

준 평형 압전 구동기의 효과적 모델링 기법

박종규*(포항공대 대학원 기계공학과), 문원규(포항공대 기계공학과)

The Effective Modeling of Piezoelectric Actuator in Quasi-static Equilibrium Condition

J. Park(Mechanical. Eng. Dept. Postech), W. Moon(Mechanical Eng. Dept., Postech)

ABSTRACT

A method to derive the constitutive relations of a piezoelectric bender actuator is developed here. The constitutive relations are derived from the geometry, material properties of the actuator. The very complicated constitutive relations can be easily calculated by use of symbolic function in Mathematica. The developed program can calculate the constitutive relations for the unimorph bender made by attaching a short piezoelectric beam on a longer metal beam. The program can also calculate the constitutive relations of a piezoelectric bender with spring at its end

Key Words : Piezoelectric material(압전 물질), Constitutive equations(구성 방정식), Quasi-static (준평형), Program (프로그램)

1. 서론

트랜스 듀서는 한 영역의 에너지를 다른 영역의 에너지로 변환시켜주는 장치를 말한다. 즉 비전기적인 에너지를 전기 에너지 형태로 변환하거나 전기 에너지를 비전기적인 에너지로 전환시켜주는 장치를 말한다. 대표적인 것으로서 구동기 역할을 하는 모터나 각종 센서를 들 수 있다. 센서와 구동기 분야는 1980 년대 후반에 MEMS(Micro Electro Mechanical System)가 활성화됨에 따라 미세 환경에 적용되는 요소로 새로이 주목 받고 있다. 미세 시스템이 작은 공간에서 충분한 기능을 발휘하기 위해서는 시스템 프로세싱(Processing) 과정에서 필요 정보를 얻기 위한 센서(Sensor) 부분과 구동을 위한 구동기(Actuator) 부분이 함께 구축되어야 하며 각각을 소형화, 경량화해야 한다. 기존의 시스템에는 널리 쓰이지 않았으나 미세 시스템에 널리 쓰이고 있는 구동방식 중 하나는 에너지 변환 물질이다. 그 대표적인 예로 PZT 와 같은 압전 물질을 비롯한 형상 기억 합금(Shape memory alloy), 기능성 폴리머(polymer) 등의 기전 에너지 변환 물질을 들 수 있다.

이들 중 압전 물질은 에너지 효율성(Electromechanical coupling effect)이 높고, 응답속도가 빠르며 파워 밀도(Power density) 또한 다른 구동기용 물질

에 비해 뒤지지 않기 때문에 널리 이용되고 있다. 일반적으로 압전 물질에 전기적 에너지를 가하면 일부는 기계적 에너지로 전환되어 변형(Strain)이 발생하게 된다. 이러한 압전 성질을 이용하여 바이메탈(Bimetal)에서와 같이 길이 방향 변형을 굽힘 변형으로 만들 수 있는데 이를 유니모프(Unimorph) 또는 바이모프 벤더(Bimorph Bender)라 부른다. 즉 유니모프 벤더는 압전체 박판을 다른 물질로 된 판에 부착하여 바이메탈과 같이 굽힘 기능을 하도록 만든 것이고 바이모프 벤더는 압전판 두 개를 부착하여 쓰는 것이다. 이러한 방식은 압전체를 구동기에 사용할 때 비교적 큰 변위를 얻을 수 있고 정밀 위치제어에 용이하기 때문에 널리 쓰이고 있다.

이와 같은 유니모프나 바이모프 구동기의 최적 설계를 위해서는 보다 정확하고 간편한 압전 구성 방정식이 필수적이다. 1990 년 초반에 Jan. G. Smits 는 보형상의 유니모프와 바이모프 구성방정식을 Total Internal Energy Method 를 이용하여 유도했다^{1,2}. 그러나 여기에는 전극의 영향이나 복잡한 형태의 경계조건, 형상에 대한 고려가 없을 뿐만 아니라 보 형상에만 국한되어 있으며 유도과정이 매우 복잡하여 다른 경계조건에 적용되기에 어려운 점이 있다. 따라서 보다 간편하고 효과적인 구성방정식 유도의 필요성이 제기되었다. 본 연구에서는 물질 특성 방정식, 준 평형 가정에 의한 오일러빔 이론

(Euler Beam Theory), 그리고 기전 커플링 효과 (Electromechanical Coupling Effect)를 적용해서 최적 설계가 보다 용이한 압전 구성 방정식을 유도하는 방식에 대하여 다루었다.

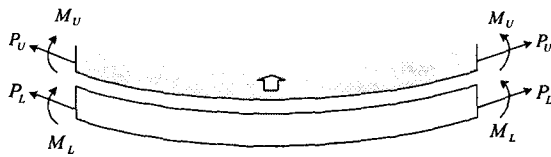
2. 압전 구성 방정식의 유도 기법

압전 구성 방정식을 최대한 간단화 시키기 위해서는 공통적으로 다음과 같은 조건을 동시에 만족해야 하며 몇 가지의 가정을 적용해야 한다.

- (I) 힘과 모멘트의 준 평형조건
- (II) Beam theory 에 의한 곡률 반경식
- (III) Geometry compatibility condition

이와 함께 길이방향 변형을 이용한 유니모프나 바이모프 등의 구성방정식을 구하기 위해 필요한 가정을 정리하면 다음과 같다.

- (i) 두께방향의 응력 분포는 1-3 방향 압전 효과에 의해 일정하게 분포된 응력과 굽힘현상에 의한 응력을 합하는 것에 의해 결정된다.
- (ii) 오일러빔(Euler Beam) 이론을 적용한다.
- (iii) 곡률 반경은 각 층의 두께에 비해 매우 크다.
- (iv) 각 층의 접합면에서 미끄러짐 현상은 전혀 없다.



Y_S : Young's modulus of lower plate

s_{11}^E : constant-electric-field-intensity flexibility of piezoelectric material

Fig. 1 Schematic diagram of the layers after deformation

Fig. 1에서 나타낸 바와 같이 각 힘과 모멘트의 평형 조건을 나타내면 식 (1)과 (2)가 유도된다.

$$P_L + P_U = 0 \Rightarrow P_L = -P_U = P \quad (1)$$

$$\therefore M_L + M_U + P(t_L + t_U)/2 = M_a \quad (2)$$

그리고 가정 (iii)과 근사를 적용하면

$$\frac{1}{\rho - t_U/2} \approx \frac{1}{\rho + t_L/2} = \frac{1}{\rho} = R \quad \text{이 고}$$

$$\text{따라서 } M_L = Y_S I_L \frac{1}{\rho}, \text{ and } M_U = \frac{I_U}{s_{11}^E} \frac{1}{\rho} \quad (3)$$

이 유도된다.

식 (1)~(3)에 의해 힘은 아래 식 (4)로 나타내진다.

$$P = \frac{1}{t_L} \cdot \frac{2}{1+\xi} \cdot M_a - 2 \cdot \frac{1+\eta\xi^3}{1+\xi} \cdot \frac{Y_S I_L}{t_L} \cdot \frac{1}{\rho} \quad (4)$$

$$\text{where } \xi = t_U/t_L, \text{ and } \eta = 1/(Y_S \cdot s_{11}^E)$$

(iv) 가정에 의해 접합면에서의 변형률이 같다는 조건을 적용하면 식 (5)가 유도된다.

$$\frac{P}{Y_S w t_L} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{t_L}{2} \right) = -\frac{s_{11}^E}{w t_U} P + \frac{1}{\rho} \left(\frac{t_U}{2} \right) + d_{31} \left(-\frac{e}{t_U} \right) \quad (5)$$

식 (4)와 (5)를 정리하여 곡률반경과 굽힘모멘트와 전압간의 관계를 구하면 다음과 같다.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1+\eta\xi}{\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1} \cdot \frac{M_a}{Y_S I_L} + \frac{6\eta(1+\xi)}{\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1} \cdot \frac{d_{31}}{t_L^2} \cdot e \quad (6)$$

이제 위 전극에서의 전속 밀도(Electric Flux Density, D)와 굽힘 모멘트와 전압간의 관계를 유도하기 위해 먼저 전속 밀도에 의한 응력이 일정하다고 가정하면 전속 밀도는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$D_3 = d_{31} \cdot T_1 + \epsilon_{33}^T E = d_{31} \cdot \left(-\frac{P}{w t_U} \right) + \epsilon_{33}^T \left(-\frac{e}{t_U} \right) \quad (7)$$

식(4)를 (7)식에 대입하고 이를 정리하면 다음과 같이 전속 밀도와 굽힘모멘트와 전압간의 관계를 유도할 수 있다.

$$D_3 = \frac{6\eta(1+\xi)}{\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1} \cdot \frac{d_{31}}{wt_L^2} \cdot M_a + \left[1 - \frac{k_{31}^2(1+\eta\xi^3)}{\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1}\right] \cdot \frac{\varepsilon_{33}^T}{t_U} \cdot e \quad (8)$$

따라서 압전체가 부착된 전체 구성방정식은 다음과 같이 정리된다.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(1+\eta\xi) \cdot \frac{M_a}{Y_s I_L} + 6\eta(1+\xi) \cdot \frac{d_{31}}{t_L^2} \cdot e}{\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1} = A \times M_a + B \times e \quad (6')$$

$$D_3 = \frac{6\eta(1+\xi)}{\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1} \cdot \frac{d_{31}}{wt_L^2} \cdot M_a + \left[1 - \frac{k_{31}^2(1+\eta\xi^3)}{\eta^2\xi^4 + 4\eta\xi^3 + 6\eta\xi^2 + 4\eta\xi + 1}\right] \cdot \frac{\varepsilon_{33}^T}{t_U} \cdot e = C \times M_a + K \times e \quad (8')$$

3. 외팔보 형상 구동기의 구성방정식 유도

유도 과정은 다음과 같이 정리된다.

- (i) 평형조건을 적용해서 굽힘 모멘트의 분포를 구한다.
- (ii) 곡률 반경식을 x 에 대해 적분한다.
- (iii) 경계조건을 적용한다.

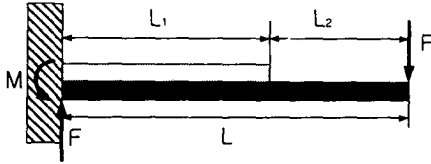


Fig. 2 Schematic diagram of a piezoelectric actuator

이러한 구성방정식은 곡률반경 관계식을 적분해서 경계조건을 적용함으로써 유도될 수 있다. 굽힘 모멘트의 분포는 다음과 같이 나타나지게 된다.

$$\therefore M_a = F(x-L) \quad (9)$$

- (i) $0 \leq x \leq L_1$ 의 구간

(6')식에 (9)식을 대입하면 다음과 같다.

$$\therefore \frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} = Ae + B(F(x-L)) \quad (10)$$

이를 x 에 대해 적분하고 경계조건을 대입하면 식 (11)과 (12)로 유도된다.

$$\alpha = \frac{dv}{dx} = A\left[F(-Lx + \frac{x^2}{2})\right] + Bex \quad (11)$$

$$v = A\left[F(-\frac{1}{2}Lx^2 + \frac{1}{6}x^3)\right] + \frac{1}{2}Bex^2 \quad (12)$$

- (ii) $L_1 \leq x \leq L (= L_1 + L_2)$ 의 구간

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_a}{EI} = \frac{F}{EI}(x-L) \quad (13)$$

$$\alpha = \frac{dv}{dx} = \frac{F}{EI}\left(\frac{1}{2}x^2 - Lx\right) + C_1 \quad (14)$$

$$v = \frac{F}{EI}\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}Lx^2\right) + C_1x + C_2 \quad (15)$$

- (iii) 앞선 영역별 유도식에 L_1 에서의 변위와 각도가 같다는 경계조건을 적용하면 변위와 힘과 전압간의 관계를 알 수 있다.

$$C_1 = BeL_1 + A(-LL_1 + \frac{L_1^2}{2})F + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}L_1^2 - LL_1\right)F \quad (16)$$

$$C_2 = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{6}L_1^3 + \frac{1}{2}LL_1^2\right)F - C_1L_1 + \frac{1}{2}BeL_1^2 + A\left(-\frac{1}{2}LL_1^2 + \frac{1}{6}L_1^3\right)F \quad (17)$$

$$v|_{x=L} = \left[\frac{-12L^3(1/Y_s) + L^2L_1(36/Y_s - 3Aw_t^3)}{3wt_L^2} + \frac{L_2(12/Y_s - Aw_t^3) + 3LL_1^2(-12/Y_s + Aw_t^3)}{3wt_L^2} \right] F + B\left(\frac{1}{2}L_1^2 - LL_1\right)e \quad (18)$$

- (iv) 전하와 힘 및 전압간의 관계를 유도하기 위해 (8')식에 (9)식을 대입하여 x 에 대해 적분하고 $x = L_1$ 을 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$q = w \int (CF(x-L) + Ke)dx + C_1$$

$$q = w\left(CF\left(\frac{1}{2}x^2 - Lx\right) + Kex\right) \quad (19)$$

$$\therefore q|_{x=L_1} = (BF\left(\frac{1}{2}L_1^2 - LL_1\right) + KL_1we)$$

따라서 앞선 (18), (19)식을 각각 정리 하면 다음과 같은 행렬 꼴로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} v \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F \\ e \end{bmatrix} \quad (20)$$

이와 같이 다양한 경계조건과 압전의 형상에 따른 압전 구성방정식을 유도하기 위하여 ‘Mathematica’ 패키지의 “Symbolic calculation” 기능을 이용하여 프로그래밍하였다. Fig. 3 은 위층을 PZT4 로 설정하였고 아래 층을 Aluminum 으로 설정하여 PZT4 와 Al 의 두께 비에 따른 각 행렬 변수를 나타내었다. 입력으로 전압을 가해서 나오는 변위간의 관계를 나타내는 a_{12} 를 나타낸 그래프에서 알 수 있듯이 두께에 따른 최적 비는 2~4 임을 알 수 있다. 따라서 본 연구 결과로 작성된 프로그램은 각 변수 값에 따른 압전 효과 변화등을 손쉽게 알아볼 수 있게 하므로 압전체를 이용한 구동기 등의 최적화된 설계를 용이하게 한다.

Input parameter	Size
Length of PZT4	$20 \times 10^{-3}(\text{m})$
Total length	$30 \times 10^{-3}(\text{m})$
Thickness of PZT4	$1 \times 10^{-3}(\text{m})$
Compliance of Al	$2.7322 \times 10^{-12}(\text{m}^2/\text{N})$
Compliance of PZT4	$12.3 \times 10^{-12}(\text{m}^2/\text{N})$
Piezoelectric constant	$123 \times 10^{-12}(\text{C}/\text{N})$
Dielectric constant	$1300 \times 1.00059(\text{F}/\text{m})$
Width	$4 \times 10^{-3}(\text{m})$
Thickness ratio	T_P/T_M

Table 1 Comparison of measured roughness data

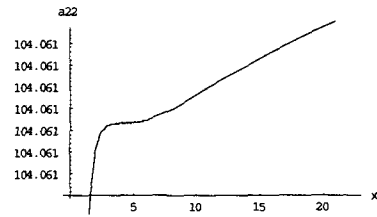
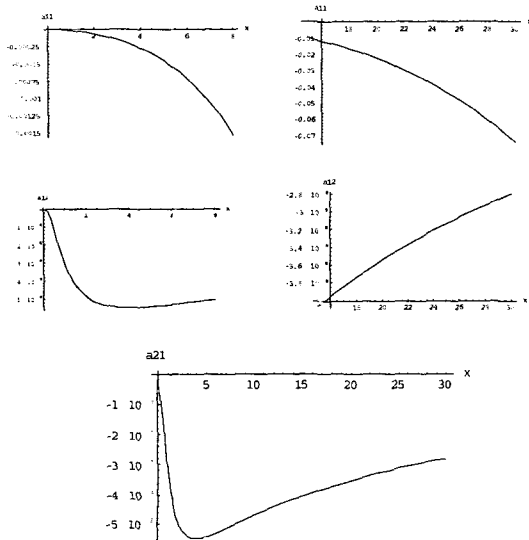


Fig. 3 Simulation result by changing thickness ratio

4. 결론

앞서 살펴 본 바와 같이 본 연구에서는 압전 구동기를 이용한 모델링 과정에서 필요한 압전 구성방정식을 유도하는 과정을 개발하고 이를 컴퓨터를 통해 자동적으로 계산될 수 있도록 프로그램을 작성하였다. 압전 물질은 일반적으로 비등방성 성질을 가지고 있어서 압전체를 포함한 구조의 해석적인 구성방정식을 구하기는 매우 복잡하다. 특히 경계 조건이나 압전의 형상이 바뀌거나 새로운 구조물과 결합될 경우 설계인자를 포함한 전체 구조물의 구성방정식을 손으로 직접 유도하기는 불가능에 가깝다. 본 연구에서는 적절한 가정을 통한 근사해를 자동적으로 구하는 컴퓨터 프로그램을 Mathematica package 를 이용해서 작성하였다. 이로써 매우 편리하게 구성방정식을 유도할 수 있게 되었으며 이를 이용하여 압전체를 포함한 구동기의 최적화 작업을 손쉽게 할 수 있게 하였다. 이러한 프로그램을 조금 더 확장하면 Multilayer bender 등과 같이 다양한 종류의 Bender 의 기전 특성을 구하는 프로그램으로 발전시킬 수 있다.

후기

본 연구는 학술진흥재단의 “PZT 압전 벤더의 압전 구성 방정식 유도기법 연구”를 통해 수행되었다.

참고문헌

1. Smits, J.G. Choi, W. “The Constituent Equations of Piezoelectric Heterogeneous Bimorphs”, *Ultrasonics, IEEE Transactions on Ferroelectrics and Frequency Control*, Vol. 38 Issue. 3, pp. 256–270 May 1991
2. Jan G. Smits, Susan I. Dalke and Thomas K. Cooney, “The Constituent Equations of Piezoelectric Bimorphs”, *Sensors and Actuators A*, vol.28 pp. 41–61 1991