

고차 지그재그 모델을 이용한 다중 층간 분리부가 내재한 복합재 평판의 동적 해석

오진호* 조맹효** 김준식***

Dynamic analysis for delaminated composites using DKQ concept based on higher-order zig-zag theory

Jinho Oh^{*}, Maenghyo Cho^{**}, Jun-Sik Kim^{***}

KEY WORDS : Finite Element Method, Delamination, Zig-Zag Theory, Natural Frequency

ABSTRACT

A higher-order zig-zag theory is developed to refine the predictions of natural frequency and mode shape of laminated composite plates with multiple delaminations. By imposing top and bottom surface transverse shear stress-free and interface continuity conditions of transverse shear stresses including delaminated interfaces, the displacement field with minimal degree-of-freedom are obtained. This displacement field can systematically handle the number, shape, size, and locations of delaminations. Through the dynamic version of variational approach, the dynamic equilibriums and variationally consistent boundary conditions are obtained. Through the numerical example of natural frequency analysis, the accuracy and efficiency of present theory are demonstrated. The present theory is suitable as an efficient tool to analyze the static and dynamic behavior of the composite plates with multiple delaminations.

1. 서론

최근 복합재료의 지속적 발전으로 항공기, 잠수함, 자동차와 같은 고강도, 고강성을 요구하는 기계들의 일차구조물로 그 적용범위가 확장되어 왔다. 그러나 이러한 복합재료에 층간 분리(delamination)에 의한 결함이 생기게 되면, 복합재료의 강도가 현격하게 떨어지게 된다. 층간 분리 부란 복합재 경계면 사이에 접합의 불안정으로 발생하는 부분으로 면내 압축하중에 의해 성장하고 압축하중지지 능력을 현저히 감소 시킨다. 이러한 문제를 보다 정확하게 규명하기 위해선 층간 분리가 발생하였을 때의 좌굴 하중과 고유진동수의 특성이 파악되어야 한다.

복합재 적층판의 해석 이론으로 근사 단층 이론[1]은 층 사이의 횡 전단변형의 연속조건을 만족하기 어렵다는 단점이 있고, 층방향 이론[2]은 자유도가 층의 수에 의존되기 때문에, 계산량이 많아진다. 그래서 효율적인 고차 지그재그 이론[3]이 개발되었다. 이러한 이론은 기본적으로 복합재 경계면 사이가 완전하게 결합되어 있다는 가정에서 거동을 예측하기 때문에, 저속 충격시(복합

재 제품의 공구가 떨어지거나 복합재로 만든 항공기와 조류와의 충돌) 또는 복합재 제품의 성형시 만들어지는 층간 분리가 내재한 복합재 적층판의 해석시 정확한 결과를 도출하기 힘들다.

층간 분리를 가진 복합재 적층판의 해석을 위해 고전 판 이론[4-5], 일차 전단 변형 이론[6-7], 층방향이론[8], 고차 이론[9]이 개발되었다. 좌굴에 대한 초기 연구는 단일 층간 분리부를 가진 경우로 Simitsis[10]에 의해 연구되었다. 그리고, 많은 연구자들에 의해 다중 층간 분리부의 영향에 대해 연구되었고, 최근에는, 층간 분리 부분의 두께 방향으로의 열림 현상과 면내 방향으로 미끄러짐 현상을 모사할 수 있는 지그재그 이론[11,12]이 Cho 와 Kim 에 의해 개발되었다. 이 이론은 다중 층간 분리 문제에서도 최소의 자유도만을 가지고 해석할 수 있기 때문에, 계산상의 효율성을 가져올 수 있다.

본 연구에서는, 다중 층간 분리부를 가지는 복합재 적층판의 정확한 결함 진단, 강도 검사를 수행하기 위해 위에서 언급한 고차 지그재그 이론을 도입하여 고유치 해석을 수행 함으로써, 보다 정확한 고유진동수와 모드를 구하는데 목적이 있다.

* 서울대학교 기계항공공학부 대학원생

** 서울대학교 기계항공공학부 교수

*** The Pennsylvania State University 항공우주공학과 대학원생

2. 정식화

2.1 변위장

다중 층간 분리를 내재한 복합재 평판의 형상은 그림 1 에서 보여지고, 변위장은 아래와 같다.

$$u_\alpha(x_\beta, z) = u_\alpha^0(x_\beta) + \psi_\alpha(x_\beta)z + \xi_\alpha(x_\beta)z^2 + \phi(x_\beta)z^3 \\ + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta)(z-z_k)H(z-z_k) + \sum_{d=1}^D \bar{u}_\alpha^d(x_\beta)H(z-z_k) \\ u_3(x_\alpha, z) = w(x_\alpha) + \sum_{d=1}^D \bar{w}^d(x_\alpha)H(z-z_d) \quad (1)$$

여기서, u_α^0, w 은 기준면 위의 점 (x_α) 에서의 변위를 나타낸다. ψ_α 는 기준면에 수직인 축에 대한 회전각이다. N 은 전체 복합재 적층수의 개수이고, D 는 층간 분리부의 개수이다. $H(z-z_k)$ 는 단위 계단 함수이다. $\bar{u}_\alpha^d, \bar{w}^d$ 는 면내방향의 미끄러짐과 면내 수직방향으로의 열림 현상을 나타낸다.

변형된 복합재 평판의 형상과 기하학적 변수는 그림 2. 에 나타난다. 위의 변위장에 상, 하면에서의 횡 전단 구속조건을 고려하면, 다음과 같은 변위장을 얻을 수 있다.

$$u_\alpha = u_\alpha^0 - w_{,\alpha}z - \Lambda_{\alpha\beta}\phi_\beta z^2 + \phi z^3 \\ + \sum_{k=1}^{N-1} S_\alpha^k(x_\beta)(z-z_k)H(z-z_k) + \sum_{d=1}^D \bar{u}_\alpha^d(x_\alpha)H(z-z_d) \\ u_3(x_\alpha, z) = w(x_\alpha) + \sum_{d=1}^D \bar{w}^d(x_\alpha)H(z-z_d) \quad (2)$$

횡 전단 응력 연속조건을 복합재 층의 경계마다 고려하면, 층 사이의 기울기변화 S_α^k 가 다음과 같이 결정된다.

$$S_\alpha^k = a_{\alpha\gamma}^k \phi_\gamma - \bar{w}_{,\alpha}^k \delta_{kl} \quad (3)$$

여기서 $a_{\alpha\gamma}^k$ 는 각각의 경계면에서의 기울기를 나타내고, $\bar{w}_{,\alpha}^k \delta_{kl}$ 는 층간분리가 위치한 경계면에서의 기울기의 변화를 나타낸다. 자세한 표현식은 생략한다. 결국, 식(3)을 식(2)에 대입하면 보다 단순화된 변위장을 얻을 수 있다.

위의 변위장을 가지고, 가상일의 원리에 적용하면 변분적으로 일치하는 평형 방정식과 경계 조건을 유도할 수 있다.

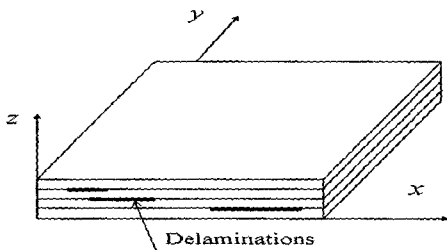


그림 1. 다중 층간 분리부를 내재한 복합재 평판의 형상

$$\int_V \left\{ \left[(\sigma_{\alpha\beta} \delta \varepsilon_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha 3} \delta \gamma_{\alpha 3}) dV - \int_V \rho (\dot{u}_\alpha \delta \dot{u}_\alpha + \dot{u}_3 \delta \dot{u}_3) dV \right. \right. \\ \left. \left. - \int_\Omega q \delta u_3 d\Omega \right\} dt = 0 \quad (4)$$

여기서, $\dot{(\)}$ 는 시간에 대한 미분을 나타낸다. ρ 는 밀도를 나타낸다.

평형방정식과, 경계조건 of 자세한 표현은 지면 관계상 생략한다.

2.2 유한요소 모델 정식화

본 논문의 이론을 유한요소로 발전시키기 위해서는 처짐의 두번 미분이 존재하기 때문에, C_1 함수가 필요하다. 그 결과 Batoz 와 Tahar[13]가 제안한 DKQ 요소를 사용하였다. 이 요소는 Kirchhoff 구속조건을 만족 시키면서 페치 테스트를 통과 하는 가장 단순한 요소이다. 본 연구에서 처짐의 미분과 관계된 자유도 w_α, \bar{w}_α 를 DKQ 가 제안한 C_1 함수를 사용하면, 단순하고, 편리하기 때문에, 본 논문의 요소 개발에 적합하다.

요소 정식화에 대해 살펴보면, 다음과 같다. 변형에너지는 굽힘에너지 U_b^e (인장에너지 포함)과, 전단 에너지 U_s^e 로 나눌 수 있고, 자세한 에너지 표현식은 다음과 같다.

$$U_b^e = \frac{1}{2} \int_{x'} \int_b \{ \varepsilon \} [Q_b]^t \{ \varepsilon \} dz dA^e = \int_{x'} \{ \varepsilon \} [A_b] \{ \varepsilon \} dA^e$$

$$U_s^e = \frac{1}{2} \int_{x'} \int_b \{ \gamma \} [Q_s]^t \{ \gamma \} dz dA^e = \int_{x'} \{ \gamma \} [A_s] \{ \gamma \} dA^e \quad (5)$$

본 연구의 DKQ 사각형 요소에서, 절점 변위 벡터 $\{a\}^e$ 는 $\{u_{xi}^0, u_{yi}^0, w_i, \phi_{xi}, \phi_{yi}, \bar{u}_x^d, \bar{u}_y^d, \bar{w}^d, \bar{w}_{,x}^d, \bar{w}_{,y}^d, \}$ 이다. 변위는 다음과 같이, 절점 변위와 형상함수에 의해 표현 되어진다.

$$u_\alpha^0 = \sum_{i=1}^4 N_i u_{\alpha i}^0 \quad \bar{u}_\alpha^d = \sum_{i=1}^4 N_i \bar{u}_{\alpha i}^d \quad \phi_\alpha^0 = \sum_{i=1}^4 N_i \phi_{\alpha i}^0 \quad (6)$$

$$w = \sum_{i=1}^4 \{N_i^* w_i\} \quad (7)$$

$$w_{,\alpha} = \sum_{i=1}^4 \{N_{\alpha i} w_i + P_{\alpha i} w_{,xi} + H_{\alpha i} w_{,yi}\} \quad (8)$$

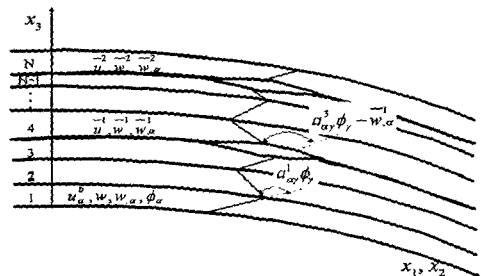


그림 2. 다중 층간 분리부가 내재된 복합재 평판의 형상

$$\bar{w}_{,\alpha} = \sum_{i=1}^4 \{N_{\alpha i} \bar{w}_i^d + P_{\alpha i} \bar{w}_{,xi}^d + H_{\alpha i} \bar{w}_{,yi}^d\} \quad (9)$$

DKQ 요소는 두께 방향의 변위를 요소 내에서는 정의 할 수 없다. 그러므로, 질량 행렬을 구할 때 요구되어지는 두께 방향 변위는 Wanji 와 Cheung[14]이 제안한 nonconforming 변위장을 사용하였다.

고유진동수와 모드를 구하기 위한 고유치 문제 해석은 아래와 같이 주어진다.

$$(K^e - \omega^2 M^e) \{a\}^e = \{0\} \quad (10)$$

여기서, 요소 질량 행렬은 다음과 같다.

$$M^e = \int_V \rho N^T N dV \quad (11)$$

3. 수치해와 결과

수치결과로는 DKQ 사각형 요소를 이용하여, 층간 분리를 내재한 복합재 적층 평판의 고유진동수와 고유모드를 예측하였다.

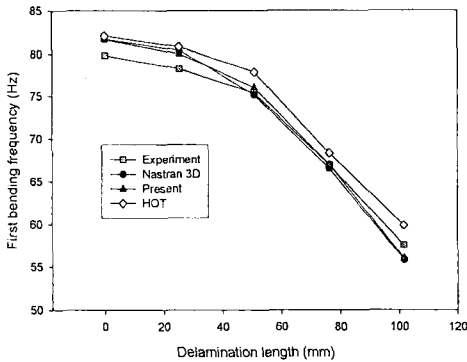


그림 4 (a). 1 차 굽힘 고유진동수

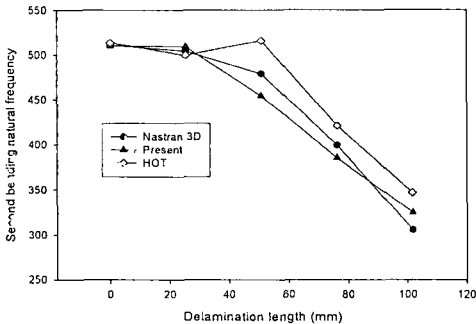


그림 4(b). 2 차 굽힘 고유진동수

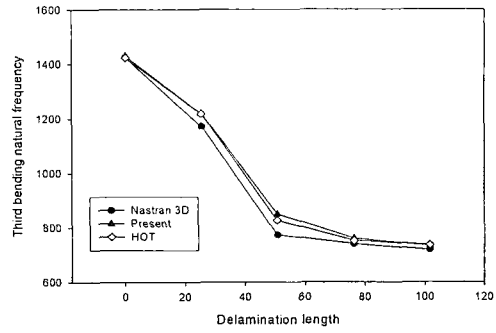


그림 4(c). 3 차 굽힘 고유진동수

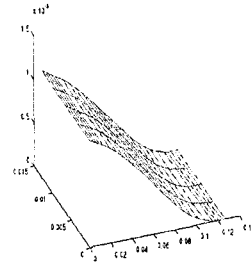


그림 5(a). 1 차 굽힘 모드

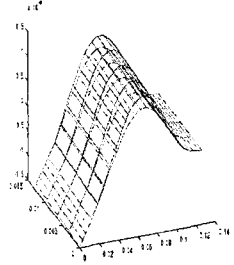


그림 5(b). 2 차 굽힘 모드

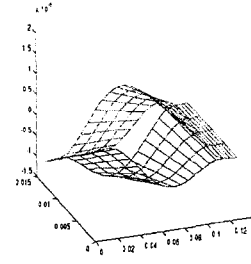


그림 5(c). 1 차 비틀림 모드

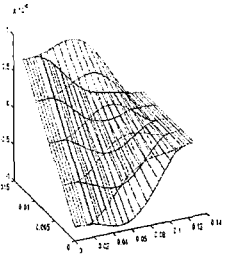


그림 5(d). 2 차 비틀림 모드

기하학적인 형상은 가로길이 5in, 폭은 0.5in, 두께는 0.4in, 밀도는 1477kg/m² 이다. 복합재 층은 [(0/90)₂], 순서로 적층되었다. 균일한 사각형 메쉬 (16×16)를 사용하였고, 효율적으로 계산시간을 감소시키기 위해 한쪽 면이 고정되고 다른 세 면은 자유단인 경계조건을 부가하였다. 재료 상수들은 참고문헌 Shen[15]에 주어져 있다.

그림 4 와 5 는 층간 분리부의 크기가 커짐에 따라 고유 진동수의 크기가 작아진다는 것을 알 수 있다. 또한, 본 논문의 해석이론이 Nastran 해석해 [16], HOT 해석결과[16], 실험결과[16]와 비교해서 매우 정확히 얻어지는 것을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 다중 층간 분리부가 내재된 복합재 평판의 효율적인 동적 해석을 위한 고차 지그레그 이론에 기초한 유한 요소를 개발하였다. 즉, 임의의 경계조건, 하중, 기하학적인 형상에 대해 좌굴하중과 고유진동수를 예측할 수 있게 되었다. 특히, 적층수가 많은 적층 배열을 가지는 구조물에 대해 본 논문의 유한요소 모델을 이용하면, 층간 분리가 존재하는 영역에서만 자유도가 추가로 증가하기 때문에, 적층수 만큼 증가하지는 않는다. 그러므로, 다중 층간 분리가 내재된 복합재 구조물을 해석하는 효율적인 방법이라고 할 수 있다. 그리고, 모드의 모양에 의해 층간 분리 위치와 형상을 쉽게 파악할 수 있다.

후 기

이 논문은 2002 년도 두뇌한국 21 사업에 의하여 지원되었음.

참고문헌

- (1) Lo, K., Christensen, R. M., and Wu, E. M., "A Higher-Order Theory of Plate Deformation, Part 2: Laminated Plates," *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 44, 1997, pp. 669-676.
- (2) Reddy, J. N., "A Generalization of Two-Dimensional Theories of Laminated Plates," *Commun. App. Numer. Methods*, 3, 1987, pp. 173-780.
- (3) Cho, M. and Parmerter, R. R., 1992, "Efficient Higher Order Plate Theory for Laminated Composites," *Compos Struct.*, Vol. 20, pp. 113-123.
- (4) Wang, J. T. S., Liu, Y. Y., and Gibby, J. A., "Vibrations of Split Beams," *J. Sound Vib.*, Vol.84, 1982, pp. 491-502.
- (5) Wang, J. T. S., and Lin, C. C., "Vibration of Beam-Plates Having Multiple Delaminations," Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 36th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, New Orleans, LA, AIAA, Reston, VA, 1995, pp.3126-3133.
- (6) Shen, M. -H. H., and Grady, J. E., "Free Vibration of Delaminated Beams," *AIAA J.*, 30, 1992, pp. 1361-1370.
- (7) Gummadi, L. N. B., and Hanagud, S., "Vibration Characteristics of Beams With Multiple Delaminations," Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 36th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, New Orleans, LA, AIAA, Reston, VA, 1995, pp. 140-150.
- (8) Lee, J., Gurdal, Z., and Griffin, O. H., "Layer-Wise Approach for the Bifurcation Problem in Laminated Composites With Delaminations," *AIAA J.*, Vol.31, 1993, pp. 331-338.
- (9) Gummadi, L. N. B., and Hanagud, S., "Vibration

Characteristics of Beams With Multiple Delaminations," Proceedings of the AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC 36th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, New Orleans, LA, AIAA, Reston, VA, 1995, pp. 140-150.

(10) Simitzes, G. J., "Delamination Buckling of Flat Laminates," *Buckling and Postbuckling of Composite Plates*, edited by G.J. Turvey and I.H. Marshall, Chapman & Hall, London, pp. 299-328, 1995.

(11) Cho, M., and Kim, J. S., "Higher Order Zig-Zag Theory of Laminated Composites with Multiple Delaminations," *Journal of Applied Mechanics*, Vol.68, 2001, pp.869-877.

(12) Kim, J. S., Cho, M., "Buckling Analysis for Delaminated Composites Using Plate Bending Elements Based on Higher-Order Zig-Zag Theory," *International Journal for numerical methods in engineering*, Vol.55, 2002, pp.1323-1343.

(13) Batoz, J. L., Tahar, M. B., "Evaluation of a New Quadrilateral Thin Plate Bending Element," *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol.18, 1982, pp. 1655-1677.

(14) Wanji, C., Cheung Y. K., "Refined Non-Conforming Quadrilateral Thin Plate Bending Element," *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, Vol.40, 1997, pp. 3919-3935.

(15) Shen, M. -H. H., and Grady, J. E., "Free Vibration of Delaminated Beams," *AIAA J.*, 30, 1992, pp. 1361-1370.

(16) Chattopadhyay, A., Radu, A. G., and Dragomir-Daescu, D., "A Higher Order Plate Theory for Dynamic Stability Analysis Of Delaminated Composite Plates," *Computational Mechanics*, Vol.26, 2000, pp.302-308.