

## 변위비례식 마찰댐퍼의 특성에 관한 연구

박동훈\*(경희대 대학원 기계공학과), 최명진(경희대 기계산업시스템공학부)

### A Study on the Characteristics of an Amplitude Proportional Friction Damper

D. H. Park (Grad. Sch., Mech. Eng. Dept., KHU), M. J. Choi (Mech. & Ind. Sys. Eng. Dept., KHU)

#### ABSTRACT

An Amplitude Proportional Friction Damper (APFD) system is considered in order to improve the stick-slip characteristics of Coulomb friction damper. The frictional force is proportional to the amplitude in APFD system and the system is non-linear as is Coulomb damper system. The free vibration analysis on an 1-DOF system has conducted to demonstrate the characteristics of the APFD system and the results show that the APFD system has similar damping characteristics to the viscous damper system. It is concluded that the APFD system may become a cost effective substitution for the viscous damper and it also has certain advantages over Coulomb damper system since the APFD system can be designed to work with no stick-slip.

**Key Words :** Amplitude Proportional Friction Damper (변위비례식 마찰댐퍼), Coulomb Damper (쿨롱댐퍼), Viscous damper (점성댐퍼), Free Vibration Analysis (자유진동해석), Stick-Slip (스틱-슬립)

#### 1. 서론

건마찰(乾摩擦, dry friction)은 여러 기계시스템에서 중요한 감쇠원(減衰源, damping source)으로 이용되고 있다. 건마찰댐퍼 혹은, 쿨롱댐퍼(Coulomb damper)는 자동차 구동계의 클러치, 듀얼매스 플라이휠(dual mass flywheel) 및 건물의 내진 시스템(aseismic isolation system) 등에 적용되고 있다.

쿨롱댐퍼를 사용할 경우 마찰력은 시스템의 고유진동수에 전혀 영향을 미치지 않으며, 마찰력이 충분치 못할 경우 공진 시 진폭이 무한대로 발산하는 경우가 발생한다. 한편, 마찰력을 증가시키면 공진 시의 진폭은 감소하나 스틱-슬립(stick-slip)의 발생영역이 넓어져 시스템의 정확한 거동 예측이 어려워진다.

지금까지의 쿨롱댐퍼에 대한 연구는 주로 쿨롱댐퍼 시스템의 스틱-슬립 거동에 대한 정확한 해석에 중점을 두고 있으며 쿨롱댐퍼의 특성 향상에 대한 연구는 제한적이었다. 본 연구에서는 구조가 간단한 쿨롱댐퍼의 장점을 살리면서 쿨롱댐퍼 특성을 개선하기 위하여 진폭비례식 마찰댐퍼의 특성에 대

해 고찰하였다. 진폭비례식 마찰댐퍼란 마찰력이 진폭에 비례하는 댐퍼로서 쿨롱댐퍼와 마찬가지로 비선형적인 특성을 가진다. 그리고, 외부 가진력이 제거 되었을 때 스틱의 발생 없이 항상 시스템의 원점으로 복귀하도록 특성을 설정할 수 있다. 본 논문에서는 먼저 1 자유도 진폭비례식 마찰댐퍼 시스템의 자유진동 특성을 해석하였다. 그리고, 쿨롱댐퍼 및 점성댐퍼와의 감쇠특성을 비교하였다.

#### 2. 변위비례식 마찰댐퍼의 특성

변위비례식 마찰댐퍼의 마찰력은 식(1)과 같이 변위  $x$ 의 절대값에 비례하며 속도  $\dot{x}$ 의 반대 방향으로 작용한다고 가정한다. 이러한 특성을 그림으로 나타내면 Fig. 1과 같다.

$$F = -d |x| \text{sign}(\dot{x}) \tag{1}$$

where,  $d$ : constant

$$\text{sign}(x) = +1, \text{ if } \dot{x} > 0, = -1, \text{ if } \dot{x} < 0$$

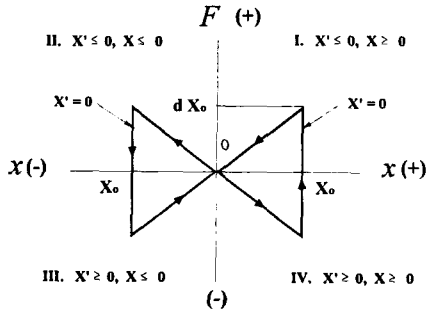


Fig. 1 Characteristics of an Amplitude Proportional Friction Damper (APFD)

### 3. 자유진동 해석

Fig. 2는 변위비례식 마찰댐퍼를 갖는 1자유도 시스템의 모델을 나타낸다. 이러한 진동시스템의 운동방정식은 질량  $m$ 의 속도가 +일 경우와 -일 경우에 대해 각각 달라지므로 비선형 방정식이 된다.

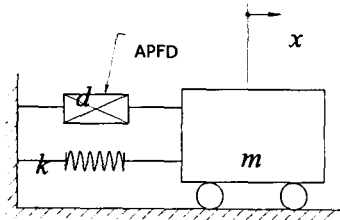


Fig. 2 A vibration system model having an APFD

변위비례식 마찰댐퍼 시스템의 운동방정식을 풀기 위해 한 사이클을  $\dot{x}$  및  $x$ 의 부호에 따라 Fig. 1과 같이 4개의 선형구간으로 나누어 생각할 수 있다. 그리고 각 구간에서는 아래와 같은 운동방정식 (2)와 (3)이 반복적으로 적용된다.

$$I. \dot{x} \leq 0, \quad x \geq 0 \quad \text{and} \quad III. \dot{x} \geq 0, \quad x \leq 0$$

$$\ddot{x} + \omega_d^2 x = 0 \quad (2)$$

$$II. \dot{x} \leq 0, \quad x \leq 0 \quad \text{and} \quad IV. \dot{x} \geq 0, \quad x \geq 0$$

$$\ddot{x} + \omega_d'^2 x = 0 \quad (3)$$

$$\text{where, } \omega_d = \omega_n \cdot \sqrt{(1-\eta)}$$

$$\omega_d' = \omega_n \cdot \sqrt{(1+\eta)}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \eta = \frac{d}{k}$$

$$\delta = \frac{\omega_d'}{\omega_d} = \sqrt{\frac{(1+\eta)}{(1-\eta)}}$$

먼저 구간 I에서 초기조건을  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0$ 이라 가정하고 식(2) 및 (3)의 해를 조화운동(harmonic motion)으로 가정하여 임의의 사이클  $n$ 에 대한 해를 구하면 다음과 같다.

$$\text{Interval I. } (x \leq 0, \quad x \geq 0)$$

$$t \geq \pi \left[ \frac{(n-1)}{\omega_d} + \frac{(n-1)}{\omega_d'} \right],$$

$$t \leq \pi \left[ \frac{(n - \frac{1}{2})}{\omega_d} + \frac{(n-1)}{\omega_d'} \right] \quad (4)$$

$$x(t) = \frac{x_0}{\delta^{2(n-1)}} \cos \left[ \omega_d t - \pi(n-1) \left( 1 + \frac{1}{\delta} \right) \right]$$

$$\text{Interval II. } (x \leq 0, \quad x \leq 0)$$

$$t \geq \pi \left[ \frac{(n - \frac{1}{2})}{\omega_d} + \frac{(n-1)}{\omega_d'} \right],$$

$$t \leq \pi \left[ \frac{(n - \frac{1}{2})}{\omega_d} + \frac{(n - \frac{1}{2})}{\omega_d'} \right] \quad (5)$$

$$x(t) = \frac{-x_0}{\delta^{2(n-\frac{1}{2})}} \sin \left[ \omega_d' t - \pi \left\{ (n-1) + (n - \frac{1}{2}) \delta \right\} \right]$$

$$\text{Interval III. } (x \geq 0, \quad x \leq 0)$$

$$t \geq \pi \left[ \frac{(n - \frac{1}{2})}{\omega_d} + \frac{(n - \frac{1}{2})}{\omega_d'} \right],$$

$$t \leq \pi \left[ \frac{n}{\omega_d} + \frac{(n - \frac{1}{2})}{\omega_d'} \right] \quad (6)$$

$$x(t) = \frac{-x_0}{\delta^{2(n-\frac{1}{2})}} \cos \left[ \omega_d t - \pi \left( n - \frac{1}{2} \right) \left( 1 + \frac{1}{\delta} \right) \right]$$

$$\text{Interval IV. } (x \geq 0, \quad x \geq 0)$$

$$t \geq \pi \left[ \frac{n}{\omega_d} + \frac{(n - \frac{1}{2})}{\omega_d'} \right],$$

$$t \leq \pi \left[ \frac{n}{\omega_d} + \frac{n}{\omega_d'} \right] \quad (7)$$

$$x(t) = \frac{x_0}{\delta^{2n}} \sin \left[ \omega_d' t - \pi \left\{ (n - \frac{1}{2}) + n\delta \right\} \right]$$

이상과 같이 첫번째 사이클을 4구간으로 나누어 해석한 결과 각 구간별로  $\tau_{1,3} = \pi / 2 \omega_d, \tau_{2,4} = \pi /$

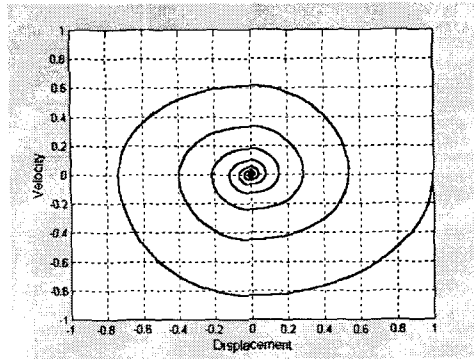


Fig. 3 Phase trajectory of an APFD system ( $\eta = 0.3$ ,  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $x_0 = 1$ , X-axis : Displacement, Y-axis : Velocity)

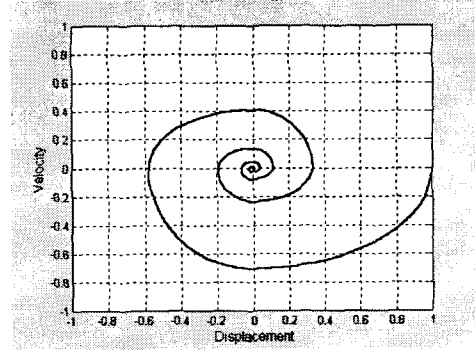


Fig. 5 Phase trajectory of an APFD system ( $\eta = 0.5$ ,  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $x_0 = 1$ , X-axis : Displacement, Y-axis : Velocity)

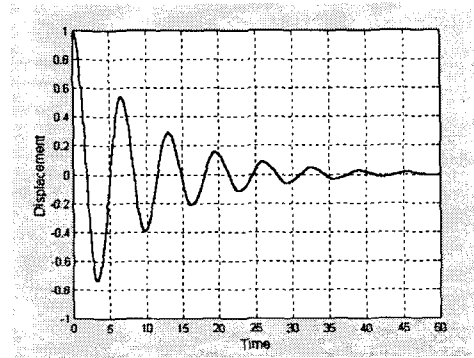


Fig. 4 Response of an APFD system ( $\eta = 0.3$ ,  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $x_0 = 1$ , X-axis : Time, Y-axis : Displacement)

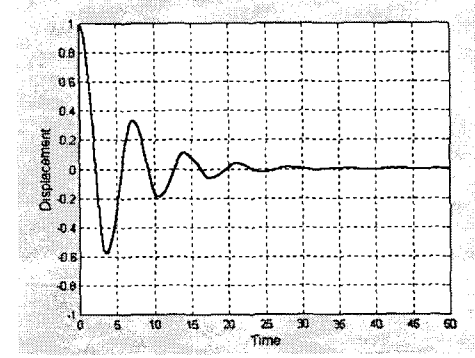


Fig. 6 Response of an APFD system ( $\eta = 0.5$ ,  $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $x_0 = 1$ , X-axis : Time, Y-axis : Displacement)

$2\omega_d$ 의 주기를 가짐을 알 수 있다. 즉, 감쇠가 없는 시스템의 자유진동주기  $\tau = 2\pi/\omega_n$ 을 4등분한 주기와 유사함을 알 수 있다. 즉, 변위비례식 마찰 댐퍼 시스템의 주기  $\tau_A$ 는 식(8)과 같다.

$$\tau_A = \pi \left( \frac{1}{\omega_d} + \frac{1}{\omega_d'} \right) \quad (8)$$

식(4)~(7)을 이용하여 변위비례식 마찰 댐퍼 시스템의 위상궤적(phase trajectory)과 응답(response)을 그려보면 Fig. 3~Fig. 6과 같다.

한편, Fig. 2와 같은 시스템에서  $d$ 의 값을  $k$ 의 값보다 작게 설정하여 스프링의 반발력이 마찰력보다 항상 크게하면 스틱-슬립 현상은 발생하지 않는다. 이 조건을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\eta = \frac{d}{k} < 1 \quad (9)$$

만일  $\eta = 1$ 이라면, 즉  $d = k$ 일 경우에는 초기상태  $x = x_0$ 인 상태를 그대로 유지한다.

#### 4. 감쇠특성 비교

마찰력이  $F_0$ 인 쿨롱 댐퍼 시스템의 자유진동 응답특성을 해석해 보면 진폭은 매 사이클당  $4F_0/k$ 씩 일정하게 감소함을 알 수 있다. 즉, 쿨롱 댐퍼 시스템의 진폭감소율은 다음과 같이 시간  $t$ 의 1차식으로 표현된다. (Fig. 7)

$$x = -\frac{4F_0}{k} \left( \frac{1}{\tau_c} \right) t + x_0 \quad (10)$$

$\tau_c$ 는 주기로써  $\tau_c = 2\pi/\omega_n$ 이다. 만일, 변위비례식 마찰 댐퍼와 쿨롱 댐퍼의 한 사이클당 에너지 손실량을 같게 한다면 쿨롱 댐퍼의 감쇠가 더 빨리 진행되거나 쿨롱 댐퍼의 경우 원점으로 돌아가기 전에 반드시 스틱이 발생한다. 이러한 특성은 대부분의 진동절연 시스템에 있어 바람직하지 못한 현상이다.

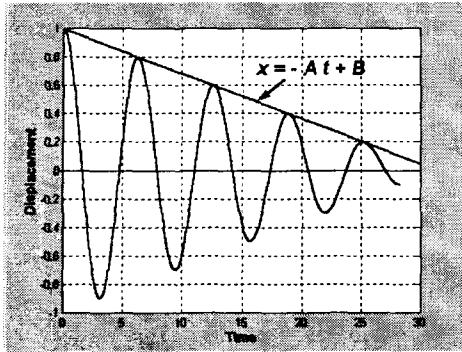


Fig. 7 Response of a Coulomb damper system  
( $F_0 = 0.05, m = 1, k = 1, x_0 = 1$ , X-axis : Time,  
Y-axis : Displacement)

점성댐퍼 시스템의 자유진동시 진폭은 지수함수적으로 감소한다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x = x_0 e^{-\xi \omega_n t} \quad (11)$$

여기서  $\xi$ 는 감쇠비(damping ratio)이다. 점성댐퍼 시스템의 주기  $\tau_v$ 는  $\tau_v = 2\pi / \omega_n$ 이다.

변위비례식 마찰댐퍼 시스템에서 진폭은 매 사이클당  $x_0 / \delta^2$ 의 비율로 감소한다. 그리고 Fig. 4와 Fig. 6을 보면 진폭의 감소 모양은 점성댐퍼의 경우와 매우 흡사함을 알 수 있다. 따라서, 변위비례식 마찰댐퍼 시스템의 진폭감소율을 지수함수로 가정하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = x_0 e^{\left(\frac{1}{\tau_A} \ln \frac{1}{\delta^2}\right)t} \quad (12)$$

### 5. 등가점성감쇠비

식(12)를 이용해 각 사이클 후의 진폭을 계산해 보면 식(7)과 잘 일치한다. 따라서, 식(11)과 식(12)의 지수함수의 상수를 같게 놓으므로써 변위비례식 마찰댐퍼의 등가점성감쇠비(equivalent viscous damping ratio)를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\xi_{eq} = -\frac{1}{\tau_A \omega_n} \ln \frac{1}{\delta^2} \quad (13)$$

그리고, 식(13)을 전개하여  $\xi_{eq}$ 를  $\eta$ 의 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$\xi_{eq} = -\frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{(1-\eta)(1+\eta)}}{\sqrt{(1+\eta)+\sqrt{(1-\eta)}}} \ln \frac{(1-\eta)}{(1+\eta)} \quad (14)$$

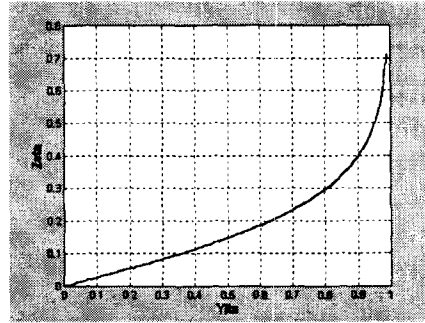


Fig. 8 Equivalent viscous damping ratio  $\xi_{eq}$  of an APFD system (X-axis :  $\eta$ , Y-axis :  $\xi_{eq}$ )

Fig. 8은 식(14)를 그래프로 나타낸 것으로서  $\eta$ 에 대한  $\xi_{eq}$  값의 변화를 보여주고 있다. 따라서, 임의의  $\eta$  값을 가진 변위비례식 마찰댐퍼 시스템은 이에 해당하는  $\xi_{eq}$  값을 가진 점성댐퍼 시스템과 동일한 진폭감소율을 갖는다. Fig. 9는  $\eta = 0.5$ 의 변위비례식 마찰댐퍼 시스템과, 이에 해당하는  $\xi_{eq} = 0.158$ 의 점성댐퍼 시스템의 응답을 비교한 것으로서 각 시스템의 주기는 다르나 진폭감소율은 동일함을 알 수 있다.

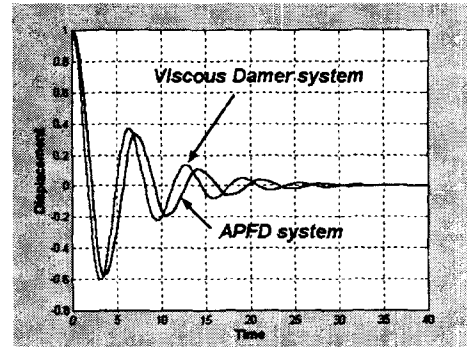


Fig. 9 Response of viscous damper and APFD system  
( $\eta = 0.5, \xi_{eq} = 0.158$ , X-axis : Time, Y-axis : Displacement)

### 6. 결론

본 연구를 통하여 변위비례식 마찰댐퍼는 점성댐퍼와 동일한 진폭감소특성을 가지고 있음이 파악되었다. 따라서, 점성댐퍼를 보다 경제적인 방법으로 대체할 수 있는 가능성을 모색할 수 있게 되었다.

또한, 변위비례식 마찰댐퍼는 항상 시스템의 원점으로 복귀하도록 특성설정이 가능하므로 쿨롱댐퍼보다 진동절연 시스템에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

### 참고문헌

1. William T. Thomson, "Theory of Vibration with Application (5e 번역판)", 사이텍미디어, 2001.