韓國精密工學會 2002年度 秋季學術大會論文集 pp.703~708 KSPE 02F069

일래스토메릭 부싱의 반경방향모드 비선형 점탄성 모델연구

이성범(인제대 기계·자동차공학부), 류재평(인제대 대학원 기계공학과)

A Study of A Nonlinear Viscoelastic Model for Elastomeric Bushing in Radial Mode

S. B. Lee*(Mech. Eng. Dept., Inje University), J. P. Ryu(Mech. Eng. Dept., Inje University)

ABSTRACT

An elastomeric bushing is a device used in automotive suspension systems to reduce the load transmitted from the wheel to the frame of the vehicle. A bushing is an elastomeric hollow cylinder which is bonded to a solid steel shaft at its inner surface and a steel sleeve at its outer surface. The relation between the load applied to the shaft or sleeve and the relative deformation of Elastomeric bushing is nonlinear and exhibits features of viscoelasticity.

A load-displacement relation for elastomeric bushing is important for dynamic numerical simulations. A boundary *value problem for the bushing response leads to the load-displacement relation which requires complex calculations* and is hence unsuitable. Therefore, by modifying the constitutive equation for a nonlinear viscoelastic incompressible material developed by Lianis, the data for the elastomeric bushing material was obtained and this data was used to derive the new load-displacement relation for radial response of the bushing.

After the load relaxation function for the bushing is obtained from the step displacement control test, Pipkin-Rogers model was developed. Solutions were allowed for comparison between *the results of Modified Lianis* model and those of the proposed model. It is shown that the proposed Pipkin-Rogers model is in very good agreement with Modified Lianis model.

Key Words : Elastomeric bushing(일래스토메릭 부싱), Pipkin-Rogers model(핍킨-라저스 모델), Nonlinear viscoelastic incompressible material(비선형 점탄성 비압축성 물질)

1. 서론

일래스토메릭 부싱은 현가 장치에 외력이 가해져 차륜의 자세가 변할 때, 차량의 조종안정성 뿐만 아니라 승차감 등 동적 특성에 영향을 미쳐 현가 장치의 설계시 반드시 고려해야 하는 요소이며, 바깥쪽의 실린더형 슬리브(sleeve)와 안쪽의 실린더형 축 사이에 있는, 가운데가 비어있는 실린더의 형태를 가진다. 본 연구에서는, 자동차 현가 장치의 부싱이 완벽한 탄성체가 아닌 점성 유체와 탄성 고체의 성질을 모두 가지고 있는 비선형 점탄성 비압축성 물질이라는 점을 고려하여 대변형(Large Deformation)과 점탄성학 분야를 기본으로 하여 연구를 진행하였다.

반경방향 모드의 연구에 있어서는 Lianis model을 이용하여 압력형태의 하중과 변형률과의 관계식인 Modified Lianis model을 제안하였으며, 이 Modified Lianis model에 일차원 반경방향 스텝변위 모의제어실험(One-dimensional radial step displacement control simulation)을 수행하여 필요한 기초 데이터를 얻었으며, 이 데이터를 바탕으로 새로운 비선형 점탄성 모델인 Pipkin-Rogers model을 완성하였다.

이 새로운 비선형 점탄성 부싱모델을 완성한 후에는, 컴퓨터를 이용하여 동일한 변위에 대한 일차원 반경방향 변위 제어실험(One-dimensional radial displacement control test)을 수행하였고, '새로 완성된 식'과 '기존의 응용역학방법을 이용한 식'의 결과를 비교하였으며, 두 결과가 원하는 오차범위 내에서 같음이 입증되어, 본 연구의 최종목표인 반경방향 모드에 대한 일래스토메릭 부싱의 비선형 점탄성 모델이 완성되었다.

이렇게 새로 완성된 Pipkin-Rogers model은 부싱의 비선형 점탄성 모델로서, 여러 상수의 값들은 컴

퓨터를 이용하여 구해지게 되지만, 완성된 기본 식은 하중과 변위의 직접관계식으로 동역학적 모의실험에 직접 이용될 수 있는 장점을 가지고 있다.

2. 구조방정식과 비선형 점탄성 모델

2.1 Modified Lianis model

Lianis model은 Stress tensor와 Finite tensor와의 관계로부터 응력과 변형률간의 관계를 정립하고 이를 바탕으로 문제를 해결하여 나가게 된다. 축방향 모드와 회전방향모드의 연구결과를 고려하여 볼 때, 응력과 변형률은 볼테라 적분방정식의 형태를 가지게 되며, 이에 필요한 물질특성함수는 Relaxation의 특징을 보이고 있다.

따라서, 하중과 변형률과의 관계가 축방향모드와 회전방향모드에서 유사한 점을 이용하여 Modified Lianis model을 제안하였으며, 이를 통하여 기초 데이터를 얻었다.

시간을 t, 반경을 r로 놓으면, 반경방향의 변형률 $k(r,t)$와 압력형태의 하중 $F(t)$의 관계인 Modified Lianis model은 식(1)과 같이 정의된다.

$$
\begin{aligned}
F(t) = {} & \left(a+\frac{b}{[1+k^2(r,t)]^2}\right. \\
& \left.+[3+k^2(r,t)][c+dk^2(r,t)]\right)k(r,t) \\
& -[c+dk^2(r,t)][2+k^2(r,t)]k(r,t) \\
& +2k(r,0^+)[P_0(t)+k^2(r,t)Q_0(t)] \\
& +2\int_{0^+}^{t}\left(P_0(t-s)\frac{\partial k(r,s)}{\partial s}\right)ds \\
& +2k^2(r,t)\int_{0^+}^{t}\left(Q_0(t-s)\frac{\partial k(r,s)}{\partial s}\right)ds \\
& +k(r,0^+)\left(P_1(t)+\frac{Q_1(t)}{[1+k^2(r,t)]^2}\right) \\
& [2+k(r,0^+)k(r,t)-k^2(r,t)] \\
& +2k(r,t)\int_{0^+}^{t}\left(P_1(t-s)k(r,s)\frac{\partial k(r,s)}{\partial s}\right)ds \\
& +[2-k^2(r,t)]\int_{0^+}^{t}\left(P_1(t-s)\frac{\partial k(r,s)}{\partial s}\right)ds \\
& +\frac{2k(r,t)}{[1+k^2(r,t)]^2} \\
& \int_{0^+}^{t}\left(Q_1(t-s)k(r,s)\frac{\partial k(r,s)}{\partial s}\right)ds \\
& +\frac{2-k^2(r,t)}{[1+k^2(r,t)]^2} \\
& \int_{0^+}^{t}\left(Q_1(t-s)\frac{\partial k(r,s)}{\partial s}\right)ds
\end{aligned}
\tag{1}
$$

여기서 $P_0(t)$, $Q_0(t)$, $P_1(t)$, $Q_1(t)$, a, b, c, d는 물질의 특성을 나타내고 있으며, Fig. 1에 나타나 있다.

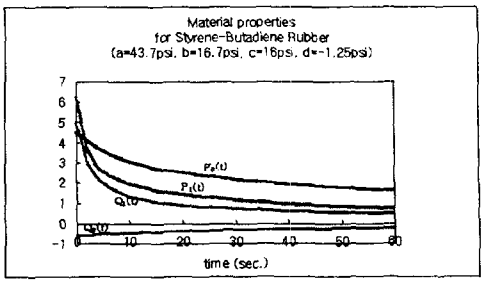

Fig. 1 Material properties for Styrene-Butadiene Rubber

또한, 반경방향의 변위 $u(r,t)$와 변형률 $k(r,t)$의 관계는 다음과 같다.

$$k(r,t)=\frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \tag{2}$$

2.2 모의실험을 통한 비선형 점탄성 모델링

본 연구에서 부싱은 가운데가 비어있는 실린더로 가정되어 관성은 무시하였으며, 반경방향의 변형만을 고려하여 원통좌표계 (r,θ,z)를 사용하였다. 또한, 부싱은 $t<0$ 에서는 변형이 없으며, $t\geq 0$ 에서는 반경방향의 압력형태의 하중 $F(t)$를 받음에 따라 부싱은 바깥쪽 슬리브에 대하여 반경 방향 변위는 $u(r,t)$이며, 이러한 부싱의 반경방향모드는 Fig. 2에 나타내었다.

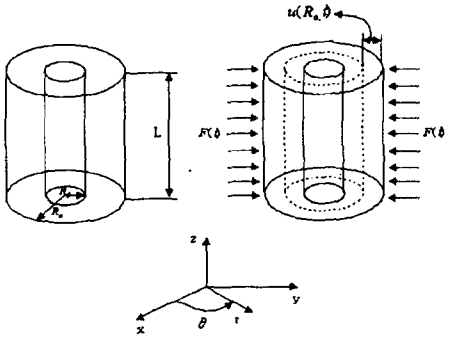

Fig. 2 Bushing in Radial mode

부싱의 길이 L은 내부반경 R_i와 외부반경 R_o에 비하여, End effect를 무시할 만큼 길다고 가정한다. 경계조건으로 내부반경 $r=R_i$에서의 반경방향의 변위를 $u(R_i,t)=0$ 으로 놓고, 외부반경 $r=R_o$에서의 반경방향 변위 $u(R_o,t)$와 외부에서 압력 차원으로 주어지는 하중 $F(t)$와의 관계를 구하여 이를

초기 데이터로 이용한다. 부싱의 내부반경과 외부반경은 $R_i=1$, $R_o=3$으로 각 각 고정하였으며, 이는 필요에 따라서 향후 연구에서 변경이 가능하다. 압력 차원으로 주어지는 하중 $F(t)$와 반경방향의 변위 $u(r,t)$는 무차원화하였으며, 시간의 단위는 초(sec.)를 사용하였다. 또한 시간 $t<0$에서는 주어진 하중도 없으며, 변위도 발생하지 않는 것으로 가정하였다.

Modified Lianis model을 이용하여 시간 t가 $0\le t\le 60$ sec.일 때, $u(R_o,t)$ = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0에 대한 Step displacement control test의 Displacement input과 Load output은 Fig. 3와 Fig. 4에 나타나 있다.

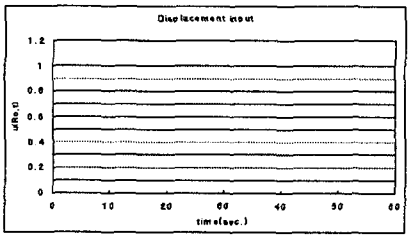

Fig. 3 Displacement input

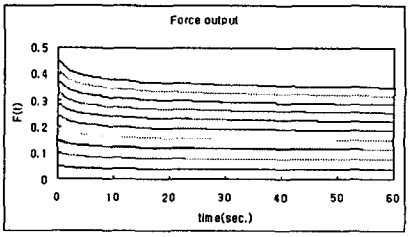

Fig. 4 Load output

Fig. 4에서 하중완화현상을 볼 수 있으며, 하중 $F(t)$는 $u(R_o,t)$ = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0의 각각에 대한 하중완화함수(Load relaxation function) $H(u,t)$가 되며, 이는 외부반경에서의 반경방향 변위인 $u(R_o,t)$의 홀수의 거듭제곱들의 합으로 표현될 수 있으므로, $H(u,t)$은 다음과 같이 표현되었다.

$$H(u,t)=uG_1(t)+u^3G_3(t)+u^5G_5(t) \qquad (3)$$

$0\le t_a\le 60$ sec.에 대하여,

$$\sum_{a=1}^{5}\{H(u^{(a)},t_a)-u^{(a)}G_1(t_a)-(u^{(a)})^3G_3(t_a)-(u^{(a)})^5G_5(t_a)\}^2$$

을 최소화하는 선형 최소자승법을 적용하였고, 불연속한 데이터인 $G_1(t_a)$, $G_3(t_a)$, $G_5(t_a)$ $(a=1,2,3,\cdots,601)$를 구하여 Fig. 5에 나타내었다.

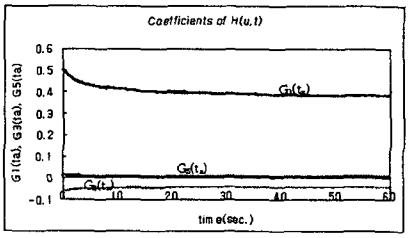

Fig. 5 Coefficients of H(u,t)

또한, 시간 $t_a\,(a=1,2,3,\cdots,601)$에 대한 $G_1(t_a)$, $G_3(t_a)$, $G_5(t_a)$는 식(4)와 같이 지수함수의 합으로 된 함수로 표현될 수 있다.

$$G_i(t)=C_{i1}+C_{i2}e^{-t/\tau_{i2}}+C_{i3}e^{-t/\tau_{i3}} \qquad (4)$$
$$i=1,3,5$$

계수 C_{ij} 와 τ_{ij} 를 구하기 위하여 비선형 최소자승법(Nonlinear least square method)을 이용하였으며, 구하여진 계수 C_{ij} 와 τ_{ij} 를 이용하여 완성된 연속함수 $G_1(t)$, $G_3(t)$, $G_5(t)$의 그래프는 Fig. 6에 나타내었다.

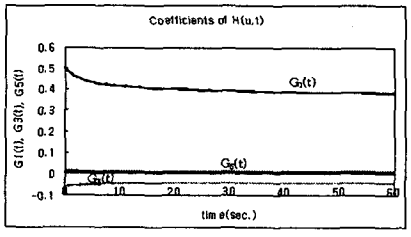

Fig. 6 Coefficients of H(u,t)

그리고 $G_i(t)$와 $G_i(t_a)$를 비교하기 위하여, $G_i(t)$의 $G_i(t_a)$에 대한 상대오차를 2-norm 개념을 도입하여 다음과 같이 정의하였다.

$$Error\ of\ G_i(t) = \frac{||G_i(t)-G_i(t_a)||}{||G_i(t_a)||} \quad \begin{pmatrix} i=1,\ 3,\ 5 \\ a=1,2,3,\cdots,601. \end{pmatrix} \tag{5}$$

$G_1(t)$에 대한 상대오차는 0.13%, $G_3(t)$에 대한 상대오차는 1.36%, $G_5(t)$에 대한 상대오차는 1.36%이며, 비선형 점탄성 모델을 반경 방향 모드에 대하여 정리한 후 완성된 Pipkin-Rogers model은 다음과 같다.

$$F(t) = H(u(R_o,0),t) + \int_0^t \frac{\partial H(u(R_o,s),t-s)}{\partial u(R_o,s)} \frac{du(R_o,s)}{ds}\, ds \tag{6}$$

$$H(u(R_o,t),t) = \left(C_{11} + C_{12}e^{-t/\tau_{12}} + C_{13}e^{-t/\tau_{13}}\right) u(R_o,t) + \left(C_{31} + C_{32}e^{-t/\tau_{32}} + C_{33}e^{-t/\tau_{33}}\right) \{u(R_o,t)\}^3 + \left(C_{51} + C_{52}e^{-t/\tau_{52}}\right) \{u(R_o,t)\}^5$$

$C_{11} = 0.3770,\quad C_{12} = 0.0536,\quad \tau_{12} = 22,\quad C_{13} = 0.0706,\quad \tau_{13} = 2.43$

$C_{31} = -0.0410,\quad C_{32} = -0.0169,\quad \tau_{32} = 6.2,\quad C_{33} = -0.0032,\quad \tau_{33} = 0.03$

$C_{51} = 0.0093,\quad C_{52} = 0.0042,\quad \tau_{52} = 5$

3. Modified Lianis model과 Pipkin-Rogers model을 이용한 결과 비교

Modified Lianis model과 Pipkin-Rogers model을 모두 이용하여 다음에 주어진 동일한 변위에 대하여, 하중 $F(t)$를 구한 다음, 그 결과를 비교하였다. 여기에서는 여러 모의실험을 수행한 것 중, $u(R_o,t)$가 선형적으로 증가하다가 다시 감소하는 경우를 예로 보였다.

첫 번째 비교로서, Modified Lianis model과 Pipkin-Rogers model에 주어진 부싱의 외부반경에서의 변위 $u(R_o,t)$는 다음과 같다.

$$u(R_o,t) = \begin{cases} 0.2t, & 0 \le t \le 5\,\text{sec}. \\ -0.2(t-10), & 5 \le t \le 10\,\text{sec}. \\ 0, & 10 \le t \le 60\,\text{sec}. \end{cases} \tag{7}$$

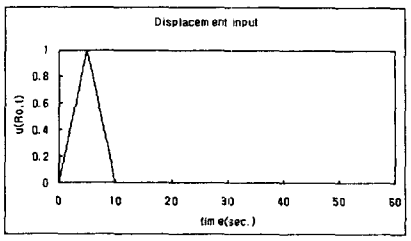

Fig. 7 Displacement input

Fig. 7은 주어진 부싱의 외부반경에서의 변위 $u(R_o,t)$를 나타내며, Fig. 8은 Modified Lianis model의 결과로 나온 하중 $F(t)$를 나타내고 있다.

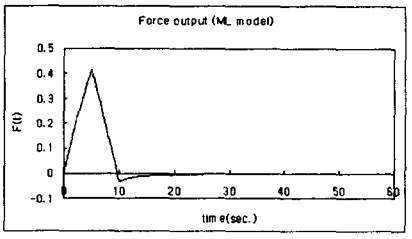

Fig. 8 Load output (ML model)

또한, Fig. 7과 동일한 Displacement input에 대하여 Pipkin-Rogers model을 이용한 결과는 Fig. 9에 보여주고 있다.

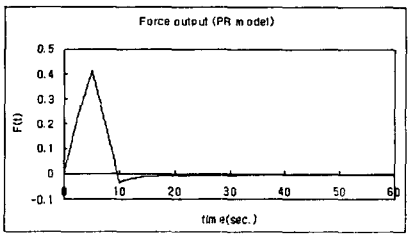

Fig. 9 Load output (PR model)

두 모델의 결과인 $F(t)$를 비교하기 위하여, 상대오차를 E 라 놓고, 놈(2-norm)을 이용하여 다음과 같이 정의하였다.

$$E = \frac{||PR\ model의\ 결과 - ML\ model의\ 결과||}{||ML\ model의\ 결과||} \tag{8}$$

Fig. 8과 Fig. 9에서, 상대오차인 E 는 3.27%로, Modified Lianis model을 이용한 표준적인 응용역학적 방법에 대하여 비선형 점탄성 부싱모델

(Pipkin-Rogers model)이 근접한 결과를 보여주고 있는 것을 볼 수 있다.

두 번째 비교로서, Modified Lianis model과 Pipkin-Rogers model에 주어진 부싱의 외부반경에서의 변위 $u(R_o, t)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u(R_o,t) &= 0.1t, && 0 \le t \le 10\,\text{sec}. \\ &= -0.1(t-20), && 10 \le t \le 20\,\text{sec}. \\ &= 0, && 20 \le t \le 60\,\text{sec}. \end{aligned} \quad (9)$$

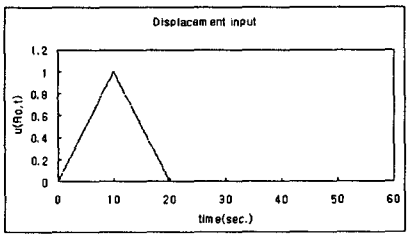

Fig. 10 Displacement input

Fig. 10은 주어진 부싱 외부반경에서의 변위 $u(R_o, t)$를 나타내며, Fig. 11은 Modified Lianis model의 결과로 나온 하중 $F(t)$를 나타내고 있다.

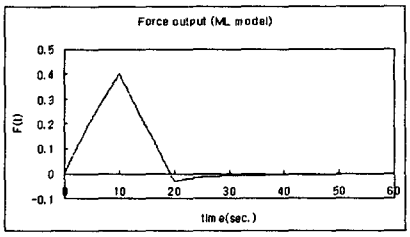

Fig. 11 Load output (ML model)

또한, Fig. 10과 동일한 Displacement input에 대하여 Pipkin-Rogers model을 이용한 결과는 Fig. 12에 보여주고 있다.

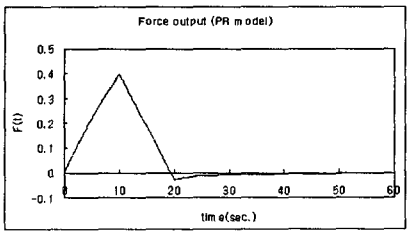

Fig. 12 Load output (PR model)

두 모델의 결과인 $F(t)$를 비교하기 위하여, 상대오차 E를 첫 번째의 예와 같이 놈(2-norm)의 정의를 이용하여 계산하면, 상대오차 E는 1.1%로, Modified Lianis model을 이용한 표준적인 응용역학적 방법에 대하여 비선형 점탄성 부싱모델(Pipkin-Rogers model)이 매우 근접한 결과를 보여주고 있는 것을 알 수 있다.

두 가지 서로 다른 Rise time에 대한 모의실험에 있어서 동일한 최대변위에 대하여 Rise time이 작을수록 상대오차가 큰 것을 보여주는데, 이는 변위의 급격한 변화에 대하여 상대적으로 오차가 크게 발생한다는 것을 말해준다. 즉, 모의실험에 있어서, 주어진 변위의 시간에 대한 변화가 클수록 그 결과에 대한 오차가 크다는 것을 알려주며, 이는 실험에 있어서도 마찬가지로 사료된다.

본 연구에 있어서는 Step displacement control test를 사용하여 모의실험을 수행하였으므로, 상대오차가 5% 미만으로 좋은 결과를 보였다. 하지만, 실제 실험에 있어서는 Step function을 만들 수 없으므로 Ramp displacement control test를 사용하여야 하며, 이를 이용한 Load extrapolation method 사용이 불가피하다. 또한, 장비의 정밀도에 제한이 있으므로 Rise time을 줄이는데 한계가 있으므로, 상대오차가 증가하게 된다.

따라서, 실험에 있어서, 상대 오차를 줄이는 방법으로는 정밀한 장비를 사용하여 Rise time을 가능한 충분히 줄이는 것과, Load extrapolation method를 위하여 정확하고 많은 데이터를 공급하는 것이 보다 중요하다 할 것이다.

4. 결론

반경 방향의 변형에 대한 압력형태의 하중과 변위에 대한 관계를 알아보는데 있어서, 서로 다른 두 가지의 모델이 제안되었다. Modified Lianis model을 이용한 기존의 응용역학방법을 이용한 식은 그 관련 식들이 음함수로 연결됨으로 인하여 동역학적 모의실험에 직접 이용되기에는 어려움이 있었다. 반면에, 새로 제시된 비선형 점탄성 모델(Pipkin-Rogers model)은 여러 상수 값들의 계산과정이 복잡해 보이기는 하나, 그 과정이 컴퓨터를 이용하여 순서대로 일반화되어, 이용되기에 어려움이 없을 뿐 아니라, 완성된 기본 식은 하중과 변위의 직접관계식으로 동역학적 모의실험에 직접 이용될 수 있는 장점을 가지고 있다.

본 연구의 목적은 반경방향 모드에 대한 비선형 점탄성 모델을 완성하는 것이며, Modified Lianis model과 Pipkin-Rogers model의 결과는 5% 미만의 오차범위 내에서 일치하고 있음을 알 수 있었다. 이

는 Pipkin-Rogers model이 Modified Lianis model을 대치할 수 있다는 것을 검증하고 있으므로, 부싱에 대한 새로운 비선형 점탄성모델로서 Pipkin-Rogers model을 사용할 수 있는 근거를 제시한다.

결론적으로, Pipkin-Rogers model은 기존의 축방향모드와 회전방향모드에서와 같이 반경방향모드에서도 부싱의 비선형 점탄성 모델로서 적용이 가능한 것을 알 수 있으며, 여러 모드가 함께 작용했을 때, 부싱의 Coupling에 대한 영향에 대하여 지속적인 연구가 필요하다.

후기

본 연구는 한국과학재단 목적기초연구 (2000-1-30400-024-1)지원으로 수행되었음.

참고문헌

1. L. Boltzmann, "Zur Theorie der Elastischen Nachwirkung," Pogg. Ann. Physik, Vol.7, 624, 1876.
2. B. Gross, Mathematical Structures of the Theories of Viscoelasticity, Paris: Hermann and Co., 1953.
3. C. W. McGuirt and G. Lianis, "Experimental Investigation of Non-Linear, Non-Isothermal Viscoelasticity," International J. of Engineering Science, Vol.7, 579, 1969.
4. A. E. Green and R. S. Rivlin, "The Mechanics of Nonlinear Materials with Memory, Part I," Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.1, 1, 1957.
5. A. E. Green, R. S. Rivlin, and A. J. M. Spencer, "The Mechanics of Nonlinear Materials with Memory, Part II," Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.3, 82, 1959.
6. R. S. Rivlin, "The Constitutive Equations for Certain Classes of Deformations," Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.3, 304, 1959.
7. A. E. Green and R. S. Rivlin, "The Mechanics of Nonlinear Materials with Memory, Part III," Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.4, 387, 1960.
8. Walter. Noll, "A Mathematical Theory of the Mechanical Behavior of Continuous Media," Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.2, 197, 1958.
9. Bernard D. Coleman and Walter Noll, "An Approximation Theorem for Functionals, with Applications in Continuum Mechanics," Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol.6, 355, 1960.
10. Bernard D. Coleman and Walter Noll, "Foundations of Linear Viscoelasticity," Reviews of Modern Physics, Vol. 33, pp. 239-249, 1961.
11. Charles W. McGuirt and George Lianis, "Constitutive Equations for Viscoelastic Solids under Finite Uniaxial and Biaxial Deformations," Transactions of the Society of Rheology, Vol. 14:2, pp. 117-134, 1970.
12. Ronald J. Flowers and George Lianis, "Viscoelastic Tests Under Finite Strain and Variable Strain Rate," Transactions of the Society of Rheology 14:4, 441, 1970.
13. A. C. Pipkin and T. G. Rogers, "A Non-Linear Integral Representation for Viscoelastic behavior," J. of the Mechanics and Physics of Solids, Vol. 16, pp. 59-72, 1968.
14. Alan Wineman, Timothy VanDyke, and Shixiang Shi, "A Nonlinear Viscoelastic Model for One Dimensional Response of Elastomeric Bushings," Ford Durability Center, Department of Mechanical Engineering and Applied Mechanics, University of Michigan, 1995
15. Richard L. Burden, J. Douglas Faires, Numerical Analysis, 5th ed., pp. 435-496, Boston: PWS, 1993.
16. J. Douglas Faires, Richard L. Burden, Numerical Methods, pp. 270-312, Boston: PWS, 1993.
17. J. E. Dennis, Jr., "Nonlinear Least Squares and Equations," The State of the Art in Numerical Analysis, ed. D. Jacobs, pp. 269-312, Academic Press, 1977.
18. J. E. Dennis, Jr., Robert B. Schnabel, Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, pp. 218-238, New Jersey: Prentice-Hall, 1983.
19. Seong Beom Lee, A Study of A Nonlinear Viscoelastic Model of Elastomeric Bushing Response, Ph. D. Thesis, The University of Michigan, Ann Arbor, 1997.
20. Seong Beom Lee, Alan S. Wineman, "A model for nonlinear viscoelastic torsional response of an elastomeric bushing", Acta Mechanica, Vol. 135, No. 3-4, pp. 199-218, 1999.
21. Seong Beom Lee, Alan S. Wineman, "A model for non-linear viscoelastic axial response of an elastomeric bushing", International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol. 34, No. 5, pp. 779-793, 1999.