

# 최적 단면 치수를 가지는 복합재료 U-Beam의 설계

이헌창\* · 전홍재\* · 박지상\*\* · 변준형\*\*

## Design of composite channel section beam for optimal dimensions

H. C. Lee, H-J. Chun, J-S. Park, J-H. Byun

**Key Words:** Composite beam, Optimization, Analytical model, Genetic algorithm,

### Abstract

A problem formulation and solution for design optimization of laminated composite channel section beam is presented in this study. The objective of this study is the determination of optimum section dimensions of composite laminated channel section beam which has equivalent flexural rigidities to flexural rigidities of steel channel section beam. The analytical model is based on the laminate theory and accounts for the material coupling for arbitrary laminate stacking sequence configuration. The model is used to determine the optimal section dimensions of composite channel section beam. The web height, flange width and thickness of the beam are treated as design variables. The solutions described are found using a global search algorithm, Genetic Algorithms (GA).

### 1. 서론

복합재료는 특유의 높은 비강성, 비강도 등의 우수한 특성으로 토목, 건축, 레저, 항공 산업 분야 등에 널리 활용되고 있으며 내부식성, 내열성, 충격흡수 능력 등 기존의 금속재료에 비해 우수한 특성으로 열악한 환경조건에 적용이 용이한 장점이 있어 최근에는 1차 구조재로 그 사용범위가 확대되어 가는 추세에 있고 복합재료 보에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있다.[1-3]

본 연구에서는 구조용 철재 Channel 보를 대체할 수 있는 복합재료 보를 설계하는 것으로서 철재 보와 같은 크기의 굽힘 강성을 갖도록 복합재료 보의 단면 치수를 결정한다. 공학적 관점에서 이상적인 구조물이라 함은 일반적으로 주어진 제 기능과 필요한 성능을 만족하면서 안전하고 경량이며 저가의 구조물이라 할 수 있다.

복합재료의 치수를 적절히 조절하여 설계함으로써 보의 굽힘강성, 축방향 강성, 비틀림 강성 등을 얻을 수 있으며 이러한 성질은 기존의 구조 재료를 대체하는 복합재료 보를 설계할 수 있다. 따라서 이러한 구조물의 설계를 위해서는 최적설계 기법이 필요하다. 본 논문에서는 전역해(global solution)를 구하는데 유리한 유전알고리즘(genetic algorithm)을 이용하여 최적화를 수행하였으며 제약조건이 있는 문제에 유리한 실수형 방법(real coded GA)을 사용하였고 복합재료 보의 이론 모델[3,4]을 적용하였다.

### 2. 이론 및 해석

#### 2.1. 복합재료 보의 이론

본 논문에서 소개하는 이론적인 모델에서는 2개의 상호 연관된 좌표계가 필요하다. 첫 번째 좌표계는 보의  $x, y$  축이 길이방향 축인  $z$  축과 수직인 단면에 놓여지는 직교좌표계  $(x, y, z)$ 이다. 두 번째 좌표계는  $n$ 축이 평면 요소의 중립면에 수직이고  $s$ 축이 중심면의 윤곽선에 접선방향인 국

\* 연세대학교 기계공학과

\*\* 한국기계연구원, 재료기술연구소, 복합재료그룹

부 평면 좌표계  $(n, s, z)$  이다.  $(n, s, z)$ 와  $(x, y, z)$  좌표계는 방위각  $\theta$ 와 관계되어 진다.

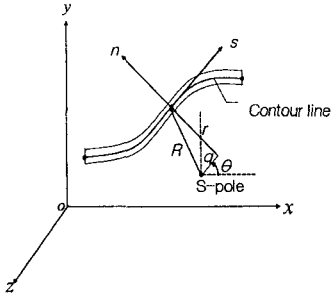


그림 1. Coordinate systems.

윤곽좌표계 상의 한 점에서의 중간면 변위성분  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  는  $x, y$  방향의 S-pole의 변위함  $U, V$ 와 원형좌표계의 회전각  $\phi$ 로 표현되어 진다.  $W$ 는  $z$  방향에서 평균 축방향 변위를 나타내며  $w$ 는 뒤틀림 함수(warping function)을 나타낸다.

$$\bar{u}(s, z) = U(z) \sin \theta(s) - V(z) \cos \theta(s) - \phi(z)q(s) \quad (1a)$$

$$\bar{v}(s, z) = U(z) \cos \theta(s) + V(z) \sin \theta(s) + \phi(z)q(s) \quad (1b)$$

$$\bar{w}(s, z) = W(z) - U'(z)x(s) - V'(z)y(s) - \phi'(z)q(s) \quad (1c)$$

미소변위 탄성이론으로부터 변형률은 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon_s = \bar{\varepsilon}_s + n\bar{k}_s \quad (2a)$$

$$\varepsilon_z = \bar{\varepsilon}_z + n\bar{k}_z \quad (2b)$$

$$\gamma_{sz} = n\bar{k}_{sz} \quad (2c)$$

여기서,

$$\bar{\varepsilon}_s = \frac{\partial \bar{u}}{\partial s}, \quad \bar{\varepsilon}_z = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (2d)$$

$$\bar{k}_s = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s^2}, \quad \bar{k}_z = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \quad \bar{k}_{sz} = -2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s \partial z} \quad (2e)$$

또한 나머지 모든 변형율은 0이 된다.  $\bar{\varepsilon}_z, \bar{k}_z,$

$\bar{k}_{sz}$ 는 각각 중간면에서의 축방향 변형율과 곡률이다.

$$\bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_z^0 + xk_y + yk_x + wk_w \quad (3a)$$

$$\bar{k}_z = k_y \sin \theta - k_x \cos \theta - k_w q \quad (3b)$$

$$\bar{k}_{sz} = k_{sz} \quad (3c)$$

여기서,  $\varepsilon_z, k_z, k_y, k_w, k_{sz}$ 는 각각 축방향 변형

율,  $x$ 와  $y$  방향에 대한 이축 곡률, 전단 중심에 대한 뒤틀림 곡률, 보에서의 비틀림 곡률을 나타내고, 다음과 같이 정의된다.

$$\varepsilon_z = W' \quad (4a)$$

$$k_z = -V'' \quad (4b)$$

$$k_y = -U'' \quad (4c)$$

$$k_w = -\phi'' \quad (4d)$$

$$k_{sz} = -2\phi' \quad (4e)$$

위의 식들로부터 변형율은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\bar{\varepsilon}_z = \varepsilon_z^0 + (x + n \sin \theta)k_y + (y - n \cos \theta)k_x + (w - nq)k_w \quad (5a)$$

$$\gamma_{sz} = n k_{sz} \quad (5b)$$

복합재료 적층 좌표계에서  $k$ 번째 orthotropic lamina의 응력-변형율 관계는 다음과 같이 주어 진다.[5]

$$\begin{pmatrix} \sigma_z \\ \sigma_{sz} \end{pmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{pmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{sz} \end{pmatrix} \quad (6)$$

여기에서  $\bar{Q}_{ij}$ 는 좌표변환된 강성행렬이다.

보의 단면적  $A$ 에 대해 적분된 축방향 힘,  $x, y$  방향에서의 비틀림 모멘트, 도심에서의 뒤틀림 모멘트는 다음과 같이 표현된다.

$$N_z = \int_A \sigma_z ds dn \quad (7a)$$

$$M_y = \int_A \sigma_z (x + n \sin \theta) ds dn \quad (7b)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z (y - n \cos \theta) ds dn \quad (7c)$$

$$M_w = \int_A \sigma_z (w + nq) ds dn \quad (7d)$$

$$M_t = \int_A \sigma_{sz} n ds dn \quad (7e)$$

결과적으로 복합재료 빔에서의 구성식은 다음과 같이 나타내어 진다.

$$\begin{pmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ M_w \\ M_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ & & & K_{44} & K_{45} \\ sym & & & & K_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_z^0 \\ k_y \\ k_x \\ k_w \\ k_{sz} \end{pmatrix} \quad (8)$$

여기에서  $E_{ij}$ 는 복합재료 빔의 stiffness이다. 복합재료의 axial rigidity,  $(EA)_c$ ,  $x, y$  축에 대한 복합재료의 flexural rigidity  $(EI_w)_c$ , 복합재료의

warping rigidity,  $(EI_w)_c$ , 복합재료의 torsional rigidity,  $(GJ)_c$  는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$(EA)_c = K_{11} = \int_s A_{11} ds \quad (9)$$

$$(EI_y)_c = K_{22} = \int_s (A_{11}x^2 + 2B_{11}x\sin\theta + D_{11}\sin^2\theta) ds \quad (10)$$

$$(EI_x)_c = K_{33} = \int_s (A_{11}y^2 - 2B_{11}y\cos\theta + D_{11}\cos^2\theta) ds \quad (11)$$

$$(EI_w)_c = K_{44} = \int_s (A_{11}w^2 - 2B_{11}wq + D_{11}q^2) ds \quad (12)$$

$$(GJ)_c = 4K_{55} = 4 \int_s D_{66} ds \quad (13)$$

여기서  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$  는 각각 복합재료의 extensional stiffness, coupling stiffness, bending stiffness 이다.

## 2.2. 유전알고리즘

유전알고리즘은 자연 진화 원리를 일반 최적화 문제에 적용한 확률적 탐색법이다. 다윈의 적자생존 이론을 바탕으로 실제의 개체집단이 자연환경에 적응해 나가는 것과 같이 설계변수들의 값으로 이루어진 설계 공간 내의 개체 집단은 상호간의 재생산과 교배 그리고 돌연변이를 통해서 가장 적합한 설계 변수값을 가지는 개체를 찾아내게 된다. 선택된 부모 염색체의 결합에 의해서 좋은 특징들을 물려받는 자손 염색체는 일반적으로 부모세대의 적합도 보다 높은 적합도를 갖게 되는 세대를 구성하게 된다. 각 세대에서 비교적 좋은 해들이 재생산되고 비교적 나쁜 해들이 소멸되게 되어 여러 번의 세대를 거치면서 얻어내고자 하는 해에 근사적으로 가까워지는 결과를 얻을 수 있다. 본 연구에서는 제약조건이 포함되는 최적화 문제를 해결하는데 적합한 실수형 코딩 GA(real coded GA)을 사용하였으며 제약조건은 벌점함수(penalty function)를 적용하여 처리하였다.[6]

## 2.3 문제의 정식화

복합재료 보는  $[0^\circ / 45^\circ / 90^\circ / -45^\circ]_n$  의 적층구조를 가지고 있으며 flange와 web은 동일한 두께 값을 가진다. 보의 web의 길이 (H)와 flange의 폭 (B), 그리고 빔의 두께 (t)를 설계변수로 설정하였으며 그림 3에 나타나 있다. steel channel 125×65와 같은 굽힘 강성을 갖도록 설계하였다. 제약조건은 보의 웹 길이를 플랜지 폭의 두 배가 넘지

않도록 설정하여 최적화를 수행하였다.

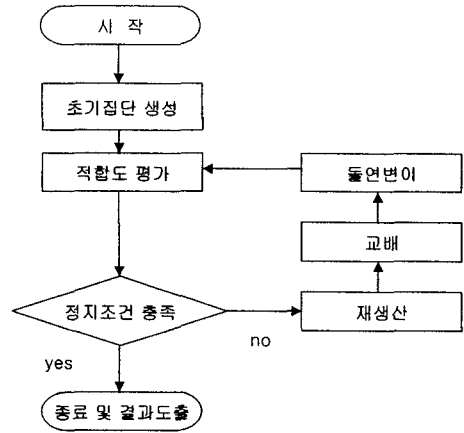


그림2. Flow diagram of G.A

이상의 내용은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} && [(EI_x)_c - (EI_x)_s]^2 \\ & \text{Subject to} && (EI_y)_c \geq (EI_y)_s \\ & && (GJ)_c \geq (GJ)_s \\ & && H \geq 2B \\ & && H \geq 10t \\ & && H, B, t \geq 0 \end{aligned}$$

여기서, 아래첨자 s는 steel의 값을 나타낸다. 설계에 적용된 재료의 물성치는 표 1과 같다.

표 1. Material properties

재료 물성	Modulus (GPa)	Shear modulus (GPa)	Poisson's ratio
S-glass/ Epoxy	43( $E_1$ ) 8.9( $E_2$ )	4.5( $G_{12}$ )	0.27( $\nu_{12}$ ) 0.06( $\nu_{21}$ )
Steel	210	80.8	0.3

Steel channel 빔의 단면규격은 표 2와 같다.

표 2. Section properties of steel channel

높이×폭 (mm)	flang 두께 (mm)	web 두께 (mm)	단면 2차 모멘트( $cm^4$ )	단면적 ( $cm^2$ )
125×65	8	6	42.4 ( $I_x$ ) 61.8 ( $I_y$ )	17.11

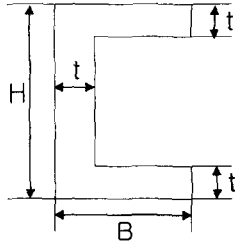


그림 3. Cross section of the channel beam.

### 3. 결과 및 고찰

실수형 유전알고리즘을 이용한 최적화 수행시 초기집단은 설계변수의 상·하한 값 내에서 무작위로 개체를 생성하여 반복 수행한다. 다음 그림 4는 각 세대별 설계변수의 변화를 나타낸 것으로 세대가 증가함에 따라 일정한 값으로 수렴하는 것을 알 수 있다. 최종 결과값은 210×110×13 (mm)의 단면형상을 가지게 되고, 이때의 복합재료 빔의 재료적 물성을 Steel 125 U형강의 재료적 물성과 비교하여 표 3에 나타나 있다.

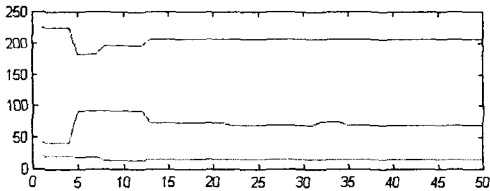


그림 4. Optimal section dimensions of the beam.

표 3. 기존 Steel 보와 설계된 복합재료 보의 비교

강성	재료	Steel	복합재료
치수(mm)		125×65×8	210×110×13
$EI_x(10^{-3}Pa\cdot m^2)$		$7.94 \times 10^8$	$8.45 \times 10^8$
$EI_y(10^{-3}Pa\cdot m^2)$		$1.35 \times 10^8$	$1.52 \times 10^8$
$GJ(10^{-3}Pa\cdot m^4)$		$3.69 \times 10^6$	$5.01 \times 10^6$

결과에서 볼 때 복합재료의 굽힘강성은 steel과 비교하여 작은 차이를 보이는 것을 알 수 있다. 이때 강성의 차이로 인하여 동일한 굽힘강성을 갖는 복합재료 U 빔의 단면형상 치수는 증가함을 알 수 있다.

### 4. 결론

앞에서 살펴본 바와 같은 보 이론을 통하여 기존의 형상을 대체하기 위한 복합재료 U 형강의 굽힘 강성을 수치적으로 계산하였으며 이를 통하여 Steel 형강의 굽힘 강성과 차이가 적은 복합재료 보의 단면형상 수치를 유전알고리즘을 통하여 산출하였다. 복합재료 보와 Steel 보가 비슷한 재료적 물성을 지니기 위해서는 복합재료 보의 단면적이 더 커지는 것을 알 수 있다. 그러나 복합재료의 밀도가 Steel에 비하여 낮으므로 동일한 재료적 물성을 지니는 복합재료 보의 총 중량은 상대적으로 낮은 값을 갖게 된다.

### 후 기

본 연구는 21세기 프론티어 연구개발사업인 차세대 소재성형 기술개발사업에서 수행된 연구 결과임.

### 참고문헌

- (1) N. R. Bauld, L. S. Tzeng and A. Valsov, Theory for fiber reinforced beams with thin walled open cross sections, Int. J. Solid struct., Vol. 20, 1984, pp. 227-297
- (2) K. Bhaskar and L. Librescu, A geometrically non-linear theory for laminated anisotropic thin-walled beams. Int. J. Engng. Sci. Vol. 33(9), 1995, pp.1331-1344
- (3) V. Savic, M. E. Tuttle, and Z. B. Zabinsky, Optimization of I-section using fiber angles as design variables. Composite Structures, Vol. 53, 2001, pp.265-277.
- (4) J. H. Lee and S. E. Kim, Lateral buckling analysis of thin-walled laminated channel-section beams. Composite Structures, Vol. 56, 2002, pp.391-399
- (5) I. M. Daniel and O. Ishai, Engineering mechanics of composite materials, Oxford University Press, 1994
- (6) M. Gen and R. Cheng, Genetic algorithms and engineering design, John Wiley & Sons, 1997.