

NURBS를 이용한 캠 기구의 역설계에 관한 연구

김상진(창원대 대학원 기계설계공학과), 신중호(창원대 기계설계공학과),
김대원(남도대 기계자동차과), 윤호업(창원대 대학원 기계설계공학과)

A Study on Reverse Design of Cam Mechanism using NURBS

S. J. Kim(Mech. Design & Manuf. Eng. Dept., CWNU), J. H. Shin(Mech. Design & Manuf. Eng. Dept., CWNU), D. W. Kim(Mech. Automobile Eng. Dept., NDPC),
H. E. Yoon(Mech. Design & Manuf. Eng. Dept., CWNU)

ABSTRACT

This paper presents the reverse design of a cam mechanism using NURBS(Nonuniform Rational B-spline curve). Cam is very difficult to make the accurate shape on the design and the manufacture. Because the cam shape is commonly made in order to move in special functions. The reverse design can be used to check accuracy between the designed data and the manufactured data of the cam shape and also reproduce the cam without the design data. The reverse design procedures consist of motion analysis and curve fitting. The motion analysis is used the central difference method and the relative velocity method to find the displacement and velocity. The curve fitting is used NURBS to develope the whole curve. The central difference method is derived in the 3 dimensional space.

Key Words : Reverse design (역설계), Special function (특정 함수), Motion analysis (운동해석), Central difference method (중앙 차분법), Relative velocity method (상대속도법)

1. 서론

캠(cam)이란 직접 접촉에 의하여 원하는 운동을 종동질(follower)에 주기적으로 전달하는 기계요소를 말한다. 다른 운동전달용 기계요소들에 비해 캠 기구는 구동축의 회전에 대해 출력축의 운동을 특정 함수로 구성할 수 있는 것이 특징이다. 이 때문에 공작기계, 섬유기계를 비롯한 산업기계와 자동 이송장치등의 자동화 시스템에 널리 이용되고 있다.

기구의 운동특성을 분석하거나, 필요에 따라 기구를 복제하여 사용할 경우 기구의 운동해석과 해석 데이터를 이용하여 다시 설계하는 과정이 요구된다.

캠의 형상(profile)은 특정 함수에 의해서 제작되어지므로 설계와 해석 그리고 복제가 어렵다. 캠 설계와 가공에 관한 연구는 많은 부분이 진행되었으나 캠 해석에 관한 연구는 아직까지 그 연구사례가 미비한 실정이다. 신중호[4]는 수치해석 기법을 이용하여 평판캠의 운동해석을 연구하였고, 구병국[5]은 평판캠의 설계기법인 순간속도중심법을 이용하여 평판캠의 운동해석을 하였다.

본 논문에서는 일반적으로 많이 사용되고 있는 회전운동용 원통캠을 해석하고 NURBS 알고리즘을 이용하여 해석데이터를 보완함으로써 캠 기구의 역설계 가능성을 검증한다.

2. 3차원 공간에서의 불균등 분할간격에 대한 중앙 차분법

Fig. 1은 3차원 공간상의 점들에 대해 중앙 차분법을 그림으로 나타낸 것이다. P_i 에 접하는 접선은 P_{i-1}, P_i, P_{i+1} 세 점이 만드는 평면위에 반드시 있어야 한다. 그러므로 X, Y 평면과 접평면이 갖는 각도가 접선의 기울기이다. 본 논문에서는 각각의 점을 회전변환을 수행하여 P_i 점을 X 축 선상에 일치시킨 후 Y, Z 평면으로 좌표점을 투영시켜 접선의 기울기를 찾았다. 수치해석적 미분기법인 중앙 차분법을 적용하기 위해서는 측정점의 불규칙성을 고려하여 불균등 분할간격에 대한 중앙 차분법을 정리해야만 한다. 이를 위해 점 P_{i-1}, P_i, P_{i+1} 에 대해 2개의

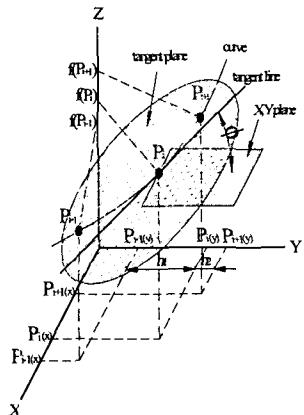


Fig. 1 Scheme of central difference method

Taylor정리를 전개하면 식(1)과 식(2)와 같다. 식(1)과 식(2)를 이용하여 불균등 분할 간격에 대한 중앙 차분법을 유도하면 식(3)과 같고, 식(3)에 의해 계산된 $f'(P_i)$ 값은 접촉점 P_i 의 접평면이 갖는 각 ϕ 이며 식(4)와 같은 관계식을 갖는다[5].

$$f(P_{i-1}) = f(P_i) - h_1 f'(P_i) + \frac{h_1^2}{2} f''(P_i) - \dots \quad (1)$$

$$f(P_{i+1}) = f(P_i) + h_2 f'(P_i) + \frac{h_2^2}{2} f''(P_i) + \dots \quad (2)$$

where : ($h_1 = P_{i(y)} - P_{i-1(y)}$, $h_2 = P_{i+1(y)} - P_{i(y)}$)

$$\begin{bmatrix} f'(P_i) \\ f''(P_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h_1 & h_1^2/2 \\ h_2 & h_2^2/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(P_{i-1}) - f(P_i) \\ f(P_{i+1}) - f(P_i) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\tan \phi = f'(P_i) \quad (4)$$

3. NURBS 알고리즘

일반적으로 곡선이나 곡면을 정의하는 방법으로는 Cubic-Spline, Bezier, B-Spline, NURBS 등 여러 가지가 있다. 이 중 NURBS는 복잡한 형상의 정의가 간편하고, 적은 케이터로써 매우 복잡한 형상의 표현이 가능하고, 파라미터의 변화만으로 다양한 형상의 표현이 가능하기 때문에 CAD/CAM 및 컴퓨터 그래픽스에서 많이 사용되어진다. 이러한 NURBS의 일반적인 정의식은 식(5)과 같다[1][2].

$$r(u) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,k}(u) w_i P_i}{\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) w_i} \quad (5)$$

여기서 u : 곡선의 파라미터
 k : 기저함수의 차수
 w_i : i 번째의 가중치
 P_i : i 번째의 조정점
 $N_{i,k}(u)$: i 번째의 기저함수

식(5)에서 $r(u)$ 에 대한 1차 미분식은 식(6)이고, 2차 미분식은 식(6)을 한번더 미분하면 얻어진다.

$$\begin{aligned} \frac{dr(u)}{du} &= \left\{ \frac{d}{du} \left[\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) w_i P_i \right] \cdot \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) w_i \right\} \\ &\quad / \left\{ \left[\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) w_i \right]^2 \right\} \quad (6) \\ &- \left\{ \sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) w_i P_i \cdot \frac{d}{du} \left[\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) w_i \right] \right\} \\ &\quad / \left\{ \left[\sum_{i=0}^n N_{i,k}(u) w_i \right]^2 \right\} \end{aligned}$$

NURBS 알고리즘은 식(7)과 같다. 1차, 2차 미분은 U 행렬에만 영향을 미친다. 입력 값은 $P_{i(x,y)}$ 로서 x 축은 캠의 회전각도이고, y 축은 종동결의 회전각도가 입력되고, z 축은 0으로 잡는다. 식(8)은 End tangent vectors를 계산하는 식인데 본 논문에서는 Free end condition을 사용하였다. 식(9)는 Control point를 찾는 식이다.

Input data

P_i : ($i=0, 1, 2, \dots, n$) : 3D data point

t_0, t_n : end tangent vectors of the composite curve

Determine

∇_i : ($i=-2, -1, 0, 1, \dots, n+1$) : knot spans

V_i : ($i=0, 1, 2, \dots, n+2$) : control vertices

$$\nabla_i = |P_{i+1} - P_i| \quad \text{for } i=0, 1, 2, \dots, n-1$$

$$\nabla_{-2} = \nabla_{-1} = \nabla_{n+1} = \nabla_n = 0$$

$$\begin{aligned} r^i(u) &= U N_c^i R^i \quad (0 \leq u \leq 1) \quad (7) \\ &\quad (i=0, 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

where : $U = [1 \ u \ u^2 \ u^3]$ (각변위)

$U = [0 \ 1 \ 2u \ 3u^2]$ (1차 미분-각속도)

$U = [0 \ 0 \ 2 \ 6u]$ (2차 미분-각가속도)

$$R^i = [V_i \ V_{i+1} \ V_{i+2} \ V_{i+3}]^T$$

$$N_c^i = \begin{bmatrix} \frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_{i-1}^2 \nabla_{i-1}^3} & (1 - n_{11} - n_{13}) & \frac{(\nabla_{i-1})^2}{\nabla_{i-1}^3 \nabla_{i-1}^2} & 0 \\ -3n_{11} & (3n_{11} - n_{23}) & \frac{3\nabla_i \nabla_{i-1}}{\nabla_{i-1}^3 \nabla_{i-1}^2} & 0 \\ 3n_{11} & -(3n_{11} + n_{33}) & \frac{3(\nabla_i)^2}{\nabla_{i-1}^3 \nabla_{i-1}^2} & 0 \\ -n_{11} & (n_{11} - n_{43} - n_{44}) & n_{43} & \frac{(\nabla_i)^2}{\nabla_{i-1}^3 \nabla_{i-1}^2} \end{bmatrix}$$

where : $n_{43} = -\left\{ \frac{1}{3} n_{33} + n_{44} + \frac{(\nabla_i)^2}{(\nabla_{i-1}^2 \nabla_{i-1}^3)} \right\}$

$$\nabla_i^k = \nabla_i + \nabla_{i+1} + \cdots + \nabla_{i+k-1}$$

Free End Condition

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ t_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(P_1 - P_0) \\ 3(P_2 - P_0) \\ 3(P_3 - P_1) \\ \vdots \\ 3(P_n - P_{n-2}) \\ 3(P_n - P_{n-1}) \end{bmatrix} \quad (8)$$

Control Point

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_1 & h_1 & g_1 \\ f_{n-1} & h_{n-1} & g_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \\ V_{n+1} \\ V_{n+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_0 \\ P_0 \\ P_1 \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \\ t_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

본 논문에서는 u 의 값을 $10E-5$ 을 사용하였으며 180개의 원통캡 데이터를 해석하고, 이 해석 데이터 중 각변위 데이터를 NURBS로 커브피팅하여 360개의 각변위, 각속도, 각가속도 데이터로 출력한다.

4. 회전운동용 원통캡 운동해석

4.1 회전운동용 원통캡

Fig. 2는 회전운동용 롤러 종동절을 가진 원통캡이다. 캠은 캠의 회전축을 중심으로 회전하게 되며 종동절은 종동절 축을 따라 회전운동을 하게 된다. Fig. 2에서 축간 거리인 d 는 캠축과 종동절축의 수직거리이고, r 은 종동절의 회전축을 중심으로 한 종동절의 길이이다.

4.2 회전운동용 원통캡 종동절의 각변위해석

강동우⁽³⁾의 회전운동용 원통캡의 형상설계식을 이용하면 식(10)~(12)와 같다. 강동우의 회전운동용 원통캡의 형상설계식에서 리브의 아래부분의 형상설계식을 인용한다. 식(10)~(12)에서 형상해석을 위해 형상설계점인 C_{x0}, C_{y0}, C_{z0} 대신에 측정점 $P_{i(x)}, P_{i(y)}, P_{i(z)}$ 의 값을 대입하여 해석에 이용한다. 여기서 θ_f

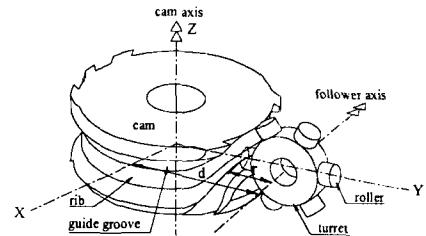


Fig. 2 Cylindrical cam and rotating follower

는 종동절의 회전각, θ_c 는 캠의 회전각, r_r 는 롤러의 반지름이다[3].

$$C_{x0} = [r_r \sin(\phi_z)] \cos \theta_c + [r_r \cos(\phi_z) \sin \theta_f + (d - r) \cos \theta_f] \sin \theta_c \quad (10)$$

$$C_{y0} = -[r_r \sin(\phi_z)] \sin \theta_c + [r_r \cos(\phi_z) \sin \theta_f + (d - r) \cos \theta_f] \cos \theta_c \quad (11)$$

$$C_{z0} = [-r_r \cos(\phi_z) \cos \theta_f - r \sin \theta_f] \quad (12)$$

Fig. 3은 식(10)~(12)에서 제안한 접촉점과 설계 변수와의 관계를 기하학적으로 표현한 것이다. Fig. 4는 리브의 기울기 ϕ_z 를 도시적으로 나타낸 것이고, 식(13)과 같이 정의된다.

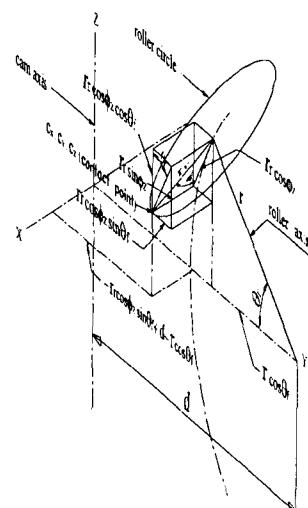


Fig. 3 Geometric relationships between cylindrical cam and rotating follower

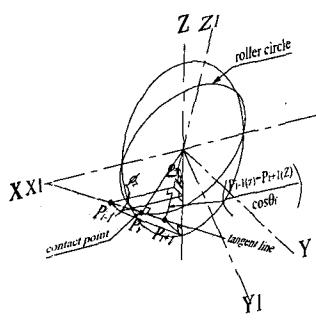


Fig. 4 Angle ϕ_z between X-Y plane and

tangential plane on rib curve

회전운동용 원통캡은 롤러의 회전중심에서 θ_f 만큼 기울어진 곳에 ϕ_z 가 도시되고, 캠과 종동절의 상대속도($V_{f/c}$)는 리브의 기울기와 평행이다. 식(13)을 식(12)에 넣고 정리하면 식(14)와 같이 구할 수 있다. 식(14)는 반복법을 수행함으로써 롤러의 기울기 θ_f 를 구할 수 있다.

$$\tan \phi_z = \frac{f'(P_i)}{\cos \theta_f} \quad (13)$$

$$C_{z_0} + r_r \cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{f'(P_i)}{\cos \theta_f} \right) \right] \cos \theta_f \\ + r \sin \theta_f = 0 \quad (14)$$

또한, 식(10),(11)을 이용하여 식(15)를 유도하고, 이 식에 리브의 기울기 ϕ_z 의 값을 대입하여 캠의 회전각도 θ_c 의 값을 구한다.

$$\theta_{c_{12}} = 2 \tan^{-1} \left(\frac{c_{y_0} \pm \sqrt{c_{y_0}^2 + c_{x_0}^2 - (-r_r \sin \phi_z)^2}}{(-r_r \sin \phi_z) - (c_{x_0})} \right) \quad (15)$$

4.3 회전운동용 원통캡 종동절의 각속도해석

캠의 속도는 캠의 반지름에 각속도를 곱하면 얻어진다. 식(16)은 캠의 회전속도 v_c 이고, 캠의 반지름은 θ_f 의 크기에 따라 변한다. 식(17)은 상대속도를 이용하여 계산한 X, Y평면과 리브(rib)가 이루는 각 ϕ_z 와 종동절의 속도 v_f 및 캠의 속도 v_c 의 관계를 나타내고, 식(18)을 이용하여 종동절의 각속도 ω_{θ_f} 를 구할 수 있다.

$$v_c = (d - r \cos \theta_f) \times \omega_c \quad (16)$$

$$\tan \phi_z = \left(\frac{v_f}{v_c} \right) = \left(\frac{r \cdot \omega_{\theta_f}}{v_c} \right) \quad (17)$$

$$\omega_{\theta_f} = \frac{v_c \times \tan \phi_z}{r} \quad (18)$$

5. 회전운동 원통캡의 운동해석 적용예

본 연구에서 제안한 해석 방법의 유용성을 검증하기 위해 설계된 회전운동용 원통캡을 해석 예제로 적용한다. 회전운동용 원통캡의 설계 데이터 중 일부를 취하여 측정 점으로 이용한다. Table 1은 설계조건이고, Fig. 5는 설계조건을 이용하여 설계한 회전운동용 원통캡의 형상이다.

Table 1 Displacement conditions for cam design

section	cam angle (deg)	displacement	curve type
1	0~80	15° rise	cycloidal
2	80~160	15° return	cycloidal
3	160~240	15° return	cycloidal
4	240~290	dwell	
5	290~360	15° rise	cycloidal

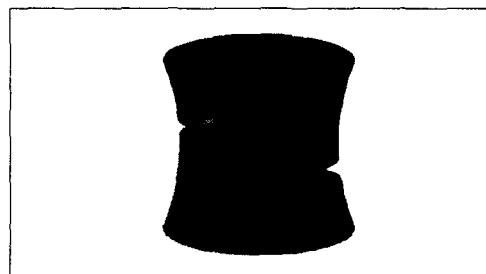


Fig. 5 A designed cylindrical cam with rotating follower

Table 2 A part of measured point

	x	y	z
1	0.000	75.000	-15.000
2	2.537	74.958	-15.004
3	4.910	74.843	-15.034
⋮	⋮	⋮	⋮
178	-5.709	74.779	-14.936
179	-2.736	74.949	-14.992
180	-0.000	75.000	-15.000

Table 3 Input data for motion analysis

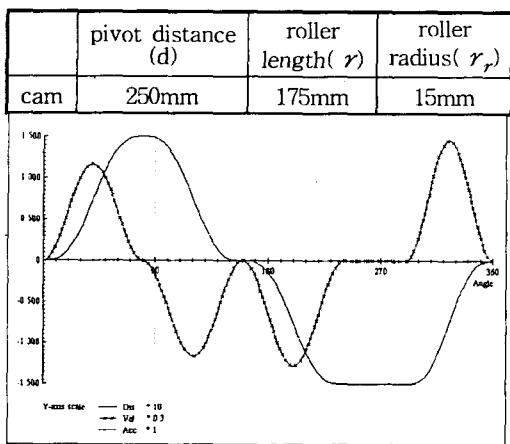


Fig. 6 Motion properties after analyzed the manufactured cam(180data)

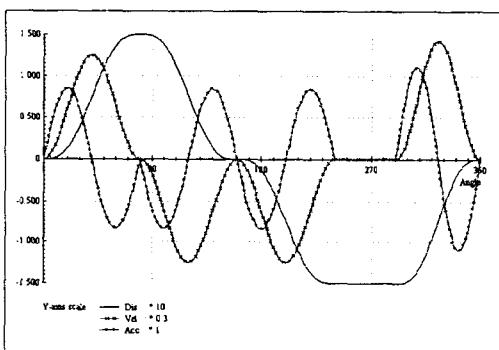


Fig. 7 NURBS curve fitting curves(360data)

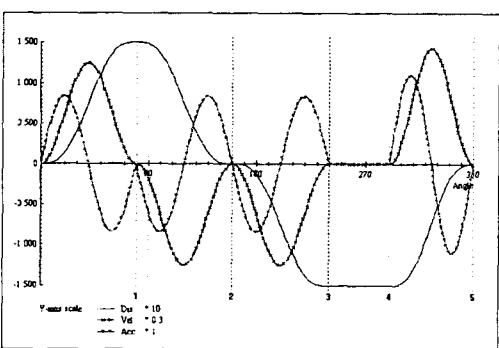


Fig. 8 Compare with cam design curves and the NURBS curves

측정 데이터 수는 180개로서 그 일부는 Table 2 과 같고, Table 3은 해석하기 위해 입력되는 데이터

이다. Table 2와 Table 3의 값을 이용하여 해석하였다. Fig. 6은 해석알고리즘을 사용하여 해석한 해석 선도에서 각변위선도와 각속도선도를 나타내고 있다. Fig. 7은 NURBS로 커브피팅한 선도로서 각변위선도, 각속도선도, 각각속도선도를 나타낸다. Fig. 8은 NURBS 커브피팅선도와 설계선도를 비교한 그래프이다.

6. 결과 및 고찰

Fig. 8에서 설계선도와 NURBS 커브피팅한 360개의 데이터를 비교한 결과 각변위에서 최대오차 0.0023deg, 각속도에서 최대오차 0.001, 그리고 각각속도에서 최대오차 0.018로 나타났다.

NURBS는 B-Spline과 달리 측정 점 사이의 간격이 일정하지 않아도 된다. 즉 커브의 변화가 완만한 부분에서는 측정점을 적게 잡고, 커브의 변화가 큰 부분에서 측정점을 많이 잡으면 데이터를 줄임과 동시에 오차도 줄일 수 있다.

7. 결론

측정 점을 이용하여 해석하고, NURBS로 커브피팅한 NURBS 커브선도와 설계에서 사용한 설계선도를 비교, 검토한 결과 Fig. 8에서 아주 흡사하게 일치함을 알 수 있다. 캠 기구를 해석하고 NURBS 알고리즘을 이용하여 해석 데이터를 보완함으로써 캠 기구의 역설계 가능성을 검증하였다.

참고문헌

1. B. K. Choi, "Surface Modeling for CAD/CAM," ELSEVIER, pp. 35-80, 1991.
2. K. W. Lee, "Principles of CAD/CAM/CAE Systems," Addison Wesley Longman, Inc., pp. 149-180, 1999.
3. 강동우, "다축제어용 원반 캠과 원통캠의 복합 기구의 설계 자동화에 관한 연구," 박사학위논문, 창원대학교, pp. 34-84, 2000.
4. 손주리, 신중호, "디스크형 캠의 자동설계용 CAD S/W 개발, 설계 및 해석 알고리즘개발," 한국기계연구소소보, pp. 149-154, 1989.
5. 구병국, 신중호, 윤호업, 장옥화, "요동운동 톱니 종동결과 디스크 캠 기구의 운동해석을 위한 원호 접근법에 관한 연구," 한국정밀공학회 추계 학술대회 논문집, pp. 523-526, 2000.