

TS(Takagi-Sugeno) Fuzzy Model의 V-type구간 Rational Bezier Curves를 이용한 Approximation개선에 관한 연구

나 흥 렬, 이 흥 규, *홍 정 화, **고 한 석
고려대학교 영상정보처리학과, *재활공학 연구센터, **고려대학교 전자공학과
전화 : 02-927-4724

Approximation Method for TS(Takagi-Sugeno) Fuzzy Model in V-type Scope Using Rational Bezier Curves

Hong Ryeul Na, Heung Kyu Lee, Jung Hwa Hong, Han Seok Ko
Dept. of Visual Information Processing, Korea University
E-mail : hrna@ispl.korea.ac.kr

Abstract

This paper proposes a new TS fuzzy model approximation method which reduces error in nonlinear fuzzy model approximation over the V-type decision rules. Employing rational Bezier curves used in computer graphics to represent curves or surfaces, the proposed method approximates the decision rule by constructing a tractable linear equation in the highly non-linear fuzzy rule interval. This algorithm is applied to the self-adjusting air cushion for spinal cord injury patients to automatically distribute the patient's weight evenly and balanced to prevent decubitus. The simulation results indicate that the performance of the proposed method is better than that of the conventional TS Fuzzy model in terms of error and stability.

I. 서론

현재 많은 분야에서 널리 사용되는 비선형 Fuzzy 제어 시스템 설계의 대부분은 TS(Takagi-Sugeno) Fuzzy Model에 기반하여 이루어지고 있다. 이러한 TS Fuzzy Model은 각 규칙의 결론부에 선형 방정식의 형태를 취하고 있으며, 각각의 선형 방정식은 본래의 비선형 시스템으로부터 얻어지고 있다.[1] 결국 우리가 원하는 비선형 구조를 얻기 위해서는 각 규칙 조건부에 해당하는 결론부 선형 방정식간의 추론으로 인한 Approximation이 잘 이루어져야 한다. 이에 대한 기존 방식은 일정 구간에 대해서는 결론부에 해당하는 Weight의 평균값으로 계산하는 방식이다. 하지만 갈수

록 시스템이 복잡해지고 비선형성이 강해지면서 기존 방식으로는 오차가 많이 발생하여 원하는 Model을 얻는데도 어려움이 따른다. 따라서 Approximation을 향상시켜 오차율을 줄이고 안정도를 높이는 연구가 요구된다. 이를 위해 Membership 함수 변형에 따른 적합도 변화를 통한 방법이 소개되었지만, 이 방법은 기존의 Fuzzy Set을 구성하는 것 외에 별도의 Fuzzy Set을 구성해야 하는 단점이 있어서 이를 구성하지 못하는 분야에 대해서는 적용에 한계가 있다.[2]

이에 본 논문은 적용에 한계가 주어지지 않은 Approximation 방법으로서 일정 구간 내 동일한 선형 방정식을 사용하는 것이 아니라 입력 값에 따른 적합한 새로운 선형방정식을 생성하고 이를 이용하여 추론하는 방법에 대해서 소개한다. 제안하는 방법은 비선형성이 높은 V-type구간에 대하여 고려한다. 이 구간에 대한 Approximation 개선을 위해 이미 CAD 설계 및 Computer Graphics에서 Curves 및 Surfaces 형성 Approximation 방법으로 널리 이용하고 있는 Rational Bezier Curves 이론을 이용한다.[4]

II장에서는 Approximation을 위해 적용한 Rational Bezier Curves에 대하여 소개하고, III장에서는 V-type 제어구간에 대하여 제안한 방식의 적용에 대하여 소개한다. IV장은 제안 방식에 대한 실험 결과를 보이며, V장에서 결론을 맺는다.

II. Rational Bezier Curves

2.1 Rational Bezier Curves

Rational Spline Curves는 두개의 Spline함수의 비로서 나타내는 것이며, Rational Bezier Curves는 식 (1)과 같다.

$$P(u) = \frac{\sum_{k=0}^n F_k p_k BEZ_{k,n}(u)}{\sum_{k=0}^n F_k BEZ_{k,n}(u)} \quad (1)$$

where $BEZ_{k,n}(u) = C(n, k)u^k(1-u)^{n-k}$,
 $C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $F_k = \frac{r_k}{1-r_k}$,
 $0 \leq r_k \leq 1$ (F_k = Weight Factor)

여기에서 $BEZ_{k,n}(u)$ 는 Bezier Blending 함수로서 Control Points(n+1개)가 Curves형성에 얼마만큼 영향을 주는지를 결정한다. 그리고 보통 End Points에서는 Weight Factor는 1로 간주한다. 왜냐하면 Curves는 End Points를 지나기 때문이다. 그러므로 Control Points가 3인 Rational Bezier Curves P(u)는 식 (2)와 같이 구하게 된다.

$$P(u) = \frac{p_0(1-u)^2 + F_1 p_1 2u(1-u) + p_2 u^2}{(1-u)^2 + F_1 2u(1-u) + u^2} \quad (2)$$

III. V-type 제어 구간에서의 제안한 TS Fuzzy Model Approximation 기법

3.1 V-type 구간 설정

비선형 제어구간 중에서 비선형성이 강한 구간은 V-type 구간이다. 따라서 전반적으로 오차율이 낮고 안정된 설계를 위해서는 비선형성이 강한 Approximation 방법이 개선되어야 할 필요가 있다. 비선형 제어구간 V-type 구간을 나누는 방법은 다음과 같다.[3]

$H_i = \{(x, y) | y = a_i x + b_i\}$ 가 i번째 규칙의 결론부를 만족하고 $\Omega_{i,j} = \text{proj}_x(H_i \cap H_j)$ 를 x축 위에 투영되는 H_i, H_j 의 교점이라 할 때, 식 (3)을 만족하면 V-type이라 한다.

$$\Omega_{i,j} \cap S_{i,j} \neq \emptyset \text{ and } \Omega_{i,j} \cap (C_i \cup C_j) = \emptyset \quad (3)$$

즉, 두 선형방정식 H_i 와 H_j 의 교차지점 위치가 두 Membership 함수가 서로 겹치는 구간 안에 포함될 때, Membership 함수가 겹치는 구간이 V-type 구간이다.(그림 1)

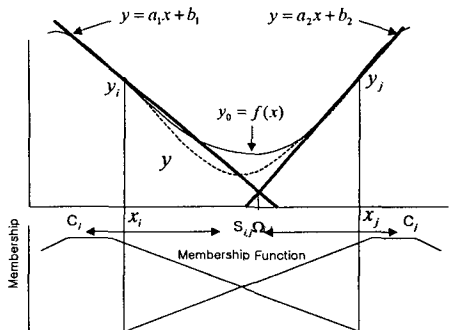


그림 3. V-type 구간

3.2 Rational Bezier Curves를 이용한 V-type 구간에서의 TS(Takagi-Sugeno) Fuzzy 추론 방법

Rational Bezier Curves의 Control Points를 V-type 구간에서의 시작점, 선형방정식의 교차점, 그리고 끝점 3점으로 잡고 각각 $p_0(x_0, y_0)$, $p_1(x_1, y_1)$, $p_2(x_2, y_2)$ 라고 했을 때, Bezier Curves는 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다. u는 보통 0에서 1사이로 한다.

$$x(u) = \sum_{k=0}^2 x_k C(2, k) u^k (1-u)^{2-k} \quad (4)$$

$$y(u) = \sum_{k=0}^2 y_k C(2, k) u^k (1-u)^{2-k}$$

예를 들어, 시작점 $p_0(0,10)$, 끝점 $p_2(10,10)$, 교차점 $p_1(7,2.5)$ 일 경우, Rational Bezier Curves는 그림 2와 같이 Weight Factor의 변화에 따라 다양하게 나타난다.

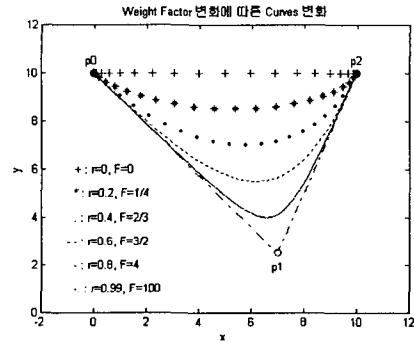


그림 4. Weight Factor 변화에 따른 Curves 변화

Rational Bezier Curves를 형성함으로써 참 값에 근접한 선형방정식을 얻을 수 있는 형태의 Curves를 획득할 수 있다. Fuzzy 규칙을 세울 때 교차점을 기준으로 해서 왼편과 오른편 구간에 적당한 Weight Factor를 부여한다. 이는 설계하려는 비선형의 형태가 교차점을 기준으로 왼편과 오른편이 다를 수 있다는 사실을 반영하며, 또한 원래 함수 형태에 근접한 형태를 얻기 위함이다. 이러한 형태에 대해서 구간별로 Fuzzy 규칙을 통해서 얻은 후, 입력 값이 주어졌을 때 주어진 위치에 대한 Rational Bezier Curves의 값들을 이용해 입력 값에 적합한 새로운 선형방정식을 생성하게 된다.

3.2.1 새로운 선형방정식 생성

먼저 선형방정식의 기울기를 위한 Rational Bezier Curves의 미분 값은 식 (5), (6)와 같이 구한다.

$$x(u) = \frac{x_0(1-u)^2 + Fx_1 2u(1-u) + x_2 u^2}{(1-u)^2 + F2u(1-u) + u^2} \quad (5)$$

$$y(u) = \frac{y_0(1-u)^2 + Fy_12u(1-u) + y_2u^2}{(1-u)^2 + F2u(1-u) + u^2}$$

$$x'(u) = \frac{(\sum_{k=0}^2 F_k x_k BEZ_{k,2}(u))' - (\sum_{k=0}^2 F_k x_k BEZ_{k,2}(u))}{(\sum_{k=0}^2 BEZ_{k,2}(u))^2}$$

$$y'(u) = \frac{(\sum_{k=0}^2 F_k y_k BEZ_{k,2}(u))' - (\sum_{k=0}^2 F_k y_k BEZ_{k,2}(u))}{(\sum_{k=0}^2 BEZ_{k,2}(u))^2}$$

(6)

where $u = \frac{|x-x_0|}{|x_2-x_0|}$,

$$F_k = \frac{r_k}{1-r_k}, \quad 0 \leq r_k \leq 1 \quad (F_k = \text{Weight Factor})$$

입력 값에 해당하는 선형방정식을 $y = ax + b$ 라 할 때 a와 b는 각각 식 (10), (11)과 같이 구한다.

$$a = \frac{y'(u)}{x'(u)} \tag{10}$$

$$b = y(u) - ax(u) \tag{11}$$

위에서 얻어진 임의의 입력 값에 해당하는 새로운 선형방정식을 이용해서 추론함으로써 결과값을 얻는다.

IV. 실험

다음은 일반적인 비선형 함수를 이용한 실험과 실제 장애인 및 장애인, 마비 환자들의 욕창방지를 위한 공기방석 제어 응용에 적용하여 제안한 알고리즘의 성능을 평가한다.

4.1 일반적인 비선형 함수 (실험 1)

1)비선형 함수: $f(x) = 0.1x^2 - 0.4x + 20$, $-15 \leq x \leq 15$

2)Membership 함수: 2개의 Gaussian Type(A_1, A_2)

3)TS Fuzzy Rule

Rule 1: If x is A_1 , Then $y_1 = -3.4x - 2.5$

Rule 2: If x is A_2 , Then $y_1 = 2.6x - 2.5$

원 비선형 함수에 대한 V-type구간(-15부터 15까지)에서의 기존 방식과 제안 방식과의 차이는 그림 3과 같이 나타난다.

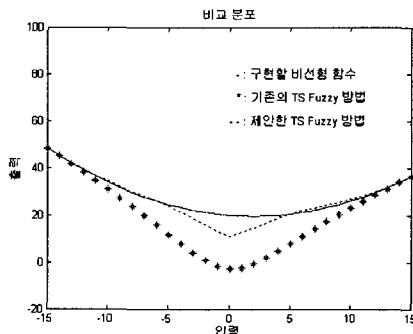


그림 5. 기존방식과 제안방식과의 비교 분포

4.2 공기방석 제어 분포 알고리즘 (실험 2)

갈수록 사회변화와 함께 늘어가는 거동이 불편한 노인 및 장애인, 마비 환자들의 욕창방지를 위한 공기방석(그림4. 참조)의 필요성이 대두된다. 이는 6개의 Class로 이루어졌으며, 각 Class별 내부 공기량 변화에 따른 적정 공기압의 감압을 통해 사용자 체압의 분포를 낮고 고르게 유지시키는 제어 방법이 필요하다. 제안된 알고리즘을 이와 같은 공기방석 제어에 적용하여 오차율을 줄임으로써 공기방석의 성능을 향상시켰다.

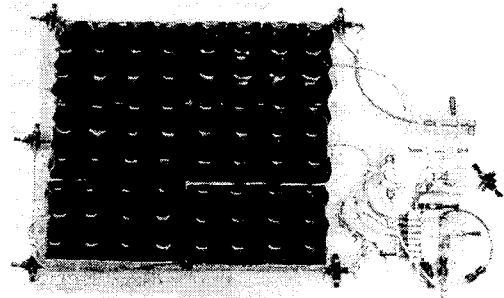


그림 6. 공기방석

1)비선형 함수

: 내부 공기압 변화와 감압 공기압과의 관계

2)Fuzzy Sets과 Gaussian Type MF

: 5개(Very Low, Low, Medium, High, Very High)

3)TS Fuzzy Rule

Rule 1: If x is Very Low, Then $y = (1/5)x$

Rule 2: If x is Low, Then $y = (1/2)x + 25$

Rule 3: If x is Medium, Then $y = (2/5)x + 23$

Rule 4: If x is High, Then $y = -(1/7.3)x + 75$

Rule 5: If x is Very High, Then $y = (1/5)x + 30$

실험 값을 기초로 설계한 위 조건으로 얻어낸 기존 방식에 대한 입출력 분포는 그림 5와 같다. 이는 지속적인 실험을 통해 신뢰도 높은 분포를 얻어낼 수 있다. 얻어진 분포에 근거하여 각 Class에 걸리는 내부 공기압 변화에 따라 적정한 공기압의 감압을 통해 사용자의 체압을 낮고 고르게 분포시킬 수 있다. 초기 공기압은 실험을 통해 얻어낸 가장 적정한 값인 40mbar로 하며, 주기적으로 공기방석을 초기화하여 내부 공기압을 적정수준으로 맞춘다.

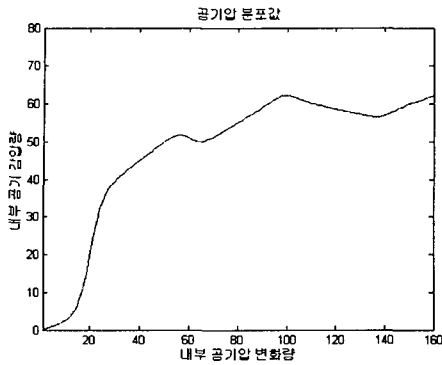


그림 7. 내부 공기압 변화에 따른 감압 공기압 분포(단위:mbar)

위 분포 중에서 V-type구간(85mbar부터 115mbar까지)에 대한 비선형 함수에 대해 기존 방식과 제안 방식과의 차이는 그림 6과 같이 나타난다.

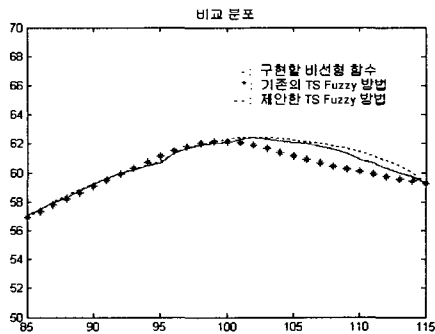


그림 8. 기존 방식과 제안 방식과의 비교 분포(단위:mbar)

위 실험 1,2에 대하여 기존 방식과 제안한 방식의 RMSE 값 비교는 표1과 같다.

	기존 방식	제안한 방식	Error 감소율
실험 1	48.4224	9.1925	81.01%
실험 2	2.3018 mbar	0.8961 mbar	61.07%

표1. 실험에 대한 RMSE 값 비교

실험결과와 RMSE값 비교를 통해 제안한 방식이 비선형 시스템에 따라 다소 차이가 있지만, 약 60-80%의 Error 감소율을 나타내고 있음을 알 수 있다.

V. 결론

비선형 TS Fuzzy Model 설계에 있어서 기존방식대로 각 규칙 결론부에 해당하는 선형방정식과 적합도의 평균값으로 결과 값을 추론하는 방식은 시스템이 복잡해지고 비선형성이 강해지면 오차가 크게 발생하였다.

이를 위해 비선형성이 강한 V-type구간에 대하여 본 논문에서 제안한 Rational Bezier Curves를 이용한 방식을 적용함으로써 고정된 선형방정식이 아니라 입력값에 따라 적절한 새로운 선형방정식을 생성하였고, 이를 토대로 적합도와의 평균값으로 추론함으로써 오차를 줄일 수 있었다. RMSE 값 비교를 통해 기존 TS Fuzzy Model 방식보다 비선형 Model에 따라 약 60-80%가량 Error가 감소한 향상된 Approximation 개선 방법임을 확인하였다. 또한 CAD 설계 및 Computer Graphics과 같은 Visual한 분야에 사용되고 있는 Curves 및 Surfaces 형성 Approximation 방법인 Rational Bezier Curves에 대하여 새로운 분야인 비선형 Fuzzy Model Approximation방법에 적용함으로써 새로운 분야에 대한 Rational Bezier Curves 성능에 대해 평가했다.

VI. Acknowledgement

본 연구는 IMT-2000 출연금 기술개발 지원사업 (01-PJ11-PG9-01HT00-0017)의 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌(또는 Reference)

- [1] Takagi, T and Michio Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control," IEEE Trans. Syst., Man, Cybern., vol.15, pp. 175-189, 1985.
- [2] P. Baranyi, T. D. Gedeon, and L. T. Koczy, "A General Interpolation Technique in Fuzzy Rule Bases with Arbitrary Membership Functions," IEEE Conf. Syst., Man, Cybern., vol.1, pp. 510-515, 1996.
- [3] H. Donald and B. M. Pauline, *Computer Graphics C Version*, Prentice Hall, 1996.
- [4] R. Babuska, C. Fantuzzi, U. Kaymak, and H.B. Verbruggen, "Improved Inference for Takagi-Sugeno Models," IEEE Proc, Fuzzy Systems, vol.1, pp.701-706, 1996.