

피보나치 원형군에서의 임베딩

유 명 기, 김 용 석

서남대학교 컴퓨터 정보통신학과

전화 : 063-625-3746 / 핸드폰 : 019-689-3746

Embedding in Fibonacci Circulants

Myoung-Ki Yoo, Yong-Seok Kim

Dept. of Computer Science and Information Communication, Seonam University

E-mail : rtg2028@cein.or.kr

Abstract

In this paper, we consider the problem of embedding Fibonacci linear array, Fibonacci mesh, Fibonacci tree into Fibonacci circulants and between Fibonacci cubes and Fibonacci circulants. We show that the Fibonacci linear array of order n , L_n is a subgraph of the Fibonacci circulants of order n , Σ_n with $\Sigma_n \supseteq L_n, n \geq 0$, the Fibonacci mesh of order (n_1, n_2) , $M_{(n_1, n_2)}$ with $\delta_{2n+1} \supseteq (M_{(n,n)} \cup M_{(n+1,n+1)})$, $\delta_{2n} \supseteq (M_{(n,n+1)} \cup M_{(n,n-1)})$ and the Fibonacci tree-I of order n , FT_n with $\Sigma_{n+3} \supseteq FT_n, n \geq 0$, the Fibonacci tree-II of order n , T_n with $\Sigma_n \supseteq T_n$. Furthermore, we show that the Fibonacci cubes of order n , Γ_n is subgraph of the Fibonacci circulants of order n , Σ_n and inversely Γ_n can be embedded into Σ_n with expansion 1, dilation $n-2$ and congestion

$$(n-1) - \lfloor \frac{n - (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor}}{n} \rfloor.$$

I. 서론

최근의 컴퓨터 시스템은 단일 프로세서 중심의 처리 구조에서 여러개의 프로세서를 상호 연결하여 처리하는 병렬처리 컴퓨터 구조로 발전해 가고 있다. 이와

같은 컴퓨터 구조에 있어서는 각 처리 장치들 간의 상호 연결망이 중요한 부분을 차지하게 되는데, 이러한 상호 연결망으로는 선형 배열, 링, 메쉬, 트리, 하이퍼 큐브, 피보나치 큐브, 피보나치 원형군 등이 있다. 피보나치 원형군의 임베딩은 여러 병렬 컴퓨터 구조들 사이에서 알고리즘의 호환성과 관련된 이론적으로나 실제적으로 중요한 문제이다. 손님 그래프(guest graph) G 를 주인 그래프(host graph) H 에 임베딩한다는 것은 G 의 정점들을 H 의 정점들로 일대일 대응시키고, G 의 각 에지 (u, v) 에 대해 H 에서 u 가 대응된 정점과 v 가 대응된 정점 사이의 가장 짧은 경로를 대응시킴을 말한다. 임베딩의 비용을 표현하는 척도로는 연장율, 밀집율 그리고 확장율 등이 있다. 연장율은 G 의 각 에지가 대응된 H 의 경로들 중 가장 긴 것의 길이이고, 어떤 그래프를 다른 그래프에 의해 시뮬레이션할 때 드는 통신 비용을 나타낸다. 밀집율은 H 의 에지 중 가장 많은 경로가 지나가는 에지에 있어서의 경로 수를 말하며, 이는 시뮬레이션시 주인 그래프 H 의 한 에지에 걸리는 부하를 나타낸다. 그리고 확장율은 H 의 크기를 G 의 크기로 나눈 값을 말하며, 이는 그래프 G 를 시뮬레이션 하기위해 필요한 주인 그래프 H 의 최소 프로세서의 수를 나타내며 하드웨어 비용과 관련된다. 그래프 임베딩 문제는 병렬 컴퓨터 위상들 사이에 있어서의 시뮬레이션 그리고 주어진 자료 구조를 다른 자료 구조에 시뮬레이션하는 등의 응용분야에서 제기되는 문제이다. 본 논문에서는 선형 배열, 피보나치 메쉬, 피보나치 트리-I, II 그리고

피보나치 큐브를 피보나치 원형군에서 어떻게 시물레이션하는가를 보여준다. 피보나치 원형군과 피보나치 큐브와의 연관성은 피보나치 수에 있다.

II. 피보나치 선형배열, 피보나치 메쉬와 피보나치 트리

정의 2.1

1) n 차원 피보나치 선형 배열 $L_n, n > 0$ 은 전체 노드 개수가 f_n 이고, $L_0 = (\emptyset, \emptyset)$ 이다.

2) $n_1, n_2 > 0$ 인 정수이고 (n_1, n_2) 차원의 피보나치 메쉬, $M_{(n_1, n_2)}$ 는 $f_{n_1} \times f_{n_2}$ 메쉬이다.

$M_{0, n} = M_{n, 0} = M_{0, 0} = (\emptyset, \emptyset)$ 이다.

3) n 차원 피보나치 트리-I, $FT_n = G(V_n, E_n)$ 이다.

$$FT_{-1} = (\emptyset, \emptyset), \quad FT_0 = (\{1\}, \emptyset), \quad n \geq 1$$

$$FT_n = FT_{n-1} \cup FT'_{n-2} \cup FT''_n$$

$$FT'_{n-2} = (\{i + f_{n+2} - 1 : i \in V_{n-2}\},$$

$$\{(i + f_{n+2} - 1, j + f_{n+2} - 1) : (i, j) \in E_{n-2}\})$$

$$FT''_n = (\{f_{n+2} - 1, f_{n+3} - 1, f_{n+3} - 2\},$$

$$\{(f_{n+3} - 1, f_{n+2} - 1), (f_{n+3} - 1, f_{n+3} - 2)\})$$

4) n 차원 피보나치 트리-II, $T_n = G(V_n, E_n)$ 이다.

$$T_0 = (\emptyset, \emptyset), \quad T_1 = (\{0\}, \emptyset) = T_2,$$

$$T_n = T_{n-1} \cup T'_{n-2} \cup T''_n, \quad n \geq 1$$

$$T'_{n-2} = (\{i + f_{n-1} : i \in V_{n-2}\}, \{(i + f_{n-1},$$

$$j + f_{n-1}) : (i, j) \in E_{n-2}\})$$

$$T''_n = (\{0, f_{n-1}\}, \{(0, f_{n-1})\})$$

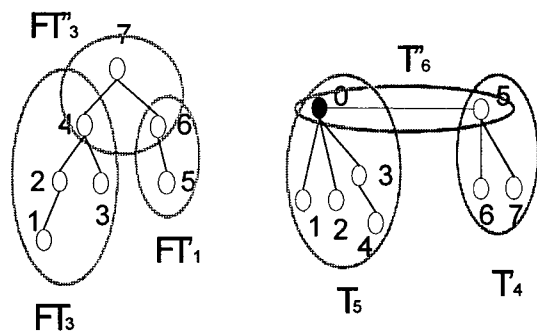


그림 2.1 정의 2.1 3),4)의 예

정리 2.1 $L_n, M_{(n_1, n_2)}, FT_n, T_n$ 은 다음과 같이 정의된다.

1) $\Sigma_n \supseteq L_n, n \geq 0$

2) $\delta_{2n+1} \supseteq (M_{(n, n)} \cup M_{(n+1, n+1)})$

$\delta_{2n} \supseteq (M_{(n, n+1)} \cup M_{(n, n-1)})$

3) $\Sigma_{n+3} \supseteq FT_n, n \geq 0$

4) $\Sigma_n \supseteq T_n, n \geq 0$

증명)

1) n 차원 피보나치 원형군 Σ_n 이 링구조이므로 노드 번호 0에서 $f_n - 1$ 까지의 길이를 갖는 선형 배열을 갖는다.

2) 피보나치 수의 성질에 의해서

$f_{n+k} = f_k \cdot f_{n-1} + f_{k-1} \cdot f_n$ 이 성립한다. 이때

$k = n$ 이 라고 하면 $f_{2n} = f_n \cdot f_{n+1} + f_{n-1} \cdot f_n$

$= A + B$, 여기서 A 는 분할의 첫 번째 부분으로

$f_n \cdot f_{n+1}$ 이 되고 B 는 분할의 두 번째 부분으로

$f_{n-1} \cdot f_n$ 이 된다. 그리고 δ_{2n} 는 f_n 개의 δ_{n+1} 과

f_{n-1} 개의 δ_n 로 분할할 수 있다. 이때 분할의 첫 번째

부분의 모든 δ_{n+1} 는 선형배열 L_{n+1} 을 포함하고

있고 이러한 분할의 첫 번째 부분의 f_n 개의

L_{n+1} 은 $(n, n+1)$ 차원의 피보나치 메쉬를 이룬다.

분할의 첫 번째 부분에서 f_n 개의 선형배열은

$(n, n+1)$ 차원의 피보나치 메쉬를 포함하고 마찬가지로

분할의 두 번째 부분에서는 $(n-1, n)$ 차원의 피보나치

메쉬를 포함한다.

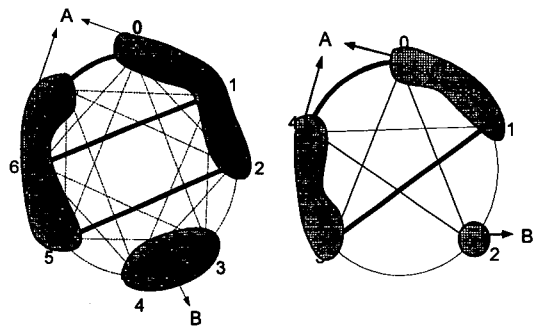


그림 2.2 $\Sigma_{2n} \supseteq (M_{(n, n-1)} \cup M_{(n, n-1)})$ 과

$\Sigma_{2n+1} \supseteq (M_{(n, n)} \cup M_{(n+1, n+1)})$ 의 예

3) n 에 관한 수학적 귀납법으로 증명할 수 있다.

$n=1$ 인 경우 정의 2.1 에 의해서

$$FT_1 = FT_0 \cup FT'_1 \cup FT''_1 \text{ 이므로}$$

$$FT_0 = (\{1\}, \emptyset) \text{ 이고 } FT'_1 = (\emptyset, \emptyset) \text{ 그리고}$$

$$FT''_1 = (\{1,2\}, \{(1,2)\}) \text{ 이다.}$$

즉 FT_0 의 루트 노드 1과 FT''_1 에서 생성된 루트 노드 2와 에지 번호 f_2 로 연결된다. 이것은 $\Sigma_4 = (\{0,1,2\}, \{(0,1), (1,2), (2,0)\})$ 의 부분 집합이 된다.

$n < k$ 에서 $\Sigma_{k+2} \supseteq FT_{k-1}$ 이 성립한다고 가정하면

$n = k$ 에서는 $FT_k = FT_{k-1} \cup FT'_{k-2} \cup FT''_k$ 가

된다. 이때 FT_{k-1} 는 이전 단계의 트리이고

FT'_{k-2} 는 FT_{k-2} 의 노드 번호에 $f_{k+2}-1$ 을

더한 노드 번호를 갖는다. 그러므로 항상 FT'_{k-2}

의 루트 노드 번호는 $f_{k+3}-2$ 가 된다. 그리고

FT''_k 는 FT_{k-1} 의 루트 노드 번호 $f_{k+2}-1$

과 FT''_k 에서 생성된 루트 노드 번호 $f_{k+3}-1$

와 인접한 에지 $\{(f_{k+3}-1, f_{k+2}-1)\}$ 와

FT'_{k-2} 의 루트 노드와 FT_k 의 루트 노드와 인

접한 에지 $\{(f_{k+3}-1, f_{k+2}-1)\}$ 가 추가되므로

이때 두 정점의 노드번호 차의 절대값인 에지 번호가

$$|(f_{k+3}-1) - (f_{k+2}-1)| = f_{k+1} \text{ 이고 또 다른 에}$$

$$\text{지 번호 에서는 } |(f_{k+3}-1) - (f_{k+3}-2)| = 1 \text{ 이 된}$$

다. 그러므로 추가되는 에지 번호는 f_{k+1} 와 1 이므로

Σ_{k+3} 에서의 점프열은 $\{f_2, f_3, \dots, f_{k+1}\}$ 이고 전

체 노드의 개수는 f_{k+3} 이므로 $\Sigma_{k+3} \supseteq FT_k$ 이 성립

한다.

4) $T_0 = (\emptyset, \emptyset)$ 이고 $T_1 = (\{0\}, \emptyset) = T_2$ 이다. 그

리고 $T_3 = T_2 \cup T'_1 \cup T''_3$ 이므로 $T_2 = (\{0\}, \emptyset)$

이고 T'_1 는 T_1 의 노드번호에 f_2 를 더한 노드 번

호를 가진 T_1 이다. 그러므로 $(\{1\}, \emptyset)$ 이 된다.

$T''_3 = (\{0,1\}, \{(0,1)\})$ 즉 T_2 의 루트 노드 0과

T'_1 의 루트 노드 1 에 인접한 에지를 추가한다. 이때

에지 번호는 f_2 가 된다. 이것은 3차원 피보나치 원

형군 $(\{0,1\}, \{(0,1), (1,0)\})$ 의 부분 집합이 된다.

$n < k$ 에서 $\Sigma_{k-1} \supseteq T_{k-1}$ 이 성립한다고 가정하면

$n = k$ 에서는 $T_k = T_{k-1} \cup T'_{k-2} \cup T''_k$ 가 된다. 이

때 T_{k-1} 는 이전 단계의 트리이고 T'_{k-2} 는 T_{k-2} 의

노드 번호에 f_{k-1} 를 더한 노드 번호를 가진다. 그러

므로 T'_{k-2} 의 루트 노드 번호는 f_{k-1} 가 된다. 그리고

T''_k 는 T_{k-1} 의 루트 노드 번호 0 과 T'_{k-2} 의 루트

노드 번호 f_{k-1} 에 인접한 에지를 추가하므로 T_k 에

서 새로 추가되는 에지 번호는 f_{k-1} 뿐이다. 그러므

로 k 차원 피보나치 원형군의 정의에 의한 점프열은

$\{f_2, f_3, \dots, f_{k-2}\}$ 이다. 그런데 피보나치 수의 성

질 $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ 과 피보나치 원형군의 노드 대

칭적인 성질을 이용하여 $f_k - f_{k-1} = f_{k-2}$ 가 되므

로 f_{k-2} 의 점프는 반시계 방향의 f_{k-1} 와 같다. 그러

므로 새로 추가되는 에지없이 $T_k \subseteq \Sigma_k$ 이 성립한다.

III. 피보나치 원형군의 임베딩

정리 3.1 n 차원 피보나치 원형군은 n 차원 피보나치

큐브에 확장율은 1, 연장율은 $n-2$, 밀집율은

$$(n-1) - \lfloor \frac{n - (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor}}{n} \rfloor \text{ 에 임베딩된다.}$$

증명)

1) 확장율

n 차원 피보나치 원형군은 n 차원 피보나치 큐브의 노드들 사이의 사상은 항등사상이다.

2) 연장율

Σ_4 은 Γ_4 에 연장율 2 에 임베딩된다. $n \leq k, k \geq 5$

인 경우에 Σ_k 은 Γ_k 에 연장율 $(k-2)$ 에 임베딩된

다고 가정하면 $n \leq k+1$ 인 경우에는 $k+1$ 차원의 피

보나치 큐브 Γ_{k+1} 는 $\Gamma_{k-1} \cup \Gamma_{k-2} \cup \Gamma'_{k-1}$ 로 분할할

수 있다. 이때 Γ_{k-2} 에서 Γ'_{k-1} 로 가는 경로가 최

대값을 갖는다. 그리고 Γ_{k-2} 에서 각 노드들은

Γ_{k-1} 의 노드들 중 하나와 인접한 에지를 갖고

Γ_{k-1} 에서의 각 노드들은 Γ'_{k-1} 의 노드들 중 하나

와 인접한 에지를 갖는다. 그리고 Γ_{k-2} 의 임의의 한

노드에서 Γ'_{k-1} 의 임의의 한 노드까지의 경로의 길

이는 2 이고 Γ'_{k-1} 내에서의 경로의 길이는 가정에

의해서 $k-3$ 이므로 Γ_{k+1} 의 연장율 $dil(\Gamma_{k+1})$ 은

$$2 + dil(\Gamma'_{k-1}) = 2 + dil(\Gamma_{k-1}) = 2 + (k-3) = k-1$$

이다. 그러므로 항상 Σ_n 은 Γ_n 에 연장율 $n-2$ 로

임베딩 된다.

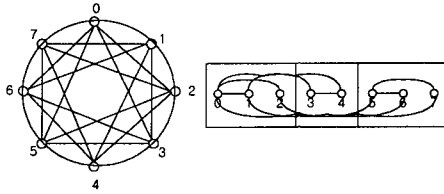


그림 3.1 연결율의 예

3) 밀집율

Σ_1, Σ_2 과 Σ_3 은 Γ_1, Γ_2 그리고 Γ_3 과 서로 각 동형이고 $con(\Gamma_1) = 1, con(\Gamma_3) = 1$ 이고 Γ_4 와

Γ_5 의 최소 분지수는 1 이므로 최소 분지수를 갖는 노드가 다른 노드들과 인접한 에지를 가질려면 이용할 수 있는 에지가 하나이므로 그때의 밀집율은 Σ_4 와 Σ_5 의 노드 분지수인 2 와 4가된다. 그러므로

$$con(\Gamma_4) = (4-1) - \lfloor \frac{4 - (-1)^{\lfloor \frac{4+1}{3} \rfloor}}{4} \rfloor$$

$= 2 = 2(4-3) - con(\Gamma_1)$ 가 성립한다. 그리고

$$con(\Gamma_5) = (5-1) - \lfloor \frac{5 - (-1)^{\lfloor \frac{5+1}{3} \rfloor}}{5} \rfloor$$

$= 4 = 2(5-3) - con(\Gamma_{k-2})$ 가 성립한다. $n \leq k, k \geq 6$ 일 경우에는 Σ_k 가 Γ_k 에 임베딩될 때의 밀집율은 $con(\Sigma_k \rightarrow \Gamma_k)$ 라고 하면 $con(\Sigma_k \rightarrow \Gamma_k) =$

$$(k-1) - \lfloor \frac{k - (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{3} \rfloor}}{k} \rfloor$$

$= 2(k-3) - con(\Gamma_{k-3})$ 이라고 가정하면 인 경우에는 Σ_{k+1} 이 Γ_{k+1} 에 임베딩될 때 Γ_{k+1} 은

$\Gamma_{k-1}, \Gamma_{k-2}$ 그리고 Γ'_{k-2} 으로 분할되고 Γ_{k-2}

의 각 노드들은 Γ_{k-1} 의 노드들 중 하나에 인접한 에지를 갖고 Σ_{k-1} 의 각 노드들은 Γ'_{k-1} 의 각 노드들 중 하나에 인접한 에지를 갖는다. 그리고 Σ_{k+1} 의

분지수는 $2(k-2)$ 이다. 이때 $n = k+1$ Γ_{k-2} 의 임의의 노드가 Γ'_{k-1} 의 노드들 중 하나와 인접한 에지를 갖는다면 Γ_{k-2} 에서 Γ_{k-1} 을 거쳐서 Γ'_{k-1} 로 간

다. 그리고 Γ_{k-2} 의 노드들 중 하나가 최소 분지수를 가지므로 Σ_{k+1} 의 밀집율은 Σ_{k+1} 의 분지수 $2(k-2)$ 에서 Γ_{k-2} 의 밀집율을 뺀 $2(k-2) =$

$$- con(\Gamma_{k-2}) = (k) - \lfloor \frac{k+1 - (-1)^{\lfloor \frac{k+2}{3} \rfloor}}{k+1} \rfloor$$

이다.

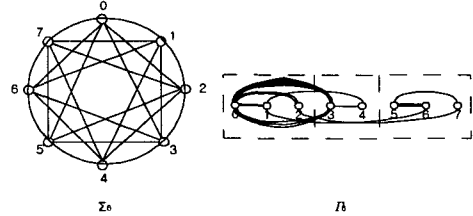


그림 3.2 밀집율의 예

IV. 결론

본 논문에서는 병렬처리 컴퓨터 구조에 있어서 각 처리 장치들 간의 상호 연결망 중 피보나치 선형배열, 피보나치 매쉬, 피보나치 트리를 피보나치 원형군에 그리고 피보나치 큐브와 피보나치 원형군 간의 임베딩에 대해 연구하였다. 위에 살펴본 바와 같이 n 차원 피보나치 선형 배열, L_n 은 피보나치원형군, Σ_n 에 $\Sigma_n \supseteq L_n, n \geq 0, (n_1, n_2)$ 차원의 피보나치매쉬, $M_{(n_1, n_2)}$ 는 $\delta_{2n+1} \supseteq (M_{(n,n)} \cup M_{(n+1,n+1)})$, $\delta_{2n} \supseteq (M_{(n,n+1)} \cup M_{(n,n-1)})$ 이고 n 차원 피보나치 트리-I, FT_n 은 $\Sigma_{n+3} \supseteq FT_n, n \geq 0, n$ 차원 피보나치 트리-II, T_n 은 $\Sigma_n \supseteq T_n$ 임을 보였으며, 또한 피보나치 큐브에서의 확장율은 1, 연결율 $n-2$, 그리고 밀집율 $(n-1) - \lfloor \frac{n - (-1)^{\lfloor \frac{n+1}{3} \rfloor}}{n} \rfloor$ 에 임베딩 됨을 증명하였다.

참고문헌

- [1] 주낙근, "새로운 다중 컴퓨터의 위상," 한국정보과학회 호남·제주지부 학술 발표 논문집, 5권 1호, pp. 141-146, 1993.
- [2] Kim, Yong Seok, "피보나치 수를 이용한 상호 연결망의 설계" 박사 학위논문, 전남대학교, 1997.
- [3] 한국과학기술원, 고성능 컴퓨터 설계 및 개발에 관한 연구, 1차년도 보고서, 1993.
- [4] Y.Saad and M.H Schultz, "Topological properties of hypercubes," IEEE Trans. on computers, Vol.37, pp867-872, 1988.
- [5] K. Efe, " Embedding mesh of trees in the hypercube," J. parallel and Distrib. Comput., Vol. 11, pp. 222-230, 1991.
- [6] C. L. Seitz, "The cosmic cube," common. ACM. vol.28, pp. 22-23, 1985