

# 웨이블릿 변환을 이용한 계측 가속도 기록의 이중 적분법

## Double Integration of Measured Acceleration Record Using Wavelet Transform

이형진\*  
Lee, Hyeong Jin

박정식\*\*  
Park, Jeong Shik

---

### ABSTRACT

It is well known that double integration of measured acceleration records are very difficult, particularly in the case of measurements on civil engineering structures. The measured accelerations on civil structures usually contain non-gaussian and low-frequency noises as well as acceleration records are non-stationary. For this type of signals, wavelet transform can be useful because of its inherent processing abilities for non-stationary signals. In this paper, the de-noising algorithm using the wavelet transform are slightly extended to process non-gaussian and low frequency noises, using median filter concepts. The example studies show that the integration can be improved using proposed method.

---

### 1. 서론

최근 구조물의 유지관리와 보수, 보강에 대한 관심이 증대됨에 따라 현장계측을 통한 안정성 평가나 분석이 나날이 중요해 지고 있다. 통상 이들 계측에서는 변형률과 더불어 가속도 계측이 많이 이루어진다. 이들 동적 실험에서 얻어진 가속도 데이터들은 그 자체로도 직접 분석에 활용되지만, 변위로 적분하여 분석할 필요도 있다. 예를 들어, 차량 통과에 의한 실제 변위응답의 측정은 입력하중의 특성을 예측할 수 있게 하거나, 구조물의 상태평가를 결정하는데 필요한 정확한 물리량이다. 또한 대부분의 공학적 기준은 변위를 기준으로 설정된 경우가 많으므로 동적응답중에서 가속도신호보다는 변위성분을 이용하는 것이 일반적이다. 이러한 변위응답은 접촉식 센서나 광학 센서들을 이용 측정할 수 있으나, 기준점 설정에 따른 어려움이 있어 직접 계측이 곤란한 경우가 허다하다. 이에 따라 구조물의 원하는 지점에서 비교적 측정하기 편리하고 기준점의 설정이 필요 없는 가속도응답을 실측한 후 응답변환에 의한 변위응답의 추정이 구조물의 동적재하시험을 중심

---

\*정회원 · 창원대학교 토목공학과, 조교수

\*\*학생회원 · 창원대학교 토목공학과, 석사과정

으로 시도되고 있다.

그러나, 일반적으로 계측 가속도에는 계측오차가 포함되고, 속도나 변위에 대한 초기조건이 산정이 어려워 종종 변위 적분이 어려운 경우가 발생되고 있다. 특히 이동하중이 작용되는 교량과 같은 경우, 가속도 응답에는 정적변위에 의한 저주파성분이 지배적이라 통상의 고주파 영역에 대한 신호처리만으로는 그 변위의 산정이 매우 어려운 편이다.

본 연구에서는 웨이블릿 변환(wavelet transform)을 이용한 변위적분 방법이 시도되었다. 웨이블릿 변환은 비정상(non-steady state) 신호의 처리에 우수한 성능을 보이는 것으로 알려져 있으며 그 응용은 크게 신호의 노이즈 제거(denoising)와 윤곽선 추정(edge detection)분야에 활용되고 있다. 본 논문에서는 웨이블릿 변환의 두 가지 특성중 노이즈 제거(denoising) 능력을 활용한 처리 연구에 중점을 두었다. 특히, 웨이블릿 변환이 비정상 신호의 가우시안(gaussian) 노이즈 처리에 탁월한 성능이 있으나 여전히 고주파수 위주의 신호처리를 착안하여 저주파 노이즈 처리에 필요한 알고리즘의 보완에 대한 연구를 수행하였다. 제시된 방법의 검증을 위해서 단경간 교량의 모의실험을 통해 얻은 가속도 신호를 활용하였다.

## 2. 가속도 계측 기록의 적분상의 오차 요인

수치적분에 사용될 수 있는 기존의 방법은 매우 다양하다. Simpson Method 나 Trapezoidal Method과 같은 시간 영역의 적분법이나 주파수 영역에서 적분기 함수를 곱하여 구하는 방법이 많이 활용된다. 그러나, 이 방법들조차도 토목구조물에서 크게 나타나는 저주파수 성분에 포함된 오차의 누적에 따른 문제점은 해결하지 못하고 있다. 이 같은 특성을 그림 1의 주파수 영역 변화에서 보일 수 있다.

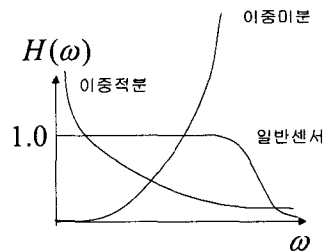


그림 1. 각종 센서와 이중적분기, 이중미분기의 주파수응답함수

실제의 기록이  $x(t)$ (주파수 변환은  $X(\omega)$ ), 계측기를 통과하여 기록된 신호는  $y(t)$ (주파수 변환은  $Y(\omega)$ )라 하면,  $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$ 는 관계식을 만족하게 되고,  $H(\omega)$ 는 센서와 이중적분기, 이중미분기의 주파수응답함수가 된다. 이때, 일반센서는 실제 신호와 기록된 신호가 동일해야 함으로  $H(\omega) = 1.0$ , 이중미분기는  $H(\omega) = -\omega^2$ 이고 이중적분기는  $H(\omega) = -\frac{1}{\omega^2}$ 이 된다. 이때, 이중 적분은 저주파수 성분을 매우 증폭시켜 미소한 저주파 노이즈라도 변위적분 결과에는 매우 큰 영향을 줄 수 있음을 볼 수 있다. 통상, 이 저주파수의 영향은 구조물 응답 신호가 이들 저주파수 보다 고주파 영역에 있다면, 간단히 제거함으로써 해결할 수 있다. 그러나, 토목 구조물에서의 응답에서는 종종 구조물의 응답과 이들 저주파 노이즈를 분리할 수 없게 되는 경우가

발생한다. 이 특성은 시간 영역에서 고찰하면 더욱 분명한 사항을 관찰할 수 있다. 간단한 예로, 정확한 조화함수로 구성된 가속도  $\hat{a}(t) = \sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t$  에 미세한 상수 계측오차(매우 낮은 단위의 저주파수는 거의 상수에 가까울 수 있다.)가 포함된 경우를 살펴보자. 이 경우 적분에 사용되는 가속도 이력은 아래와 같다.

$$\ddot{y}(t) = \sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t + n(t) = \sin\omega_1 t + \sin\omega_2 t + c_1$$

이때, 이중적분을 통해 구해진 변위시간이력은 아래 식과 같이 시간이 경과됨에 따라 계측오차에 의한 변위오차가 매우 커지는 성향을 보이고 있다. 즉, 시간이 경과됨에 따라 정확한 변위성분에 대한 오차가 더욱 커져 신호를 완전히 왜곡시킴을 알 수 있다.

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_1^2} \sin\omega_1 t - \frac{1}{\omega_2^2} \sin\omega_2 t + \frac{c_1}{2} t^2 + \dot{y}(0)t + y(0)$$

이들 문제는 보다 세부적으로 분할하면 크게 초기치 효과 ( $\dot{y}(0)t + y(0)$ ) 문제와 저주파 노이즈 ( $c_1$ )의 문제로 나눌 수 있다. 통상 초기치의 문제는 초기치의 성분이 완전히 배제되도록 진동이 완전히 정지된 상태에서 계측을 시작하거나 응답 변환의 개념을 도입함으로써 해결하고 있으나(양경택, 1998; 이선구 등, 1996; 정법석, 2000), 저주파 계측오차의 영향 등은 아직 완전한 해결이 어려운 문제이다.

### 3. 웨이블릿 이론

#### 3.1 연속 웨이블릿 변환

신호의 해석을 위해서 오랫동안 사용되어지고 있는 푸리에 변환은 신호를 푸리에 계수(fourier coefficient)에 의해서 주어지는 삼각함수의 선형적인 합성으로 분해한다. 이 방법은 해석시 삼각함수가 시간에 대해서 무한한 성질 때문에 신호의 국부적 정보(local information)를 얻지 못한다. 단지 푸리에 변환의 결과로 어떤 진동수 성분이 있는가만을 알 수 있다. 이 문제를 해결하기 위해서 직사각형 형태의 창문 함수를 구성하여 신호에 대한 해석을 하는 것이 단시간 푸리에 변환(short-time fourier transform)이다. 반면에 웨이블릿 변환은 기본요소 신호를 시간축을 따라서 이동(translation)하고, 진동수축을 따라서는 스케일링(scaling)하면서, 시간에 대한 국부적 정보를 얻을 수 있도록 신호를 시간-진동수 영역에서 분해한다.

함수  $f(x)$ 의 연속 웨이블릿 변환 함수  $W(a, b)$ 의 정의는 다음과 같다.

$$W(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi^{a,b}(x) dx \quad \psi^{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad a > 0 \quad (1)$$

$a$ 는 신호  $f(x)$ 의  $x = b$  근방에서의 변환되는 영역의 스케일링(scaling) 인자, 즉 변환되는 영역의 크기를 결정하고,  $b$ 는 변수  $x$ 의 이동(translation) 효과를 나타낸다. 따라서, 웨이블릿 변환은  $a, b$ 의 변화를 통해 변환되는 영역의 위치 및 크기를 균형적으로 국소화시킬 수 있어 공간 또는 시간 함수의 특이성 분석에 유용하게 사용될 수 있다. 웨이블릿 함수  $\psi^{a,b}(x)$ 는 그 응용에 따라 달리 결정될 수 있으나 1차 이상의 소멸 모멘트(vanishing moment)를 가지고, 다음의 유한 조건을 최소한 만족해야 한다.

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty \quad (2)$$

### 3.2 이산 웨이블릿 변환과 노이즈 제거(denoising)

식(1)의 연속 웨이블릿 변환은 정수  $j, k$ 를 이용해서 주파수 대역 계수  $a$ 를 급수  $2^{-j}$ , 시간 계수  $b$ 를  $2^{-j}k$ 로 나타내면 이산 웨이블릿 변환은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$W(2^{-j}, k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi_{j,k}(x) dx = \langle f(x), \psi_{j,k} \rangle \quad \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^jx-k) \quad (3)$$

이산 웨이블릿 변환에 있어서 필터 개념을 도입하고, 스케일링 함수  $\phi(x)$ 를 아래와 같이 정의하면

$$\phi(x) = \sqrt{2}\sum_n h_n\phi(2x-n)$$

$\phi(x)$ 와 직교 관계식이 성립하는 웨이블릿 함수는  $\psi(x) = \sqrt{2}\sum_n g_n\phi(2x-n)$ 와 같이 구축할 수 있다. 여기서,  $n$ 은 이산 필터를 정의하는 계수의 개수를 나타내며,  $h_n$ 과  $g_n$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_n h_n h_{n+2m} &= 0 \quad \text{for all positive integer } m \\ \sum_n h_n &= \sqrt{2} \end{aligned} \quad g_n = (-1)^n h_{1-n}$$

상기의 스케일링 함수  $\phi(x)$ 와 웨이블릿 함수  $\psi(x)$ 는 자신은 물론 상호간에도 직교관계를 만족하는 직교 기저함수(orthonormal basis function)이다. 이산 웨이블릿 변환은 이들 직교 기저함수를 이용하여 함수  $f(x)$ 를

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{0,k}\phi_{0,k}(x) + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k}\psi_{j,k}(x) \quad (4)$$

와 같이 분해(decomposition)하는 것이다. 식(4)의 우변의 첫 번째 항은 함수  $f(x)$ 의 최종 웨이블릿 변환 레벨에서 저역 통과 필터링으로 추출된 성분 즉,  $f(x)$ 의 근사성분(approximate component)을 나타내며, 두 번째 항은 각 레벨에 있어서 고역 통과 필터링으로 추출된 상세 성분(detail component)들의 합을 나타낸다. 한편, 분해된 근사성분과 상세 성분을 이용하여 함수를 복구(reconstruction)하는 역 웨이블릿 변환(inverse wavelet transform)에 있어서는

$$c_{j+1,k} = \sum_n h_{k-2n}c_{j,k} + \sum_n h_{k-2n}d_{j,k} \quad (5)$$

의 관계식이 성립한다.

실제 이산 웨이블릿 변환의 적용은 연속 함수  $f(x)$ 의 이산화 자료  $f_k (k = \dots -1, 0, 1, \dots)$ 를 임의 레벨에서의  $f(x)$ 의 근사성분 값으로 간주하고, 스케일링 함수에 따라 결정되는 관계식을 이용하여 그림 2에 보인 바와 같이 하위 레벨에서의 함수  $f(x)$ 의 근사성분과 상세 성분을 추출하는 것이다. 일반적으로 웨이블릿 변환은 비정상 가우시안 노이즈 처리에 우수한 성능을 가지고 있음이 알려져 있다. 아래의 그림 3은 그 일례를 보이고 있다. 본 논문에서는 이러한 wavelet 특성을 활용하면서 동시에 계측시 종종 처리가 어려운 저주파수 성분을 제거하기 위한 방법의 개발에 초점을 맞추었다.

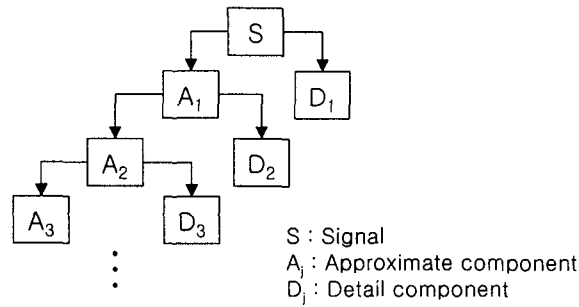
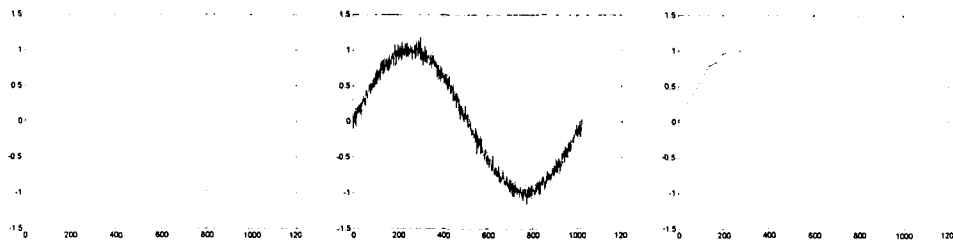


그림 2. 웨이블릿 변환의 알고리즘



(a) 원신호

(b) 노이즈가 첨가된 신호

(c) 웨이블릿 변환 신호

그림 3. 웨이블릿 신호처리 예제

### 3.3 수정된 웨이블릿 변환(Modified Wavelet Transform)

일반적으로 웨이블릿 변환에 의해 제거되는 노이즈 성분은 비정상 가우시안 성분으로 알려져 있다. 따라서, 비가우시안 계열의 노이즈를 처리하기 위하여 중간 필터의 개념을 도입한 것이 수정된 웨이블릿 변환이다(김윤영 등, 2000). 본 논문에서는 이러한 수정된 웨이블릿 변환 개념에서 중간 필터 개념을 저주파수 노이즈의 제거를 위하여 응용하여 사용하였다.

이 방법은 간략히 다음과 같은 과정을 통하여 수행된다.

**Step 1.** 중간 필터를 통해 저주파 노이즈를 제거한다.

$$R = a_0 - a_m$$

여기서  $a_0$ 는 노이즈가 포함된 원신호이고  $a_m$ 은 광대역 중간필터를 통해 얻어진 저주파 신호이다. 이러한 저주파에는 적분에 필요한 성분이 포함될 가능성이 존재하기 때문에 작용깊이를 충분히 하여 적분에 필요한 성분이 손상되지 않도록 필터링을 실시하였다.

**Step 2.** 저주파 신호가 제거된 신호를 웨이블릿 변환에 의하여 가우스 노이즈를 제거한다.

일반적으로 오염된 신호의 가우스 노이즈 강도는 웨이블릿 계수의 중간값 측정에 의해 상당히 정확하게 추정될 수 있음(Mallat, S. G., 1998)이 알려져 있으므로 여기서도 그 방법을 이용하였다. 즉 가우스 노이즈 강도는 레벨에 따라 일정하며,

$$\sigma = \frac{1}{0.6745} \text{median}(|\langle R_1, \psi_{1,k} \rangle| \mid .0 \leq k \leq N/2) \quad (6)$$

식 (6)과 같이 추정된다. 여기서,  $\psi_{1,k} = \sqrt{2}\psi(2t-k)$ 이다. 또한 가우스 노이즈가 정규분포를 따

를 것이므로 95%의 신뢰도를 갖도록 하여  $\mu$ 를  $1.96\sigma$ 로 결정하였다. 문턱값  $\mu$ 에 대하여 상대적으로 크기가 작은 가우스 노이즈는 제거되며, 웨이블릿 축소에서는 널리 사용되는  $\sigma\sqrt{2\log N}$ 을 문턱값  $\lambda$ 로 이용하였다. 또한 축소 방법으로써, 소위 SureShrink 라고 불리는 레벨 의존 축소 방법을 적용하였다. SureShrink 방법은 레벨에 따라 다른 축소 파라미터를 사용하는 것으로, 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\lambda_j = \frac{\lambda_1}{2^{j-1}}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

여기서  $j$ 는 스케일을 의미한다. 또한 축소 함수로서 약 문턱값(soft threshold) 적용함수를 이용하였다.

#### 4. 예제 해석

앞서 제시된 방법의 특성을 바탕으로 계측자료에 기반한 구조해석을 수행하기 위하여 그림 4와 같은 PC 박스형 단면의 단경간 교량을 대상으로 동적 재하 시험을 수행하였다. 수치실험을 위한 구조해석은 상용프로그램인 SAP2000을 사용하였다. 이때, 사용된 예제 구조물의 재료는  $E=33,030,000 \text{ kN/m}^2$ ,  $\nu=0.2$ ,  $\rho=3.852 \text{ t/m}^3$ ,  $A=6.75 \text{ m}^2$ ,  $J=49.51 \text{ m}^4$ ,  $I=19.39 \text{ m}^4$ 으로 가정되었다. 모우드는 충분히 많은 20개의 모우드를 사용하였고, 감쇠비는 각 2%로 가정하였다.

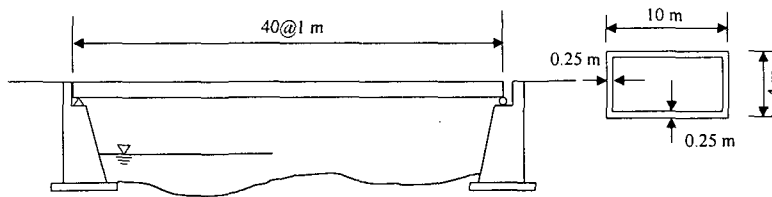


그림 4. 단경간 예제 구조물

모의 실험에 사용될 해석결과를 그림 5와 그림 6, 그림 7로 도시하였다. 그림 8~10은 가상적인 저주파 노이즈를 첨가한 신호를 웨이블릿으로 분해한 것이다. 이때 저주파 노이즈로는 step 함수와 sine 함수 형태로 가정하였으며 크기는 RMS 비율로 10%로 하였다. 그림에서 보는 바와 같이 위쪽에서 2~5번째의 그래프에 저주파가 집중되어 있음을 알 수 있다. 이때 각 노이즈 특성에 따른 그래프의 변화가 특정 그래프에서 집중적으로 표현됨을 볼 수 있다. 이 현상은 비교적 원신호의 손상이 적도록 노이즈 처리가 가능하다는 의미를 내포하고 있다.

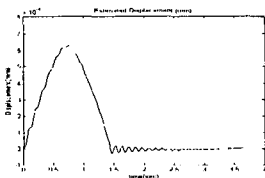


그림 5. 해석된  
응답성분(변위)

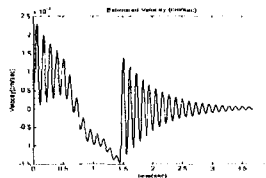


그림 6. 해석된  
응답성분(속도)

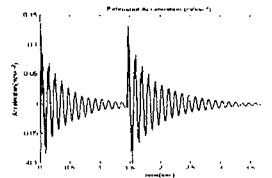


그림 7. 해석된  
응답성분(가속도)

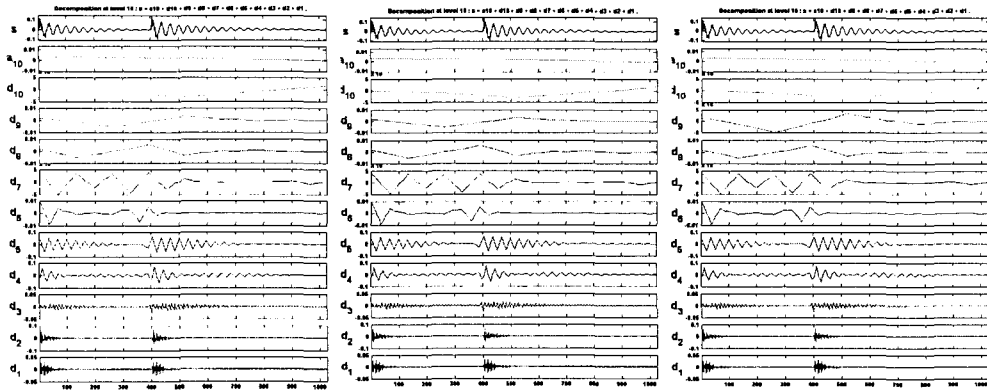
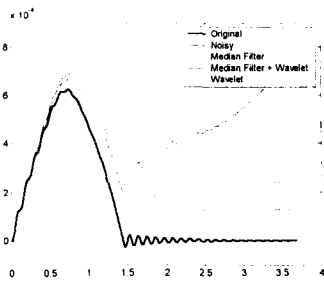


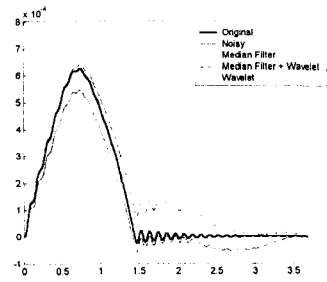
그림 8. 웨이블릿 분해  
(Original Signal)

그림 9. 웨이블릿 분해  
(Step Function Noise)

그림 10. 웨이블릿 분해  
(Sine Noise)

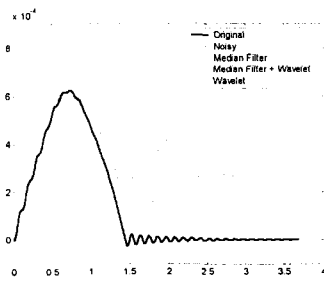


(a) 적분 결과

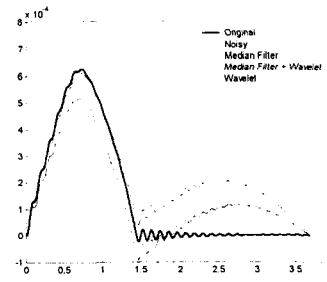


(b) 1차 직선 보정

그림 11. Step Function Noise의 해석 결과



(a) 적분 결과



(b) 1차 직선 보정

그림 12. Sine Noise의 해석 결과

그림 11과 12는 노이즈가 첨가된 신호들의 적분결과를 도식화 한 것이다. 이때 중간필터 크기는 200으로 지정하였으며 또한 필터를 충분히 반복시켜 적분에 필요한 성분까지 제거되지 않도록 하였다. 웨이블릿 축소 과정에서는 쌍직교 웨이블릿인 Daubechies 3번 웨이블릿 함수(wavelet function)를 사용하였고, 레벨 5까지 수행하였다. 또한 적분 방법은 이계 미분방정식의 직접 적분

에 통상 많이 사용되는 안정적 적분법인 Newmak- $\beta$ 법을 적용하였다. 적분결과는 전체적으로 고주파 노이즈의 경우보다 왜곡이 심함을 볼 수 있다. 그림(a)에서는 무처리된 신호보다는 웨이블릿 신호처리인 경우가 우수하고 단순 웨이블릿 신호처리보다 중간필터를 통한 웨이블릿 적분 결과가 원신호에 더욱 접근하는 것을 볼 수 있다. 그림 (b)는 가속도 기록으로부터 변위가 0라고 추정되는 점으로 적분결과를 1차 직선으로 보정한 결과이다. 단순 적분 결과와 웨이블릿 적분결과가 비슷한 양상을 보이고 중간필터만 통과한 경우와 중간필터를 통과하여 웨이블릿 변환까지 거친 신호가 비슷한 양상을 보이는 것을 볼 수 있다.

## 5. 결론 및 추후과제

본 논문에서는 계측 가속도 적분시 큰 문제가 될 수 있는 계측 오차, 특히 저주파 계측오차의 처리를 위해 중간필터링을 통해 저주파 성분을 제거하고 웨이블릿 변환을 이용하여 적분을 수행하는 방안을 제시하였다. 이 방법의 특징은 중간필터링을 사용하는 전처리 단계에 의하여 저주파를 제거하며, 일반적인 정상 노이즈를 웨이블릿 변환의 노이즈 제거 능력을 이용하여 처리된다는데 있다. 예제해석에서 이러한 웨이블릿 변환에 의한 가속도 기록의 적분 성능을 관찰할 수 있었다. 또한, 앞으로 웨이블릿 변환의 노이즈처리 능력을 저주파 노이즈 처리에 적극적으로 활용하기 위해서는 웨이블릿 함수의 개발도 필요하리라 사료된다.

## 참고문헌

1. 양경택, "이동하중을 받는 보의 변위응답 산정을 위한 가속도신호의 적분상 문제점", 전산구조공학회논문집, 제11권, 제4호, 1998, pp. 135-146
2. 이선구, 이성우, 이문택, "교량 진동특성 분석을 위한 실측 가속도의 적분", 전산구조공학회논문집, 제9권, 제4호, 1996, pp.107-115
3. 정범석, 이외득, "응답변환알고리즘을 이용한 동적변위응답의 추정", 대한토목학회논문집, 제20권, 제4-A호, 2000, pp535-544
4. 김윤영, 홍진철, 이남용, "수정된 웨이블릿 축소 기법을 이용한 전달함수의 추정", 한국소음진동공학회, 제10권, 제5호, 2000, pp769-774
5. 박창호, 이동근, "주파수 영역에서의 가속도 기록 보정", 대한토목학회논문집, 제12권, 제4호, 1992, 71-79
6. 최병선, "Wavelet 해석" 세경사, 2001.
7. 이호철, 김윤영, 이용욱, "모드형상의 웨이블릿 변환을 이용한 보의 결함진단", 한국소음진동공학회, 춘계학술대회논문집, 1999, pp 430-435
8. D. E. Newland, "Random vibrations spectral and wavelet analysis", Lonman Sci. & Tech. 3rd ed. 1993
9. Amara Graps, "An Introduction to Wavelets", Computational Science and Engineering, Vol.2, No.2, IEEE, 1995.
10. Mallat, S. G., "A Wavelet Tour Of Signal Processing, Academic Press, USA, 1998