 Gottlieb와 Turkel(1976)에 의해 개발된 two-four 기법을 이용하여 Boussinesq 방정식을 수치해석 함으로써 천이류의 대표적 예인 도수를 모의하기도 하였다. Boussinesq 방정식의 수심에 대한 압력 변화항을 수치해석 하기 위해서는 3차 이상의 정확도를 갖는 수치기법을 이용해야 하므로 문제가 어려워진다. 그러나 최근 들어 급변류를 모의할 수 있는 모형들이 개발되어 이런 모형들을 이용하면 천수방정식으로 천이류를 해석할 수 있다.

Garcia-Navarro 등(1992)은 TVD(Total Variation Diminishing)-McCormack 기법을 이용하고, Meselhe 등(1997)은 Mesh 기법을 이용하여 Saint Venant 방정식을 풀어 1차원 개수로에서 발생하는 천이류를 해석하였다. 윤태훈과 이종욱(1999)은 Roe기법을 이용한 풍상차분기법으로 2차원 천수방정식을 풀어 도수를 해석하였다.

TVD기법은 불연속면에서 1차 정확도만 풀 수 있고 일반적인 2차 이상의 정확도를 갖는 수치기법은 불연속면에서 수치진동이 발생하게 된다. 이러한 수치진동을 제거하기 위한 방법으로는 인공점성(artificial viscosity)을 이용하는 방법(Younus와 Chaudhry, 1994; Molls와 Chaudhry, 1995)과 TVD조건을 만족하는 제한자(limiter)를 이용하는 방법(Jha 등, 1995; Fraccarollo와 Toro, 1995; 김원, 1999)으로 나눌 수 있다. 그러나 인공점성을 증가시키는 것은 진동과 발산을 억제하여 계산의 안정성을 높일 수는 있으나 과도하게 큰 계수의 사용은 전체적인 해에 영향을 미치므로 사용에 신중을 기해야 한다. 반면에 TVD조건을 만족하는 제한자를 이용하는 방법은 TVD기법의 특성인 단조성을 포함하고 있으므로 인공점성의 사용 없이도 불연속면에서 물리적으로 타당한 결과를 얻을 수 있다.

본 연구에서는 SUPERBEE형 흐름률 제한자(flux limiter)를 이용한 TVD기법을 천수방정식에 적용하여 평면 직선수로에서 발생하는 도수와 보를 월류하는 천이류, 경사진 수로에서 발생하는 천이류를 모의한다.

2. 지배방정식

Navier-Stokes 방정식에 정수압 분포 가정을 도입하고 수심 적분을 하면 천수방정식을 유도할 수 있다. 이 때 바람에 의한 응력과 전단응력항과 전항력의 항은 무시한다.

* 한양대학교 대학원 토목공학과 석사과정

** 한양대학교 공과대학 토목공학과 부교수

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} + gh \frac{\partial(h+z_b)}{\partial x} \\ = -\frac{1}{\rho} \tau_{xb} + \nu_t \left\{ \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hu)}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} + gh \frac{\partial(h+z_b)}{\partial y} \\ = -\frac{1}{\rho} \tau_{yb} + \nu_t \left\{ \frac{\partial(hv)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

식 (1) ~ 식 (3)에서 x , y 는 흐름방향과 하폭방향의 독립변수, h 는 전체 수심, u , v 는 각각 x , y 방향의 유속, g 는 중력가속도, z_b 는 하상고, ρ 는 밀도, ν_t 는 와점성계수이며, τ_{ib} 는 바닥의 전단응력항으로 Chaudhry(1993)에 의하면 Chezy계수 C 를 이용하여 식 (4)와 같이 표현할 수 있다.

$$\tau_{xb} = \frac{\rho g}{C^2} u \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \tau_{yb} = \frac{\rho g}{C^2} v \sqrt{u^2 + v^2} \quad (4)$$

식 (2)와 (3)의 중력항은 비보존형 형태로 표현되어 있으므로 이를 보존형으로 변환하고 다시 정리하면 천수방정식은 식 (5)와 같은 행렬을 이용한 벡터형태의 천수방정식으로 표현된다.

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = \frac{\partial \mathbf{E}_v}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_v}{\partial y} - \mathbf{G} \quad (5)$$

여기서 \mathbf{Q} 는 미지행렬, \mathbf{E} 와 \mathbf{F} 는 비점성 흐름량(invscid flux), \mathbf{E}_v 와 \mathbf{F}_v 는 점성 흐름량(viscous flux), \mathbf{G} 는 바닥마찰항(S_{fb})과 하상의 변화(S_{oi})를 나타내며 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{E}_v = \nu_t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial x} \\ \frac{\partial(hv)}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}_v = \nu_t \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial(hu)}{\partial y} \\ \frac{\partial(hv)}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_{fx} - S_{ox}) \\ gh(S_{fy} - S_{oy}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{ox} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad S_{oy} = -\frac{\partial z_b}{\partial y}$$

여기서 바닥마찰항의 Chezy계수 C 는 Manning 조도계수 n 으로 변환하여 사용하였다.

3. 유한차분기법

식 (5)의 시간미분항과 비점성 흐름량을 양해적으로 표현하면 식 (7)과 같이 정리된다.

$$Q_{i,j}^{n+1} = Q_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{i+1/2,j}^f - E_{i-1/2,j}^f) - \frac{\Delta t}{\Delta y} (F_{i,j+1/2}^f - F_{i,j-1/2}^f) \quad (7)$$

본 연구에서는 HLLC 기법의 구간 평균값을 적용한 TVD 기법을 이용하여 식 (7)을 수치해석하였다.

TVD 기법은 총변동량의 크기를 억제하여 불연속 수면에서 단조성과 2차 이상의 정확도를 확보할 수 있는 기법이다.

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad (8)$$

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (9)$$

일반적인 2차 이상의 정확도를 갖는 수치기법은 불연속면 인근에서 수치진동이 발생하게 되는데 이를 없애기 위해 TVD조건인 흐름률 제한자를 적용하였다.

$$E_{i+1/2,j}^{TVD} = \frac{1}{2} (E_{i,j} + E_{i+1/2,j}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \text{sign}(c_k) \phi_{i+1/2,j}^{(k)} \Delta E_{i+1/2,j}^{(k)} \quad (10)$$

식 (10)에서 $\phi_{i+1/2,j}^{(k)}$ 는 흐름률 제한자를 의미하는데, 본 연구에서는 이종욱 등(2001)이 권장한 다음과 같은 SUPERBEE형 제한자를 사용하였다.

$$\phi_{sz}(r, c) = \begin{cases} 1 & , \text{ for } r \leq 0 \\ 1 - 2(1 - |c|)r & , \text{ for } 0 < r \leq \frac{1}{2} \\ |c| & , \text{ for } \frac{1}{2} < r \leq 1 \\ 1 - (1 - |c|)r & , \text{ for } 1 < r \leq 2 \\ 2|c| - 1 & , \text{ for } r \geq 2 \end{cases} \quad (11)$$

또한, HLLC 방법은 HLL 방법을 수정한 방법으로 Fracccarollo와 Toro(1995)에 의해 2차원 천수방정식에 적용된 바 있다. HLL 방법은 2개의 전파속도 (S_L, S_R)를 반영하나 HLLC 방법은 중간파의 영향(influence of intermediate waves)을 설명하기 위하여 3개의 전파속도 (S_L, S_*, S_R)를 반영한다.

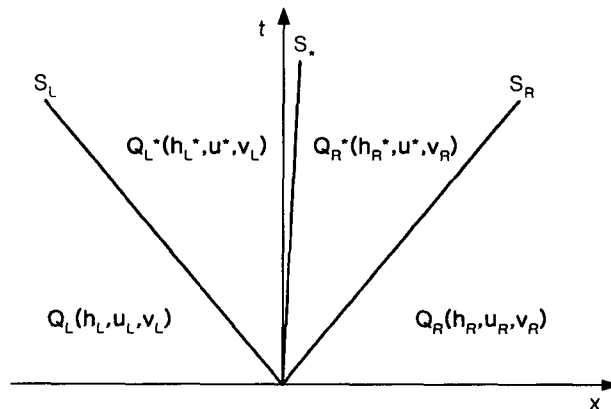


그림 1. HLLC기법의 구간 평균값

그림 1과 같이 3개의 전파속도 (S_L, S_*, S_R)는 구간 평균값을 Q_L, Q_L^*, Q_R^*, Q_R

로 나누며 전파속도의 값은 식 (12)와 같다.

$$\begin{aligned}
 S_L &= u_L - a_L q_L \\
 S_* &= \frac{S_L h_R (u_R - S_R) - S_R h_L (u_L - S_L)}{h_R (u_R - S_R) - h_L (u_L - S_L)} \\
 S_R &= u_R + a_R q_R
 \end{aligned} \tag{12}$$

Toro(2001)는 $S_L \sim S_R$ 의 중간 구간에서의 수심과 속도를 식 (13)과 같이 제안하였다.

$$\begin{aligned}
 h_* &= \frac{1}{g} \left[\frac{1}{2} (a_L + a_R) + \frac{1}{4} (u_L - u_R) \right]^2 \\
 u_* &= \frac{1}{2} (u_L + u_R) + a_L - a_R
 \end{aligned} \tag{13}$$

식 (12)와 식 (13)에서 a_L 와 a_R 는 각각 $\sqrt{gh_L}$ 와 $\sqrt{gh_R}$ 를 의미하고, q_L 과 q_R 은 식 (14)와 같이 쓸 수 있다.

$$q_K = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{(h_* + h_K) h_*}{h_K^2} \right]} & \text{if } h_* > h_K \\ 1 & \text{if } h_* \leq h_K \end{cases} \tag{14}$$

식 (14)에서 아래첨자 K 는 L 또는 R 이다.

세 개의 전파속도 값을 알면 식 (15)와 같이 HLLC 수치 흐름률을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 E_{i+1/2,j}^{HLLC} &= \begin{cases} E_L & , \text{ for } 0 \leq S_L \\ E_L^* = E_L + S_L (Q_L^* - Q_L) & , \text{ for } S_L \leq 0 \leq S^* \\ E_R^* = E_R - S_R (Q_R - Q_R^*) & , \text{ for } S^* \leq 0 \leq S_R \\ E_R & , \text{ for } 0 \geq S_R \end{cases} \\
 Q^* &= \frac{S_R Q_R - S_L Q_L + E_L - E_R}{S_R - S_L}
 \end{aligned} \tag{15}$$

본 연구에서 모의된 천이류의 경계조건은 상류(upstream)에서는 흐름이 사류이므로 $\lambda(u, u \pm c)$ 가 모두 양의 값을 가지며 3개의 특성치가 모두 흐름영역 내부로 전파된다. 따라서 모든 경계조건이 해석적으로 부여되어야 한다. 그러나 하류(downstream)에서는 상류이므로 $u - c$ 는 음의 값을 가지며 이 값만 내부로 전파된다. 그러므로 1개의 해석적 조건과 2개의 수치적 경계조건이 필요하다.

4. 수치모형의 적용

본 연구에서는 HLLC 기법의 구간 평균값을 적용한 TVD 기법을 이용하여 직선 수로에서 발생하는 천이류를 해석하였다. 첫 번째 모형은 $14.0 \text{ m} \times 0.45 \text{ m}$ 의 평면 직선수로에서 발생하는 도수를 모의하였다. 상류경계조건 $u = 1.82 \text{ m/s}$, $h = 0.064 \text{ m}$ 와 $h = 0.17 \text{ m}$ 의 하류경계조건을 적용하고 조도계수는 0.007, 와점성계수는 0.005를 사용하였다. 계산 결과는 그림 2와 같고, 이는 윤태훈과 이종욱(1999)이 풍상기법과 Roe 기법을 이용하여 수치모의한 결과와 비교적 잘 일치한다.

두 번째 모형은 보 월류시에 발생하는 천이류의 모의하기 위해 식 (17)과 같이 변화하는

가상적인 하상을 설정하였다. $u = 2.0 \text{ m/s}$, $h = 10 \text{ m}$ 의 상류경계조건과 $h = 7 \text{ m}$ 의 하류경계조건을 이용하였으며 조도계수는 0.015, 와점성계수는 0.005를 이용하였다. 수치모의 결과는 그림 3과 같으며 이는 Garcia-Navarro 등이 1992년에 TVD-McCormack 기법을 이용하여 1차원 경우를 해석한 결과 및 김원(1999)이 ENO 기법을 이용하여 해석한 결과와 비교할 때 타당한 결과를 보인다.

$$z = 5 \left\{ \sin \left[\pi \left(\frac{x-125}{750} \right) \right] \right\}^2 \quad (17)$$

세 번째 모형은 하상경사의 급변화에 의해 발생하는 천이류에 대한 모형이다. 하도길이가 1000 m이고 하폭이 8.0 m인 직선수로에서 하상경사가 0~300 m에서는 0.002, 300~600 m에서는 0.009, 600~1000 m에서는 0.001로 변화하는 경우이다. $u = 2.5 \text{ m/s}$, $h = 1.0 \text{ m}$ 의 상류경계조건과 $h = 2.5 \text{ m}$ 의 하류경계조건을 이용하였으며 조도계수는 0.015, 와점성계수는 0.005를 이용하였다. 이 경우도 김원(1999)이 ENO 기법을 이용하여 해석한 결과와 유사한 결과를 보인다. 본 연구에서 모의된 모형은 흐름 방향의 유속만 가지고 모든 구간에서 $v = 0.0 \text{ m/s}$ 이므로 흐름방향으로의 수면 변화만 나타난다. 따라서 흐름 방향에 대한 수위 변화를 1차원적으로 도시하여 수치모의 결과를 보였다.

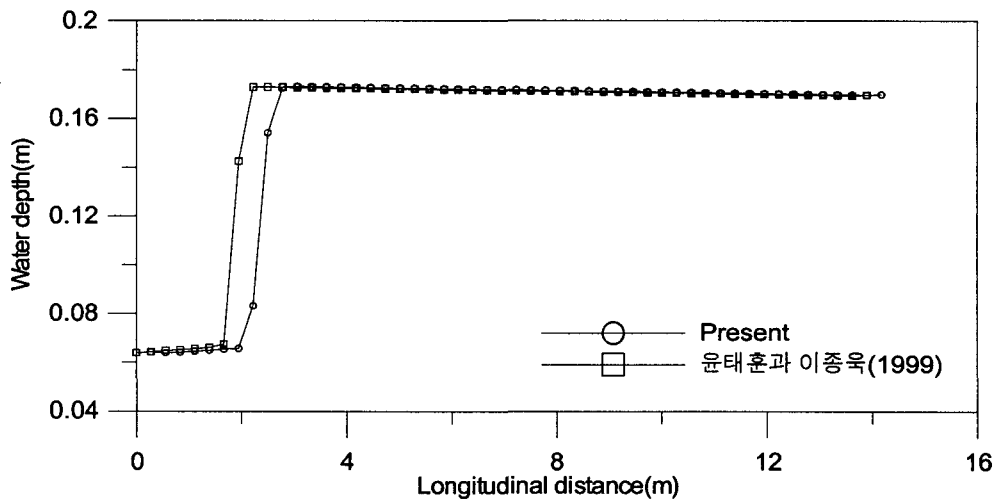


그림 2. 평면 직선수로에서 발생하는 도수의 해석 결과

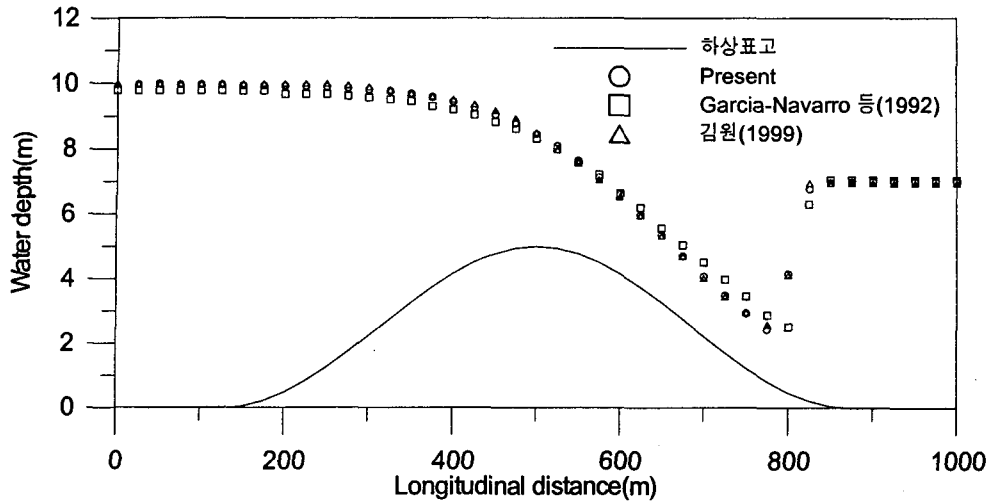


그림 3. 보를 월류하는 천이류의 해석 결과

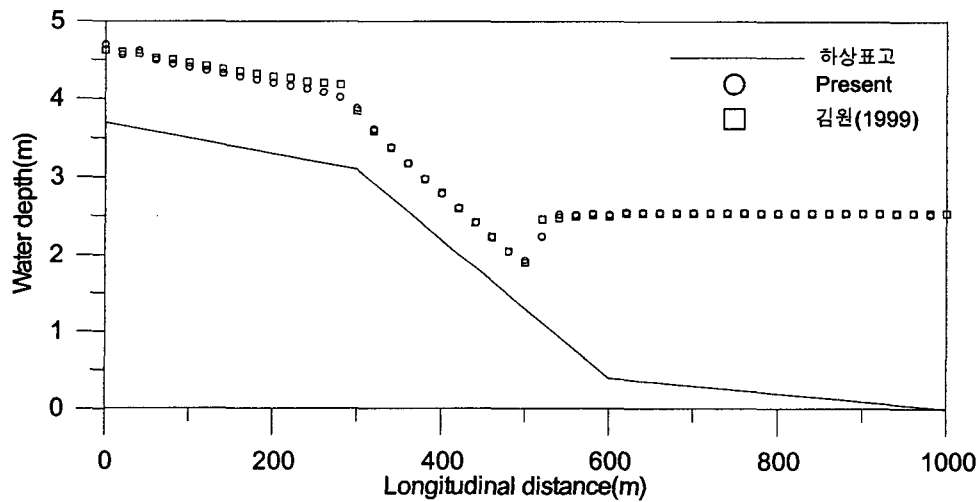


그림 4. 하상경사의 변화로 인해 발생하는 천이류의 해석 결과

5. 결론

본 연구에서는 TVD 기법을 이용하여 2차원 천수방정식을 해석함으로써 직선수로에서 발생하는 천이류를 모의하였으며 Riemann해를 계산하기 위하여 HLLC 기법을 이용하였다. 본 모형은 시간과 공간에서 2차 정확도를 가지며 불연속면에서 수치진동을 억제할 수 있다. 평면 직선수로에서 발생하는 도수와 하상이 변화하는 직선수로에서 발생하는 천이류를 모의하였는데, 윤태훈과 이종욱(1999)의 2차원 천수방정식을 수치모의한 결과나 Garcia-Navarro 등(1992)과 김원(1999)이 1차원 Saint Venant식을 수치모의한 결과와 유사한 결과를 보인다.

그러나 본 연구에서는 직선수로에서의 흐름을 모의하여 y방향 유속을 모두 0으로 고려하였으므로 완전한 의미의 2차원 해석이라고 하기는 어렵다. 따라서, 수로의 단면 변화까지 고려한 2차원 해석을 위해서는 단면 변화를 나타내는 y방향 방정식이 필요하다. 또한 이를 유한차

분법으로 해석하기 위해서는 변화하는 단면을 균일한 격자계로 전환하는 좌표변환이 수반되어야 한다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부 국가지정연구실사업(한양대학교 해안공학연구실)으로 수행되었기에 이에 사의를 표합니다.

참고문헌

- 김원 (1999). “고정확도 수치기법을 이용한 하천 천이류 해석모형의 개발.” 박사학위논문, 경북대학교.
- 김원(1999). “댐붕괴파 해석을 위한 수치기법 개발.” 연구보고서, 한국건설기술연구원
- 이종욱, 조용식, 윤광석, 윤태훈 (2001). “TVD수치모형의 개발: 1. 선형 이송방정식.” 한국수자원학회논문집, Vol. 34, No. 2, pp.177-186
- 윤태훈, 이종욱 (1999). “불연속흐름의 2차원 수치해석.” 한국토목학회논문집, Vol. 19, pp. 445-454.
- Chaudhry, M.H. (1993). *Open-channel flow*. Prentice Hall.
- Fraccarollo, L and Toro, E.F. (1995). “Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems.” *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 33, pp. 843-864.
- Garcia-Navarro, P., Alerudo, F. and Saviron, J.M. (1992). “1-D open channel flow simulation using TVD-McCormack scheme.” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 118, pp. 1359-1372.
- Gharangik, A.M. and Chaudhry, M.H. (1991). “Numerical simulation of hydraulic jump.” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 117, pp. 1195-1211.
- Gottlieb, D. and Turkel, E. (1976). “Dissipative two-four methods for time-dependent problem.” *Mathematics of computation*, Vol. 30, pp. 703-723.
- Jha, A.K., Akiyama, J. and Ura, M. (1995). “First and second-order flux difference splitting schemes.” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 121, pp. 877-884.
- Meselhe, E.A, Sotiropoulos, F. and Holly, F.M. (1997). “Numerical simulation of transcritical flow in open channels.” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, pp. 774-783.
- Molls, T. and Chaudhry, M.H. (1995). “Depth-averaged open-channel flow model.” *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 121, pp. 453-465.
- Toro, E.F. (1999). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer.
- Toro, E.F. (2001). *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. John Weley & Sons, Ltd.
- Younus, M. and Chaudhry, M.H. (1994). “A depth-averaged k- ϵ turbulence model for the computation of free-surface flow.” *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 32, pp. 415-444.