

다단 보 구조에서의 티모센코 보요소 모델링 오차 개선에 관한 연구

이용덕*(LG이노텍), 홍성욱(금오공과대학교), 이종원(한국과학기술원)

Improvement of the Timoshenko beam based finite element model for multi-stepped beam structures

Y. D. Lee(LG Innotek Co.), S. W. Hong(KNIT), C. W. Lee(KAIST)

ABSTRACT

The Timoshenko beam model has been acknowledged as the most accurate model for representing beam structures. However, the Timoshenko beam model may give rise to significant error when it is applied to multi-stepped beam structures. This paper is intended to demonstrate and improve the modeling error of Timoshenko beam theory for multi-stepped beam structures. A tentative bending spring is introduced to represent the stiffness change around a step in beams. This paper proposes a finite element modeling method in the light with the bending spring. The proposed method is rigorously compared with commercial finite element codes. The validity of the proposed method is also demonstrated through an experiment.

Key Words : Timoshenko beam (티모센코 보), Multi-stepped beam (다단 보), Stress concentration (응력집중), Natural frequency (고유진동수)

1. 서론

보 형태의 구조물이나 회전축 계의 동적 모델링을 위해 티모센코 보 이론에 의한 운동방정식이 널리 쓰이고 있다[1]. 티모센코 보 이론은 보에 대한 가장 일반적인 환경의 운동방정식으로 인정되고 있으며 많은 연구를 통해 그 유용성이 입증되어 왔다 [2]. 그러나 티모센코 보 이론은 보의 경계조건이 전 단면에 균일하게 적용될 때 그 응용이 가능하므로 그와 같은 경계조건을 만족하지 않는 일반적인 환경에서 사용되는 보 구조물에 대해서는 오차가 발생할 가능성이 크다. 특히 단면의 형상이나 크기가 서로 다른 보가 결합된 형태의 구조, 즉 다단 보 형태에서는 보와 보의 이음새 부분의 단면 내에서 경계조건의 변화가 발생하게 됨으로서 티모센코 보 요소 모델링에 오차가 유발될 가능성이 있다.

본 연구에서는 다단 보의 모델링에 있어 발생할 수 있는 이와 같은 모델링 오차의 효과를 분석하고 오차를 개선할 수 있는 방법을 제안하였다. 이를

위해 먼저 티모센코 보 이론에 의해 모델링된 다단 보의 모델링 오차를 분석하였다. 비교를 위해 다 단 보를 두 개의 상용 유한요소 코드[3,4]를 이용하여 계산하였다. 티모센코 보 이론에 의한 모델링 방법을 보완하여 강성 저감 효과를 고려하기 위해 결합부위를 중심으로 보 부분의 강성 감소 효과를 나타낼 수 있는 등가 굽힘 스프링 모델링 방법[5]을 제시하였다. 본 논문에서는 단면이 급격하게 변하는 보에서의 응력집중 효과를 고려하여 이 효과에 대응되도록 등가 굽힘 스프링을 적용하였다. 이와 같은 등가 스프링 모델링 방법이 상용 코드에 의해 많은 요소로서 모델링하여 계산한 경우와 유사한 결과를 나타냄을 확인하였다. 마지막으로 제안된 방법을 실험에 적용하여 그 타당성을 검증하였다.

2. 티모센코 보 이론에 의한 모델링

2.1 티모센코 보 운동방정식

전단변형과 회전관성을 고려한 티모센코 보 운동 방정식은 다음과 같이 표현된다 [1,6].

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \phi - \frac{f}{kAG} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{m}{EI_d} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial m}{\partial x} &= f + \rho I_d \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, v, ϕ 는 각각 보의 횡 변위 및 회전 변위이고 f, m 은 전단력 및 모멘트를 나타낸다. 또, ρ, G, E 는 보의 물성치로서 각각 밀도, 전단 강성 계수(Shear modulus), 영율(Young's modulus)를 의미하며, A 는 단면적, k 는 단면 형상 보정계수(Shape factor)이다. 또, I_d 는 직경 방향 단면 관성 모멘트(Diametral area moment of inertia)를 의미한다.

식(1)을 요소에 관한 위치에너지와 운동에너지 식에 각각 대입하여 요소의 길이에 대한 적분을 수행하고, 라그랑주 방정식을 적용하면 아래와 같은 유한 요소 방정식을 얻을 수 있다.

$$(\mathbf{M}_t + \mathbf{M}_r) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \quad (2)$$

여기서 첨자 t, r 은 각각 병진운동과 회전운동을 의미한다. 모든 요소 행렬은 대칭이다.

2.2 오차 분석

다단 보에 대한 티모센코 보 유한 요소 모델의 오차를 보이기 위해 간단한 2단 보에 대해 모델링에 따른 오차를 분석하였다. 고려한 2단 보는 Fig. 1과 같고, 그 사양은 Table 1에 주어진 바와 같다. 2단 보에 티모센코 보 이론에 의한 유한요소 모델링을 하였으며 160개의 요소를 사용하였다. 또한 동일한 2단 보에 대해 일반적인 상용 코드인 ABAQUS[3]와 I-DEAS[4]를 이용하여 고유진동수를 계산하였으며 여기서는 Hexahedral 요소, 즉 요소당 16 node를 갖는 6면체형 요소를 이용하였다. 요소의 수는 약 12,000개를 적용하였다. Table 2에는 2단 보에서 단차간의 비가 변할 때 상용코드와 보요소 유한요소 모델에 의한 첫 번째 고유진동수 계산 결과를 비교한 것이다. 여기서 $r = a/h_1$, $a = (h_1 - h_2)/2$ 이다. Table 2에서 볼 수 있는 바와 같이 단차가 커질수록 기존의 보요소 모델링 방법에 의한 고유진동수의 오차가 커지고 있음을 볼 수 있다. Fig. 2는 3개의 고유진동수에 대한 오차 추이를 보여주고 있다. 결과

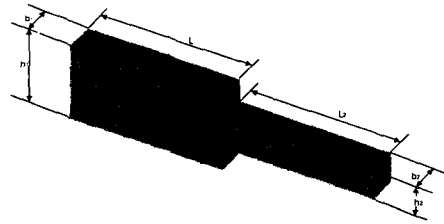


Fig. 1 A 2 stepped beam structure

Table 1 Specifications of the numerical model

property	data
Dimension	L1=L2=10cm
	b1=b2=2cm
	h1=5cm
	h2=2cm~5cm
Young's Modulus	2.0x10 ¹¹ N/m ²
Density	7833 kg/m ³
Poisson Ratio	0.3

Table 2 Comparison of the 1st natural frequencies of the numerical model

r	Natural Frequency(Hz)				Error(%) M-B /M x100
	A (ABAQUS)	I (I-DEAS)	M (A+I)/2	B (Beam Fem)	
0	5454	5454	5454	5450	0.07
0.1	4810	4808	4809	4903	1.95
0.2	3794	3792	3793	3993	5.27
0.3	2542	2537	2540	2716	6.95

에서 볼 수 있는 바와 같이 상당한 정도의 오차가 발생하고 있는 것을 확인 할 수 있다. 특히 저차 모드인 고유진동수에서 두드러진 차이를 보이고 있다. 이는 일반적인 예상과 큰 차이를 보이는 것으로서 단차의 효과를 기존의 방법이 적절히 표현하지 못하고 있음을 나타내는 것이다.

3. 다단 보 효과의 모델링

3.1 강성 저하 효과 모델링

보에 Fig. 3 (a)와 같이 단이 있게되면 왼쪽 부재의 결합 부 일부가 자유표면이 되어 모멘트가 전달되면 부재 1과 2의 접합부에서 각 부재의 평균적인 각에서 불연속이 있게 된다. 이와 같은 변화를 다음과 같은 조건으로 표현할 수 있다.

$$m_R = m_L, f_R = f_L, v_R = v_L, \theta_R \neq \theta_L \quad (3)$$

특히, 이와 같은 접합부의 강성저하를 접합부에서의 각변화 불연속성을 인정하고 각 변화의 크기가 전달되는 모멘트에 비례한다고 두면 Fig. 2(b)와 같은 모델링이 가능하며 다음과 같은 관계식을 쓸 수 있다.

$$M = k_{\theta}(\theta_R - \theta_L) = k_{\theta}\Delta\theta \quad (4)$$

이때 등가 굽힘 스프링 상수는 파괴역학 이론에 근거하여 다음과 같은 식으로 쓸 수 있다고 가정한다[5].

$$k_{\theta} = \frac{EI}{h} \frac{1}{F(r)} \quad (5)$$

여기서 응력 집중을 고려한 강성 보정함수 $F(r)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$F(r) = 2 \left\{ \frac{r}{(1-r)} \right\}^2 (5.93 - 19.69r + 37.14r^2 - 35.84r^3 + 13.12r^4) \quad (6)$$

식(5),(6)을 살펴보면 일반적으로 단의 크기가 커짐에 따라 굽힘 스프링 상수는 감소하게 되는 것을 알 수 있다.

3.2 유한 요소 모델링

전절에서 설명한 바와 같이 균일하지 않은 두 개의 보가 결합되어 있는 구조에서는 결합부에서의 각에 대한 불연속성이 존재하게 된다. 그러나 변위에서는 연속성이 유지되므로 부재간의 결합부에서 각에 관한 1개의 자유도가 추가된다. 즉 부재 1의 우측 단의 절점변위가 부재 2의 좌측단 절점변위가 동일하게 되나 각변위는 각각 독립적인 자유도가 됨으로 두 요소간의 조합은 다음과 같이 이루어지게 된다.

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} + \textcircled{2} & \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{2} & \textcircled{2} \\ \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} & \textcircled{1} + k & -k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & -k & \textcircled{2} + k & \textcircled{2} & \textcircled{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 0 & \textcircled{2} & \textcircled{2} & \textcircled{2} \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & 0 & \textcircled{2} & \textcircled{2} & \textcircled{2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

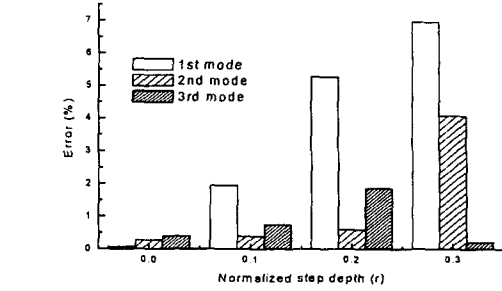


Fig. 2 Errors of natural frequencies computed by a conventional beam finite element model

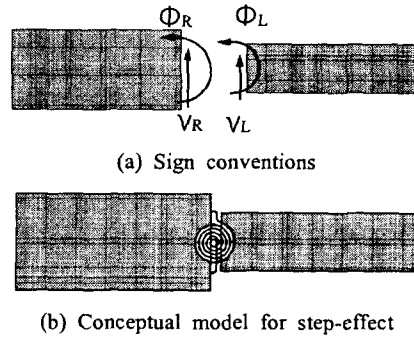


Fig. 3 The sign conventions and the conceptual model for weakening effect of step

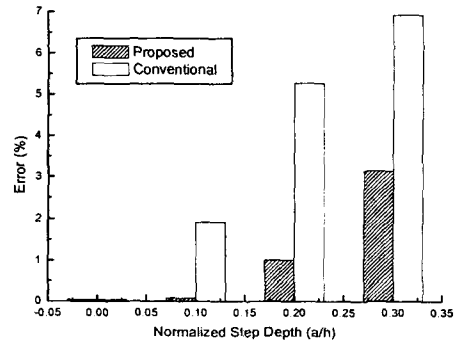


Fig. 4 Errors of natural frequencies for the numerical model

여기서 ①과 ②는 각각 좌측 보와 우측 보의 요소들을 의미한다.

3.3 개선된 모델의 비교

Fig. 4는 제안된 방법으로 개선된 2단 보 모델로

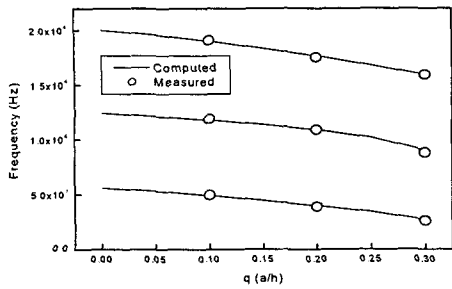


Fig. 5 Comparison of measured and computed natural frequencies for the experimental model

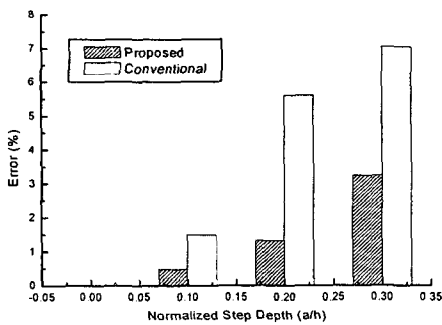


Fig. 6 Errors of natural frequencies for the experimental model

부터 계산된 고유진동수의 오차와 보 요소 유한요소 모델에 의해 계산된 고유진동수의 오차를 비교해서 보여주고 있다. 개선된 모델의 오차가 크게 감소된 것을 볼 수 있다. 특히, r 값이 적은 경우에는 매우 정확한 결과를 주고 있다. 2,3차모드는 1차모드 보다 오차가 적었으며 제안된 방법이 상대적으로 우수함을 확인할 수 있었다. 따라서 제안된 방법이 단차가 있는 보의 모델에 유용하게 활용될 수 있음을 알 수 있다. 제안된 방법에 의한 계산은 160개 요소를 사용하였으므로 계산에 따른 시간은 무시할 수 있을 정도인 반면, 상용코드에 의한 계산에는 20분 이상이 소요되었다.

3.4 실험

제안된 방법의 검증을 위하여 수치예제로 사용하였던 모델에 대해 $r=0.1, 0.2, 0.3$ 인 경우의 시편들을 제작하여 실험을 실시하였다. 실험에 사용된 시편의 물성치는 영률의 값이 2.10×10^{11} 이다. Fig. 5에는 계산 및 실험 결과를 동시에 보여주고 있다. 또한 Fig. 6에는 1차모드의 오차를 보여주고 있다. 수치 실험에서와 매우 유사한 결과를 볼 수 있는데, r 이

적은 값을 가질 경우 제안된 방법으로 계산된 고유진동수가 실험치에 대단히 유사한 것을 확인할 수 있다. 이상의 결과로부터 제안된 모델링 방법으로 단이 있는 보에서의 강성 저감 효과를 적절히 나타낼 수 있음을 확인할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 단이 있는 보 구조물에서 단에 의해 발생되는 강성저감 효과를 모델링하여 보 구조물에 대한 보다 정확한 모델링이 가능하도록 하는 방법을 제안하였다. 이를 위해 티모센코 이론에 의한 일반적인 보 요소 유한요소모델로 모델링된 다단 보의 오차를 분석하였다. 또한 강성저감 효과를 모델링하기 위해 단이 있는 부분에서의 굽힘각 불연속성을 가정하여 가상의 굽힘 스프링을 도입하고 전달되는 모멘트에 의해 각변화가 발생한다고 가정하였다. 이와 같은 모델링 방법을 근거로 상용유한요소코드를 이용하여 매우 세밀한 요소로 나누어 계산되는 결과와 비교함으로써 그 타당성을 검토하였다. 마지막으로 제안된 방법을 실제 시편에 적용하여 그 유용성을 확인하였다. 제안된 모델링 방법은 보 유한요소 모델링 방법에 활용됨으로서 모델링 정밀도를 개선하는데 유용하게 활용될 수 있을 것으로 사료된다.

후기

본 논문은 국방과학연구소에서 지원하는 장기기초연구(TECD-413-001115) 결과의 일부입니다.

참고문헌

1. Timoshenko, S., Young, D., and Weaver, W. Jr, *Vibration Problems in Engineering*, 4th ed., John Wiley & Sons, 1974.
2. Pilkey, W.D., *Formulas for Stress, Strain, and Structural Matrices*, John Wiley & Sons, Inc., 1994.
3. ABAQUS User's Manual Version 5.7, Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc., 1997.
4. I-DEAS Design User's Guide, 삼성데이터시스템(주), 1996.
5. Tada, H., Paris, P. and Irwin, G, *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, 2nd ed., St. Louis, Research Cooperation, 1985.
6. 홍성욱, 김종욱, 박종혁, 감쇠요소가 있는 불균일 연속 보 구조물을 위한 엄밀한 모드해석, 한국정밀공학회지, Vol.15, No.12, pp.202-211, 1998.