랩어라운드 에지를 갖는 메쉬 연결망에서의 해밀톤 연결성

이 지 연, 박 경 욱, 임 형 석
전남대학교 전산학과
전화 : 062-530-0755 / 팩스 : 062-530-3439

Hamiltonian Connectedness of Mesh Networks with Wraparound Edges

Ji-Yeon Lee, Kyoung-Wook Park, Hyeong-Seok Lim
Dept. of Computer Science, Chonnam National University
E-mail : jrjjang@korea.com

Abstract

In this paper, we consider the hamiltonian properties of $m \times n$ mesh networks with two wrap-around edges. We describe sufficient condition that at least two edges should be added to a mesh to make it hamiltonian-connected. We propose two graphs, $M_1(m,n)$ and $M_2(m,n)$. These are obtained by adding one and two edges respectively in the $m \times n$ mesh. We show the hamiltonian properties of $M_1(m,n)$ and prove that $M_2(m,n)$ is hamiltonian-connected using the hamiltonian properties of $M_1(m,n)$.

1. 서론

병렬과 분산 계산을 위해서 개발된 다수의 중요한 상호 연결망 구조중에서 이차원 메쉬는 그의 간결함과 효율성으로 인해 널리 사용되고 있다. 메쉬는 구조가 간단하고 전체 노드의 수에 관계없이 한 노드에 직접 연결되는 노드의 수가 일정하고, 링크의 수가 비교적 적기 때문에 다른 연결 구조에 비해 확장성이 좋다는 장점을 가지고 있어서 많은 다중 컴퓨터 네트워크에서 사용되고 있다. 상호 연결망에서 중요한 특징 중 하나는 연결망이 해밀톤 사이클이나 경로를 갖느냐는 것이다. 연결망 구조가 해밀톤 사이클이나 경로를 가지고 있으면 노드나 통신 링크에 고장이 발생하더라도 링이나 선형배열을 쉽게 실현할 수 있어 파이프 라인 계산 등에 유용하다고 알려져 있다. 해밀톤 경로 문제는 그래프 이론 분야에서 널리 알려진 문제 중의 하나이다. 그래프에서 해밀톤 사이클은 모든 정점을 포함하는 사이클을 의미하며, 모든 정점을 오직 한번만 지나는 경로를 해밀톤 경로(*hamiltonian path*)라고 한다. 또한 모든 정점 쌍 s, t에 대해 s와 t를 연결하는 해밀톤 경로를 가진 그래프를 해밀톤 연결된(*hamiltonian -connected*) 그래프라고 한다. 일반적인 메쉬에서 해밀톤 사이클이나 경로를 찾는 문제는 NP-complete로서, 이들이 존재하기 위한 필요조건들이나 충분조건들이 알려져 있다. 최근에는 $m \times n$ 메쉬의 모든 행에 n개의 랩어라운드 에지가 추가된 $P_m \times C_n$ 그래프가 해밀톤 연결된 그래프임을 보였다.

본 논문에서는 2개의 랩어라운드 에지를 갖는 $m \times n$ ($m \geq 2$, $n \geq 3$, n 홀수) 메쉬에서의 해밀톤 성질을 고려한다. 먼저 메쉬가 이분 그래프인 성질을 이용하여 해밀톤 연결된 그래프로 만들기 위해 추가로 필요로 하는 에지의 수가 2개 이상임을 보이고, $m \times n$ 메쉬의 첫 행에 랩어라운드 에지(*wraparound edge*) 하나를 추가한 그래프에서의 해밀톤 성질을 보이며, 이를 토대로 $m \times n$ 메쉬의 첫 행과 마지막 행에 랩어라운드 에지를 추가한 메쉬가 해밀톤 연결된 그래프임을 보인다.

※ 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구(R05-2002-000-01443-0)지원으로 수행되었음.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 본 논문에서 필요로 하는 정의와 표기법에 대해 기술하고, 3절에서는 메쉬가 해밀톤 연결된 그래프가 되기 위해 2개 이상의 에지가 필요함을 보이고, 제안한 $m \times n$ 메쉬가 해밀톤 연결된 그래프임을 보인다. 마지막으로 4절에서 결론을 맺는다.

2. 정의 및 표기방법

$M_1(m,n)$는 $m \times n$ 메쉬의 첫 행에 랩어라운드 에지를 추가한 그래프로, 정점 집합 $V=\{v_j^i \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$이고, 에지 집합 $E=E_r \cup E_c$이다. 여기서, $E_r=\{(v_j^i, v_{j+1}^i) \mid 1 \le i \le m, 1 \le j < n\} \cup \{(v_n^1, v_1^1)\}$, $E_c=\{(v_j^i, v_j^{i+1}) \mid 1 \le i < m, 1 \le j \le n\}$이다. $M_2(m,n)$는 $m \times n$ 메쉬의 첫 행과 마지막 행에 랩어라운드 에지를 추가한 그래프로, 정점 집합 $V=\{v_j^i \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$이고, 에지 집합 $E=E_r \cup E_c$ 이다. 여기서, $E_r=\{(v_j^i, v_{j+1}^i) \mid 1 \le i \le m, 1 \le j < n\} \cup \{(v_n^1, v_1^1), (v_n^m, v_1^m)\}$, $E_c=\{(v_j^i, v_j^{i+1}) \mid 1 \le i < m, 1 \le j \le n\}$이다. E_r에 포함된 에지를 행 에지(*row edge*)라 하고, E_c에 포함된 에지를 열 에지(*column edge*)라 한다.

행 i에 속한 정점을 $R(i)=\{v_j^i \mid 1 \le j \le n\}$, 열 j에 속한 정점은 $C(j)=\{v_j^i \mid 1 \le i \le m\}$라 하며, $R(i{:}i')=\bigcup_{i \le k \le i'} R(k)\ (i \le i')$, $C(j{:}j')=\bigcup_{j \le k \le j'} C(k) (j \le j')$이라 한다.

메쉬는 이분 그래프임으로 모든 정점은 이분 정점 집합 B와 W로 나눌 수 있다. 정점 v_j^i는 $i+j$가 짝수이면 검정 정점 홀수이면 흰색 정점이라 하고, 검정 정점의 집합을 B, 흰색 정점의 집합을 W라고 한다. 그리고 메쉬는 B와 W사이에 에지를 갖는 이분 그래프이다.

$M_1(m,n)$과 $M_2(m,n)$는 $R(i{:}i') \cap C(j{:}j')$로 인해 유도되는 부그래프는 $P_{i'-i+1} \times P_{j'-j+1}$ 메쉬를 스패닝 부그래프로 가진다. 메쉬에서 분지수가 2인 정점을 꼭지 정점이라고 하고, 다음과 같은 메쉬의 해밀톤 성질이 알려져 있다.

보조정리 1[1]. m, n이 모두 2이상인 임의의 정수일 때, 다음이 성립한다.

(a) mn이 짝수이면, $m \times n$ 메쉬는 한 꼭지 정점과 색이 다른 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

(b) mn이 홀수이면, $m \times n$ 메쉬는 한 꼭지 정점과 색이 같은 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

$R(i{:}i') \cap C(j{:}j')$으로 유도되는 $m \times n$ 메쉬의 부그래프를 $M\langle X \rangle$라고 쓰고, $M\langle X \rangle$의 두 정점 s, t을 잇는 해밀톤 경로가 존재하면 그 해밀톤 경로를 $H[s,t \mid X]$라고 한다. 그래프의 경로는 에지의 집합으로 간주한다.

3. $M_2(m,n)$의 해밀톤 연결성

이 절에서는 먼저 $m \times n$ 메쉬가 해밀톤 연결된 그래프가 되기 위해 추가되어야 할 에지가 2개임을 증명한다.

정리 1. 메쉬를 해밀톤 연결된 그래프가 되도록 하기 위해 추가되어야 할 에지는 2개 이상이다.

증명 (a) mn이 짝수인 경우, $|B|=|W|$이므로 흰색 정점들 사이의 해밀톤 경로는 반드시 두 개의 검정 정점을 연속으로 지나야 하고 검정 정점들인 경우는 두 개의 흰색 정점들을 연속으로 지나야만 한다. 따라서 같은 색상의 정점들을 잇는 에지가 각각 하나씩 필요하다. (b) mn이 홀수인 경우, $|B|=|W|+1$이므로 서로 다른 색을 잇는 해밀톤 경로는 반드시 두 개의 검정 정점을 연속으로 지나야 한다. 따라서 검정 정점들 사이에 하나의 에지를 추가되어야 한다. 흰색 정점들 사이의 해밀톤 경로는 검정 정점을 쌍으로 하는 에지를 반드시 두 번 지나야 한다. 따라서 검정 정점을 쌍으로 하는 에지가 반드시 두개 이상은 필요하다.

보조정리 2. $m \ge 2$, $n \ge 3$ (n은 홀수)인 $M_1(m,n)$에서 꼭지 정점 s (v_1^m 또는 v_n^m)와 임의의 정점 t 사이의 해밀톤 경로가 존재한다.

증명 $s=v_1^m$이라고 가정하자.

경우 1 m이 짝수인 경우

s와 다른 색의 정점 t를 잇는 해밀톤 경로는 보조정리 1(a)에 의해 존재한다. s와 같은 색의 정점 t는, **(1)** $t \in C(2{:}n)$인 경우, $P=(v_1^m, v_1^{m-1}, \cdots, v_1^2, v_1^1, H[v_n^1, t \mid C(2{:}n)])$로 보조정리 1(a)에 의해 해밀톤 경로가 존재하고, **(2)** $t \in C(1)$인 경우는 $P=(v_1^m, v_2^m, \cdots, v_{n-1}^m, v_n^m, v_n^{m-1}, v_n^{m-2}, \cdots, v_n^2, v_n^1, H[v_1^1, t \mid R($

$1{:}m-1) \cap C(1{:}n-1)])$로 해밀톤 경로가 존재한다.

경우 2 m이 홀수인 경우

s와 같은 색의 정점 t를 잇는 해밀톤 경로는 보조정리 1(b)에 의해 존재한다. s와 다른 색의 정점 t는 **(1)** $t \in C(2{:}n)$인 경우 $P=(v_1^m, v_1^{m-1}, \cdots, v_1^2, v_1^1, H[v_n^1, t|C(2{:}n)])$로 보조정리 1(a)에 의해 해밀톤 경로가 존재하고, **(2)** $t \in C(1)$인 경우는 $P=(v_1^m, v_2^m, \cdots, v_{n-1}^m, v_n^m, v_n^{m-1}, v_n^{m-2}, \cdots, v_n^1, H[v_1^1, t|R(1{:}m-1) \cap C(1{:}n-1)])$로 해밀톤 경로가 존재한다.

보조정리 3. $m \geq 1$, $n \geq 3$ (n은 홀수)인 $M_1(m, n)$에서 $s, t \in R(m)$이고 s와 t가 서로 인접할 때, s와 t를 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

증명 $s=v_j^m$ $(1 \leq j < n)$이고 $t=v_{j+1}^m$라고 가정한다.

$m=1$일때 링의 형태를 가지므로 $P=(s, v_{j-1}^m, \cdots, v_2^m, v_1^m, v_n^m, v_{n-1}^m, \cdots, v_{j+2}^m, t)$와 같은 해밀톤 경로가 존재한다. $m \geq 2$인 경우, $P=(s, v_{j-1}^m, \cdots, v_2^m, v_1^m, H[v_1^{m-1}, v_n^{m-1}|R(1{:}m-1)], v_n^m, v_{n-1}^m, \cdots, v_{j+2}^m, t)$로 해밀톤 경로가 존재한다. $H[v_1^{m-1}, v_n^{m-1}|R(1{:}m-1)]$은 m이 2인 경우 $P=(v_1^{m-1}, v_2^{m-1}, \cdots, v_{n-1}^{m-1}, v_n^{m-1})$로, m이 2보다 큰 경우는 보조정리 2에 의해 해밀톤 경로가 존재한다.

보조정리 4. $m \geq 2$, $n \geq 3$ (n은 홀수)인 $M_1(m, n)$에서 v_1^m(또는 v_n^m)과 같은 색을 가지는 정점 s (v_j^m, $1 < j < n$)와 v_j^i($1 \leq i \leq m-1$)을 제외한 임의의 정점 t사이의 해밀톤 경로가 존재한다.

증명 s는 항상 홀수 열에 위치하게 된다.

경우 1 $t \in W$인 경우

$P=(H[s, v_1^1|C(1{:}j)], H[v_n^1, t|C(j+1{:}n)])$로 해밀톤 경로가 존재한다. $H[s, v_1^1|C(1{:}j)]$와 $H[v_n^1, t|C(j+1{:}n)]$는 m이 짝수인 경우는 보조정리 1(a), m이 홀수인 경우는 보조정리 1(b)에 의해 해밀톤 경로가 존재한다.

경우 2 $t \in B$인 경우

$P=(H[s, v_j^1|C(1{:}j)], H[v_{j+1}^1, t|C(j+1{:}n)])$로 해밀톤 경로가 존재한다. $H[s, v_j^1|C(1{:}j)]$과 $H[v_{j+1}^1, t|C(j+1{:}n)]$은 보조정리 1에 의해 각각 해밀톤 경로가 존재한다.

$M_2(m, n)$에 행 1부터 행 $i < m$까지 임의의 정점 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P가 존재한다고 가정하자. P 경로 중에서 행 i에 포함된 행 에지 (x, y)를 선택하고 행 $i+1$에 x, y와 인접한 두 정점을 x', y'라고 하면, 행 $i+1$부터 행 m까지는 보조정리 3에 의해 x'와 y'을 잇는 해밀톤 경로 P'가 존재한다. 행 i에 포함된 행 에지 (x, y) 대신 열 에지 $(x, x'), (y, y')$를 추가하면 $M_2(m, n)$의 해밀톤 경로를 생성할 수 있다. 이를 P와 P'의 경로 합병이라고 말하기로 한다.

정리 2. $m \geq 2$, $n \geq 3$ (n은 홀수)인 $M_2(m, n)$는 해밀톤 연결된(*hamiltonian-connected*) 그래프이다.

증명 다음의 경우들로 나누어 임의의 두 정점 s, t 간에 해밀톤 경로가 존재함을 보인다.

경우 1 $s, t \in R(i)$ $(1 \leq i \leq m)$, $s=v_j^i$, $t=v_k^i$라 가정한다.

경우 1.1 s, t가 인접한 경우, $M\langle R(1{:}i)\rangle$와 $M\langle R(i+1{:}m)\rangle$로 나눈다. $M\langle R(1{:}i)\rangle$는 보조정리 3에 의해 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P가 존재함으로 $M\langle R(i+1{:}m)\rangle$에 존재하는 해밀톤 경로 P'와의 경로 합병으로 해밀톤 경로를 생성할 수 있다.

경우 1.2 s, t가 인접하지 않은 경우,

경우 1.2.1 s또는 t가 v_1^i와 같은 색인 경우, $M\langle R(1{:}i)\rangle$와 $M\langle R(i+1{:}m)\rangle$로 나눈다. $M\langle R(1{:}i)\rangle$에서는 보조정리 4에 의해 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P가 존재함으로 $M\langle R(i+1{:}m)\rangle$에 존재하는 해밀톤 경로 P'와의 경로 합병으로 해밀톤 경로를 생성할 수 있다.

경우 1.2.2 s, t가 v_1^i의 색과 다른 경우, $s, t \in R(1)$, $s, t \in R(2)$, $s, t \in R(i) (3 \leq i \leq m-3)$으로 나누어 증명한다. **(1)** $s, t \in R(1)$인 경우, $M\langle R(1{:}2)\rangle$와 $M\langle R(3{:}m)\rangle$로 나누는데, $M\langle R(1{:}2)\rangle$에는 $P=(H[s, v_1^1|R(1{:}2) \cap C(1{:}k-1)], H[v_n^1, t|R(1{:}2) \cap C(k{:}n)])$인 해밀톤 경로가 존재함으로 $M\langle R(3{:}m)\rangle$에 존재하는 해밀톤 경로 P'와의 경로 합병으로 해밀톤 경로를 생성할 수 있다. **(2)** $s, t \in R(2)$인 경우, $P=(H[s, v_1^2|R(1{:}2) \cap C(1{:}k-1)], H[v_1^3, v_n^3|R(3{:}m)], H[v_n^2, t|R(1{:}2) \cap C(k{:}n)])$로 가 존재한다.

해밀톤 경로가 존재한다. $H[v_1^3, v_n^3 | R(3:m)]$는 보조정리 2에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. **(3)** $s, t \in R(i)$인 경우, $P=(s, v_{j-1}^i, \cdots, v_1^i, H[v_1^{i-1}, v_{j+1}^{i-1} | R(1:i-1)], v_{j+1}^i, v_{j+2}^i, \cdots, v_{k-1}^i, H[v_{k-1}^{i+1}, v_n^{i+1} | R(i+1:m)], v_n^i, v_{n-1}^i, \cdots, t)$로 인한 해밀톤 경로가 존재한다.

경우 2 $s \in R(i), t \in R(k), i < k$인 경우 $s = v_j^i$라 가정한다.

경우 2.1 $m=2$ 이고, $s \in R(1)$, $t \in R(2)$, [3]에서 해밀톤 경로가 존재함을 보였다.

경우 2.2 $m=3$ 이고, $s \in R(1)$, $t \in R(3)$

경우 2.2.1 $s \in B$ 또는 $t \in B$ 이고, s, t가 같은 열이 아닌 경우, 보조정리 4에 의해 해밀톤 경로가 존재한다.

경우 2.2.2 $s \in B$ 또는 $t \in B$ 이고, s, t가 같은 열인 경우, $M\langle C(j:n)\rangle$ 에는 보조정리 1(b)에 의해 s와 t를 잇는 해밀톤 경로가 존재하고 $M\langle C(1:j-1)\rangle$는 $j-1$이 짝수이므로 메쉬의 해밀톤 사이클 특성에 의해 사이클이 존재한다. $M\langle C(j:n)\rangle$의 해밀톤 경로 중에서 $C(j)$에 포함된 에지 (x, y)를 선택하고 $G\langle C(1:j-1)\rangle$의 사이클 경로 중 $C(j-1)$에 포함된 에지 중 (x, y)와 인접한 에지를 선택하여 (x', y')라 두고 에지 (x, y)대신 $(x, x'), (y, y')$를 추가함으로서 해밀톤 경로를 생성할 수 있다.

경우 2.2.3 $s \in W$이고 $t \in W$는, $P=(H[s, s' | R(1:2)], H[t', t | R(3)])$로 인해 해밀톤 경로가 존재한다. 여기에서 s'는 $s' \in R(2)$으로 t'에 인접한 정점이다. t'는 $t' \in R(3)$으로 정점 t에 인접한 정점이다. $H[s, s' | R(1:2)]$에서 s'는 v_1^2와 같은 색이므로 보조정리 4에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. $H[t', t | R(3)]$는 보조정리3에 의해 해밀톤 경로를 가진다.

경우 2.3 $m \geq 3$ 이고 $s \in R(1)$, $t \in R(2)$ 인 경우,

경우 2.3.1 $s \in W$이고 $t \in W$, $M\langle R(1:2)\rangle$는 보조정리 4에 의해 s와 t을 잇는 해밀톤 경로 P가 존재함으로 $M\langle R(3:m)\rangle$에 존재하는 해밀톤 경로 P'와의 경로 합병으로 해밀톤 경로를 생성할 수 있다.

경우 2.3.2 $s \in W$이고 $t \in B$, s, t가 같은 열에 있는 경우와 그렇지 않는 경우로 나누어 증명한다. **(1)**같은 열에 있는 경우는 $P=(H[s, s' | R(1)], H[t', t | R(2:m)])$로 해밀톤 경로가 존재한다. 여기에서 s'는 s와 인접하고 t'와 인접한 정점이다. t'는 t와 인접하고 s'와 인접한 정점이다. $H[s, s' | R(1)]$ 와 $H[t', t | R(2:m)]$는 보조정리 3에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. **(2)** s, t가 다른 열에 있는 경우는 m이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 증명한다. m이 짝수인 경우는 $P=(H[s, v_j^m | C(1:j)], H[v_{j+1}^m, t | C(j+1:n)])$로 보조정리 1(a)에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. m이 홀수인 경우는 $P=(H[s, v_1^1 | C(1:j)], H[v_n^1, t | C(j+1:n)])$로 해밀톤 경로가 존재한다. $H[s, v_1^1 | C(1:j)]$는 보조정리 1(a)에 의해, $H[v_n^1, t | C(j+1:n)]$는 보조정리 1(b)에 의해 해밀톤 경로가 존재한다.

경우 2.3.3 $s \in B$인 경우, s, t가 같은 열에 있는 경우는 ***경우 2.3.2*** **(1)**과 같고, 다른 열에 있는 경우는 보조정리 4에 의해 해밀톤 경로가 존재한다.

경우 2.4 $m > 3$ 이고 그 외인 경우

$P=(H[s, v_b^a | R(1:a)], H[v_b^{a+1}, t | R(a+1:m)])$로 보조정리 2에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. 여기에서 $i=1$이면 $a=i+1$ 그렇지 않으면 $a=i$, $t=v_n^{i+1}$이면 $b=n-1$ 그렇지 않으면 $b=n$이다.

4. 결론

본 논문에서는 메쉬가 해밀톤 연결된 그래프가 되기 위해 최소 2개 이상의 에지의 추가가 필요함을 보였다. 그리고 $m \times n$ ($m \geq 2, n \geq 3$, n 홀수) 메쉬의 첫 행에 랩어라운드 에지를 추가한 메쉬의 해밀톤 성질을 보였고, 이를 토대로 $m \times n$ 메쉬의 첫 행과 마지막 행에 랩어라운드 에지를 추가한 메쉬가 해밀톤 연결된 그래프임을 증명하였다.

[참고 문헌]

[1] C. C. Chen and N. F. Quimpo, "*On strongly hamiltonian abelian group graphs,*" in. *Australian Conference on Combinatorial Mathematics* , pp. 23-34, 1980

[2] A. Itai, C. H. Papadimitriou, and J. L. Czwarcfiter, "*Hamiltonian paths in grid graphs,*" *SIAM J. Comput.* 11(4), pp. 676-686, 1982.

[3] Hee-Chul Kim and Jung-Heum Park, "*Fault Hamiltonicity of Product Graph of Path and Cycle,*" submitted for publication, 2001.