

H_∞ 최적 제어기 구성을 위한 개선된 알고리즘

김 용 규, 양 도 철, *유 창 근, **장호성
한국철도기술연구원, *남서울대학교, **홍익대학교
전화 : 042-481-8997

Advanced Algorithm for H_∞ Optimal controller synthesis

Yong-Kyu KIM, Doh-Chul YANG, Chang-Keun RYU
KRRI, Namseoul University, Dept. of Electronics and Information communication Eng.
E-mail : ygkim1@krri.re.kr.

Abstract

The aim of this study is to analyse the problems occurred by using classical algorithm to synthesize the H_∞ optimal controller. The obtained result of analysis applied to the composition of algorithm for the new H_∞ optimal controller which was introduced in this study. The study investigates and compares H_∞ optimal controller formed by new algorithm with the one formed by classical algorithm.

In particular, robustness related to the robust control is systematically described by using the composition of algorithm for the classical H_∞ optimal controller. In addition, the flow charts classified into classical algorithm and new one are discussed to synthesize the H_∞ optimal controller.

I. 서론

시스템은 온도 등의 외부 환경, 부하변화, 운전조건 변화와 시스템의 불확실성에도 불구하고 설계 목적대로 동작되어야 한다. 따라서 폐루프 시스템이 설계자가 의도한 안정성과 성능을 갖고 운전될 수 있는 강인성 특징을 가진 견실 제어기의 실현 방법은 LQG 제어, LQG 최적 제어, LQG/LTR, H₂, H_∞ 제어, 등이 있다([1], [2]).

H_∞ 제어 기법은 설계자가 제어 대상 시스템에 포함된

불확실성의 모델을 결정한 후 폐환 시스템이 내부적으로 안정해야 한다는 제한 조건을 만족시키면서 페루프 시스템의 견실 안정도를 최대화하는 것이다.

H_∞ 제어는 가중 행렬의 개념에 리카티 대수 방정식(REA)을 만족하는 임의의 계수 γ 와 무한-놈을 사용하여 최적화를 실행하는 제어기를 구성함으로써 최적의 제어기를 구성할 수 있다. 특히 H_∞ 제어는 LFT(Linear Fractional Transformation)의 형태로 표현함에 따라, 견실 성능과 견실 안정도의 문제를 이와 등가인 수식의 형태로 쉽게 전환, 처리한다[3].

그러나 Doyle[4]이 제안한 기존 알고리즘에 의해 구해진 H_∞ 최적 제어기의 견실성과 성능을 분석할 경우, 매우 큰 가중 함수 이득을 갖게 된다. 그 결과 최적 제어는 공칭 성능과 견실 안정도를 취급하는 결과를 야기할 수 있다. 또한 γ_{opt} 를 선택하는데 있어서 기존의 알고리즘은 γ 값의 변화에 대해 매번 주파수 영역에서의 페루프 분석을 반복해야 하는 문제점이 있다.

따라서 본 논문은 기존 알고리즘으로 H_∞ 최적 제어기를 구성하는 과정에서 페루프 시스템의 주파수 응답 분석에 대한 진행 절차를 감소시키고, 항상 견실 성능과 견실 안정도를 동시에 실현할 수 있는 새로운 알고리즘을 제안한다.

II. 가중 함수의 선택

제어 대상 시스템의 견실성과 성능 사양이 주어질 경우, 가중 함수를 선택하는 간단한 방법은 "loop shaping"의 개념을 도입하는 것이다. 2 차 함수로 주

여기는 개루프 전달 함수(L)와 감도(S) 및 상보 감도 함수(T)는 식(1)로 표현된다[5].

$$\begin{aligned} L &= \frac{a}{s(s + \omega_2)} \\ S &= \frac{1}{1+L} = \frac{s(s + \omega_2)}{s(s + \omega_2) + a} \\ T &= \frac{L}{1+L} = \frac{a}{s(s + \omega_2) + a} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 ω_2 는 건실성 사양에 의해 주어지는 각주파수를 나타낸다.

만약 플랜트 불확실성이 곱셈형(direct multiplicative)일 경우, 건실 성능에 대한 필요 충분 조건으로부터 $\|W_1 S\|_\infty < 1$ 과 $\|W_2 T\|_\infty < 1$ 의 조건을 얻을 수 있다. 그 결과, 건실성을 만족하는 W_1 과 W_2 는 식(2)로 표현된다.

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{S} = \frac{s(s + \omega_2) + a}{s(s + \omega_2)} \\ W_2 &= \frac{1}{T} = \frac{s(s + \omega_2) + a}{a} \end{aligned} \quad (2)$$

식(2)에서 W_1 과 W_2 의 분모 차수는 분자 차수와 최소한 같거나 커야 한다. 그러나 식(2)의 W_2 는 이들 조건을 만족하지 않는다. 따라서 식(2)의 W_2 는 식(3)으로 변형된다.

$$W_2' = \frac{s(s + \omega_2) + a}{(s + \omega_2)^2} \quad (3)$$

저주파 영역에서의 성능을 만족하기 위해서는 W_2' 의 범위를 식(4)에 의해 제한하여야 한다.

$$\begin{aligned} (W_2')_0 &= \lim_{s \rightarrow 0} W_2'(s) = 1 \\ (W_2')_\infty &= \lim_{s \rightarrow \infty} W_2'(s) = \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (4)$$

그 결과, 식(2)는 식(5)로 대체된다.

$$\begin{aligned} W_1 &= a \frac{s(s + \omega_2) + a}{s(s + \omega_2)} \\ W_2 &= a \left(\frac{b^2}{a} \right) \frac{s(s + \omega_2) + a}{(s + \omega_2)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

식(5)에서 W_1 의 3dB 차단 주파수는 W_2 의 3dB 차단 주파수에 비해 충분히 저주파 영역에 위치해야 한다. 만약 이러한 조건이 만족되지 않으면 원하는 건실 안정도와 성능을 동시에 만족하는 것은 불가능하게 된다.

건실성을 만족하는 W_1 과 W_2 가 결정된 후에는 그림 1과 같은 확장된 플랜트 P를 구성한다[3].

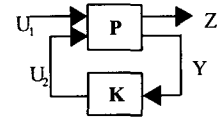


그림 1 확장된 플랜트

그림 1에서 T_{ZU1} 을 U_1 과 Z 간의 전달 함수라면, 이들 관계는 식(6)으로 표현된다.

$$T_{ZU1} = \begin{bmatrix} W_1 S \\ W_2 T \end{bmatrix} \quad (6)$$

식(6)에서 H_∞ 제어는 $\|T_{ZU1}\|_\infty \leq 1$ 을 만족하는 제어기를 구성한 후, 이에 대한 내부 안정도(internal stability)을 만족하는 제어기를 찾는 것을 의미한다.

III. H_∞ 최적 제어기 구성

만약 그림 1에서 페루프 케환 시스템을 만족하는 두 개의 리카티 대수 방정식(RAE)이 "0"를 포함한 양수이고, 이의 해를 곱한 값의 스펙트럼 영역이 v^2 의 내부에 존재할 경우에는 H_∞ 제어기가 존재한다. 여기서 v 는 H_∞ 제어기를 계산하기 위한 알고리즘에서 사용하는 계수를 의미한다. 여기서 v 가 무한대로 향할 경우, H_∞ 최적 제어기는 $\|T_{ZU1}\|_\infty$ 을 최소화하는 H_2 제어기로 변환된다.

H_∞ 최적 제어기 구성을 위한 기존 알고리즘은 Doyle[4]에 의해 주어진다. H_∞ 최적 제어기를 구성하기 위해서는 그림 1에 대한 상태 방정식을 식(7)과 같이 구성해야 한다.

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + B_1 U_1 + B_2 U_2 \\ Z &= C_1 X + D_{11} U_1 + D_{12} U_2 \\ Y &= C_2 X + D_{21} U_1 + D_{22} U_2 \end{aligned} \quad (7)$$

식(7)에 대한 2 개의 RAE로부터 $X_\infty \geq 0, Y_\infty \geq 0, \rho(X_\infty Y_\infty) < v^2$ 을 만족하는 해를 구함으로써 H_∞ 최적 제어기를 구할 수 있다. 여기서, H_∞ 최적 제어기는 $\|f(P,K)\|_\infty \leq v$ 을 만족하는 계수 v 의 최적값을 결정하는 것이며, 이 값의 한계는 2 개의 RAE중 어느 하나가 해를 갖지 않는 값으로 대응된다. 따라서, 계수 v 값 선택은 H_∞ 최적 제어기 구성에 있어서 매우 중

요하다.

그림 2는 기존 알고리즘에 의한 H_∞ 최적 제어기 구성 순서도를 나타낸다.

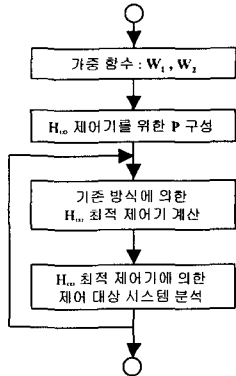


그림 2 기존 알고리즘 순서도

그림 2에서 계수 γ 의 최적값을 구하기 위해, 먼저 매우 큰 γ 값을 선택한 후, H_∞ 제어를 계산한다. 이에 따라 주파수 영역에서 W₁과 W₂의 교차 주파수와 S와 T의 교차 주파수가 최대한 인접하는 γ 값을 구한다. 기존 알고리즘은 이 γ 값을 최적값이라 정의한 후, 이에 대한 H_∞ 제어를 계산한다. 이러한 기존 알고리즘은 γ 값의 변화에 대해 매번 S와 T의 주파수 영역 분석을 실행해야 하며, 특히 γ 를 매우 큰 값에서부터 시작함에 따라 H_∞ 제어를 구성하기 위한 과정이 복잡해진다. 따라서 본 논문에서는 이러한 단점을 해결하기 위한 새로운 알고리즘을 그림 3과 같이 제시한다.

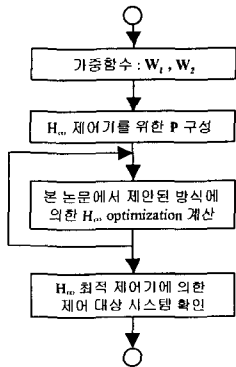


그림 3 본 논문에서 제안된 알고리즘

제안된 새로운 알고리즘은 우선적으로 γ_{min} 을 구하기 위해 Eq.(8)로 주어지는 Parrott의 이론을 적용한다[6].

$$\gamma_{min} = \max\left\{ \frac{1}{\sigma} (D_{111}, D_{112}), \frac{1}{\sigma} (D_{111}^T, D_{112}^T) \right\} \quad (8)$$

여기서 $\gamma_{min} < 1$ 인 경우, RAE는 해가 존재하지 않게 된다. 이는 견실성 조건을 만족하는 해가 존재하지 않음을 의미한다.

γ 의 값을 증가하면서 $\|W_1 S\|_{\infty}$ 과 $\|W_2 T\|_{\infty}$ 를 계산할 경우, 임의의 γ 에서 $\|W_1 S\|_{\infty}$ 과 $\|W_2 T\|_{\infty}$ 의 값이 더 이상 변화되지 않음을 알 수 있다. 이 값을 γ_{sat} 라 하면, 본 논문에서 제안된 알고리즘에 의한 γ_{opt} 값은 식(9)로 주어진다.

$$\gamma_{opt} = \frac{\gamma_{min} + \gamma_{sat}}{2} \quad (9)$$

III. 실험 및 검토

H_∞ 최적 제어기 구성을 위한 기존 알고리즘과 본 논문에서 제안한 알고리즘을 비교하기 위해 참고 문헌 [7]에 의해 주어지는 그림 4의 전기기계 서보 시스템을 적용하였다.

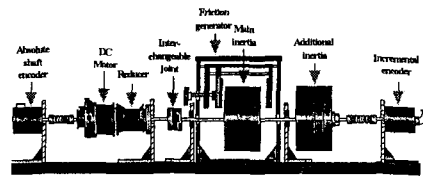


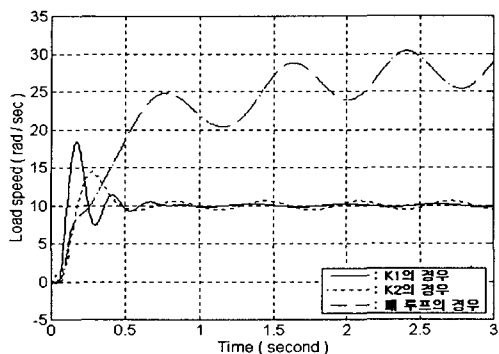
그림 4 전기기계 서보 시스템

위의 시스템에 적절한 가중 함수를 구성하기 위한 관련 성능과 견실성 사양은 참고 문헌[7]의 내용을 인용하였다. 또한 페 루프 귀환 시스템이 요구하는 사양을 만족하기 위해 부하 속도와 입력 간의 오차를 최소화하도록 설정하였다.

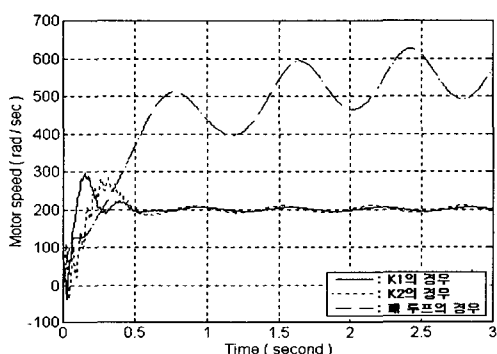
기존의 알고리즘에 의한 H_∞ 최적 제어를 실행한 경우, γ 의 최적값과 a 의 최대값은 각각 $\gamma_{opt} = 5$, $a_{max} = 4.2$ 로 주어졌다. 그러나, 본 논문에서 제안한 알고리즘에 의해 H_∞ 최적 제어를 실행한 경우, γ_{min} 은 "1"로 주어지며, 대역폭 범위가 최소화되고 동시에 감도를 최소로 감소시킬 수 있는 γ 의 선택이 중요하다. 따라서 γ_{sat} 을 구하기 위해 a 값을 증가한 결과, $\gamma=8$ 에서 견실성과 성능이 포화되며, 이에 따른 γ_{opt} 과 a_{max} 은 각각 4.5와 4.25로 기존의 알고리즘보다 ##이 개선되었음을 알 수 있다.

그림 5는 주어진 전기기계 서보 시스템에 대해 페 루프, 기존 알고리즘에 의해 구성된 H_∞ 최적 제어(K₂), 본 논문에서 제안된 알고리즘에 의해 구성된 H_∞ 최적 제어(K₁)에 의해 주어지는 시간 응답을 나타낸 것으로

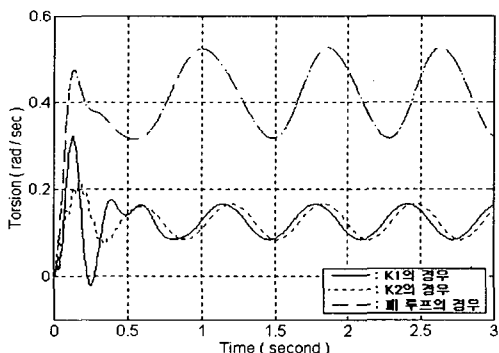
K1이 K2보다 정상상태에 도달하는 시간이 짧으며 이득 변화가 더욱 감소하는 특징이 있다.



(a) 부하 속도



(b) 모터 속도



(c) 비틀림

Fig 5 시간 응답

IV. 결론

H_{∞} 최적 제어기의 건설성과 성능을 분석할 경우, 매우 큰 가중 함수 이득을 갖게 되어 공칭 성능과 건

실 안정도만을 취급할 수도 있다. 또한 V_{opt} 를 선택하는데 v 값의 변화시키고 이를 다시 주파수 영역에서의 페루프 해석을 반복해야만 한다.

따라서 본 논문은 H_{∞} 최적 제어를 구성하는 과정에서 주어진 페루프 시스템의 주파수 응답 분석에 대한 진행 절차를 감소시키고, 항상 건설 성과와 건설 안정도를 동시에 실현할 수 있는 새로운 알고리즘을 제안하였다.

본 논문에서 제안된 알고리즘에 의해 H_{∞} 최적 제어를 구성할 경우, 기존 알고리즘보다 가용성이 우수하며, 정확한 V_{opt} 와 α_{max} 값을 선택할 수 있게 된다. 또한 기존 알고리즘이 V_{opt} 값의 선택시 매우 큰 v 값으로부터 알고리즘 진행 절차를 시작하는 반면 본 논문에서 주어진 방법은 parrott의 이론에 의해 V_{min} 을 구한 다음, v 을 증가하며 V_{sat} 을 구함으로써 V_{opt} 를 찾기 위한 반복 과정이 감소됨을 확인하였다.

참고 문헌

- [1] J.Y.LIN and D.L.MONGOLI, " Linear quadratic gaussian synthesis with reduced parameter sensitivity", *INT.J.Control*, Vol.56, No.4, pp 901-922, 1992
- [2] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonker, and B. A. Francis, "State - space solutions to standard H_2 and H_{∞} control problems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC 34, no. 8, pp.831 - 847, August, 1989.
- [6] M. G. Safanov and D. J. N. Limbeer, "Simplifying the H_{∞} theory via loop shaping," *IEEE Decision and Control conf.* vol. 2, pp 1399-1404, Dec, August, 1988.
- [3] K. Glover and J. C. Doyle, "State-space formulae for all stabilising controllers that satisfy an H_{∞} -norm bound and relations to risk sensitivity," *Systems & control letters*, vol. 11, pp. 167 - 171, 1988.
- [5] H. Kwakernaak, "Robust control and H_{∞} optimization", *Automatica*, vol. 29, pp. 255 - 273, 1993.
- [4] J. M. Maciejowski, *Multivariable feedback design*, Addison-wesley, Reading, Massachusetts, p 425, 1989.
- [7] 김용규, 유창근, "가중 함수의 주파수 영역 해석에 따른 H_{∞} 최적 제어기 구성", 전자공학회 논문지, 제37권 SC편 제2호, pp 72-79, 2000,03.