

원형 크림프를 가지는 섬유 캔틸레버의 대변형

정재호, 이경우**, 강태진*

*서울대학교 재료공학부, **동아대학교 섬유 패션학부

On the Large Deflection of Fiber Cantilever with Circular Wavy Crimp

Jae Ho Jung, Kyung Woo Lee** and Tae Jin Kang*

*Department of Material Engineering, Seoul National University, Seoul, Korea

**College of Fiber and Fashion, Dong-A University, Pusan, Korea

Abstract

크림프를 가지는 섬유 캔틸레버의 대변형을 해석함에 있어서 크림프를 반원모양의 교대 접합으로, 섬유를 선형 탄성 보로 간주하여 해를 구하였고 구하여진 해를 단순화하여 기존의 1원소 선형 보의 변형[1], 1원소 선형 보의 끝단 회전 하중시의 변형[2], 1원소 원형 굽힘보의 변형[3]의 결과와 비교함으로써 해의 정확성을 확인하였고 본 연구의 일반해의 가장 단순한 경우인 2원소 원형 굽힘보의 처짐의 해를 구하였다. 본 연구의 가장 두드러진 독창성은 섬유의 가장 기본적인 특징인 크림프를 고려하였다는 점 즉, 단순한 1원소의 원형 보가 아닌 원형 보의 교대접합으로 실제 크림프를 구현하였다는 점과 원형 굽힘보의 끝단 하중의 방향을 고려(consideration of inclined load direction)하였다는 점, 해를 해석적(analytic)으로 타원적분으로 표시하였다는 점 그리고 타원적분으로 치환하는 방법이 기존의 타원적분을 이용한 문헌[1-5]들과 달리 적분상수의 범위에 따라 두가지 상이한 방법으로 행하여졌다는 점이다.

Introduction

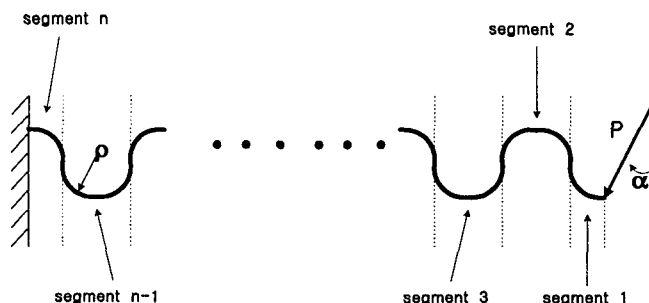


Fig.1a The segment numbering of crimped fiber under load.(even)

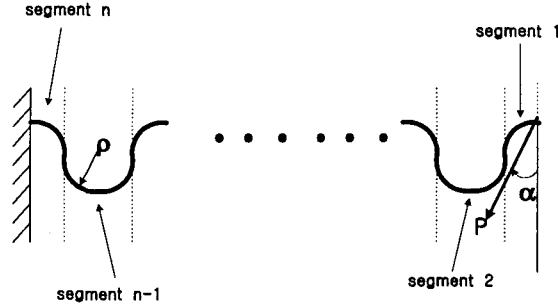


Fig.1b The segment numbering of crimped fiber under load.(odd)

위와같은 형태로 섬유 크럼프를 생각하고 문제 해석의 일반성을 잃지 않으면서 각 segment별로 구분하였고 각 segment의 곡률은 segment의 위 아래 블록 방향에 따라 $\pm \frac{1}{\rho}$, 길이는 클램프 단과 하중단은 $\frac{\pi\rho}{2}$ 이를 제외한 중간 부분은 $\pi\rho$ 로 간주하였다.

MATHEMATICAL SOLUTIONS

유도된 지배 방정식과 해는 다음과 같다.

$$\frac{d\theta}{ds} = \pm \frac{1}{\rho} - \frac{1}{EI} \{P_y(X-x) + P_x(Y-y)\} \quad (1)$$

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\frac{P}{EI} \cos(\alpha - \theta) \quad (2)$$

$$\theta = 0 \text{ at } x = 0, y = 0 \quad \frac{d\theta}{ds} = 0 \quad \text{at } x = X, y = Y, s = 0 \quad (3)$$

Case 1 ($-1 \leq C_i < 1$)

$$\sqrt{\lambda_i} = \pm \{F(k_i, \phi_i) - F(k_i, \phi_{i-1})\} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\lambda_i} \cdot L}{s_i} (\bar{x}_{i-1} - \bar{x}_i) &= [\pm \{E(k_i, \phi_{i-1}) - E(k_i, \phi_i)\} \cdot (2 \sin \alpha) \\ &+ 2k_i \cos \alpha (\cos \phi_i - \cos \phi_{i-1}) \pm \{F(k_i, \phi_{i-1}) - F(k_i, \phi_i)\} \cdot (-\sin \alpha)] \quad (5a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\lambda_i} \cdot L}{s_i} (\bar{y}_{i-1} - \bar{y}_i) &= [\pm \{E(k_i, \phi_{i-1}) - E(k_i, \phi_i)\} \cdot (-2 \cos \alpha) \\ &+ 2k_i \sin \alpha (\cos \phi_i - \cos \phi_{i-1}) \pm \{F(k_i, \phi_{i-1}) - F(k_i, \phi_i)\} \cdot (\cos \alpha)] \quad (5b) \end{aligned}$$

$$\sin\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \theta\right)\right\} = k_i \sin \phi, \quad k = \sqrt{\frac{1-C_i}{2}} \quad (6a,b)$$

Case 2 ($C_i \leq -1$)

$$(-1)^{i-\delta} \frac{\sqrt{\lambda_i}}{k_i} = F(k_i, \varphi_i) - F(k_i, \varphi_{i-1}) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{L}{S_i} (\bar{x}_{i-1} - \bar{x}_i) &= (-1)^{i-\delta} \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \frac{k_i \cos(2x + \alpha - \frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda_i(1 - k_i^2 \sin^2 x)}} dx \\ &= (-1)^{i-1} \frac{k_i}{\sqrt{\lambda_i}} \left[\frac{2 \cos \alpha}{k_i^2} (\sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \varphi_{i-1}} - \sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \varphi_i}) + \frac{2 \sin \alpha}{k_i^2} \{E(k_i, \varphi_i) - E(k_i, \varphi_{i-1})\} \right. \\ &\quad \left. + (1 - \frac{2}{k_i^2}) \sin \alpha \cdot \{F(k_i, \varphi_i) - F(k_i, \varphi_{i-1})\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{L}{S_i} (\bar{y}_{i-1} - \bar{y}_i) &= (-1)^{i-\delta} \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \frac{k_i \sin(2x + \alpha - \frac{\pi}{2})}{\sqrt{\lambda_i(1 - k_i^2 \sin^2 x)}} dx \\ &= (-1)^{i-1} \frac{k_i}{\sqrt{\lambda_i}} \left[\frac{2 \sin \alpha}{k_i^2} (\sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \varphi_{i-1}} - \sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \varphi_i}) - \frac{2 \cos \alpha}{k_i^2} \{E(k_i, \varphi_i) - E(k_i, \varphi_{i-1})\} \right. \\ &\quad \left. - (1 - \frac{2}{k_i^2}) \cos \alpha \cdot \{F(k_i, \varphi_i) - F(k_i, \varphi_{i-1})\} \right] \end{aligned} \quad (8a,b)$$

$$\sqrt{\frac{2}{1 - C_i}} = k_i, \quad \frac{1}{2} (\frac{\pi}{2} - \alpha + \theta) = \varphi \quad (9a,b)$$

Where, if the total number of segment is even $\delta = 1$ otherwise $\delta = 0$,

Results and Discussions

아래의 결과들은 각각 1원소 직선 보의 처짐[1], 1원소 직선 보의 끝단 회전각중시의 처짐, 1원소 원형 굽힘보의 처짐[3]에 대한 본 연구의 계산과 기존 연구결과를 비교한 데이터와 본 연구에 의한 2원소 원형 굽힘보의 처짐 곡선을 나타낸다. 각각의 데이터들은 모두 하중 및 치수 (dimension)에 대해서 표준화(normalization)시킨 값들이며 각 경우에 해당하는 결정변수들의 단순화 및 계산 알고리즘은 생략하였다.

1원소 직선 보의 처짐

λ_1	$\omega/(\pi/2)$		$1 \bar{X}/L -$		\bar{Y}/L	
	Calculation	Ref [1]	Calculation	Ref [1]	Calculation	Ref [1]
0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.0634371	0.063	0.00264699	0.003	0.0663697	0.066
0.4	0.1255218	0.126	0.0103551	0.010	0.130982	0.131
0.6	0.1851002	0.185	0.0224896	0.022	0.192358	0.192
0.8	0.2413310	0.241	0.0381685	0.038	0.24946	0.249
1.0	0.2937182	0.294	0.0564367	0.056	0.301729	0.302
1.5	0.4071563	0.407	0.107946	0.108	0.410985	0.411
2.0	0.4976901	0.498	0.160647	0.161	0.493464	0.493
3.0	0.6277298	0.628	0.254426	0.254	0.603258	0.603
4.0	0.7138088	0.714	0.328948	0.329	0.669967	0.670
5.0	0.7737245	0.774	0.387632	0.388	0.713789	0.714
6.0	0.8172429	0.817	0.434589	0.435	0.744572	0.745
7.0	0.8499388	0.850	0.472924	0.473	0.767378	0.767
8.0	0.8751425	0.875	0.504818	0.505	0.784995	0.785
9.0	0.8949293	0.895	0.531807	0.532	0.799063	0.799
10.0	0.9106614	0.911	0.554985	0.555	0.810606	0.811
15.0	0.9547322	0.956	0.635285	0.635	0.847634	0.848

Table 1. Angle of rotation and deflections for one-element-straight-beam case

1원소 직선보의 끝단 회전 하중시의 처짐

α (degree)	λ_1		\bar{X}		\bar{Y}	
	Calculated	Ref[2]	Calculated	Ref[2]	Calculated	Ref[2]
20	0.700944	0.7010	0.967809	0.9678	0.229217	0.2292
40	1.41946	1.4195	0.874788	0.8748	0.437976	0.4380
60	2.17538	2.1755	0.731210	0.7312	0.608160	0.6082
80	2.99401	2.9941	0.552967	0.5530	0.726075	0.7261
100	3.91161	3.9117	0.359936	0.3599	0.784000	0.7840
120	4.98711	4.9872	0.174165	0.1742	0.781037	0.7810
140	6.33373	6.3339	0.0186454	0.0186	0.723098	0.7231
160	8.24193	8.2421	-0.0803743	-0.0804	0.621464	0.6215
180	13.75000	13.7500	2.64576e-010	0.0	0.456953	0.4570

Table 2. Angle of rotation and deflections for end rotational load of one-element-straight-beam

1원소 원형보의 처짐

Our solution (ω degree)	Conways solution (ϕ_0 degree)	β (degree)
47.3983527	47.3984	40
55.7903951	55.7904	45
65.0751292	65.0752	50
75.2204478	75.2205	55
86.0435360	86.0436	60
97.2143125	97.2144	65
108.3349121	108.335	70
119.0516957	119.052	75
129.1255692	129.126	80
138.4387752	138.439	85
146.9636466	146.964	90

Table 3. Tip angles for one-element-circular-beam ($\alpha = 90^\circ$)

2원소 원형 굽힘보의 처짐곡선

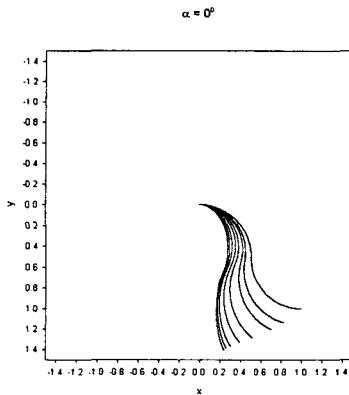


Fig. 4 profile curve for $\alpha = 0^\circ$

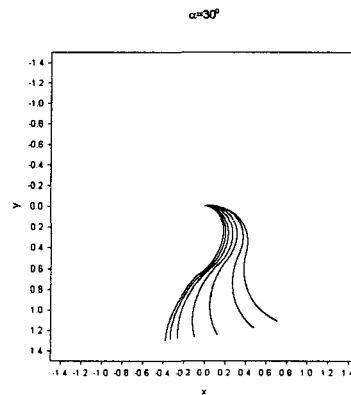


Fig. 5 profile curve for $\alpha = 30^\circ$

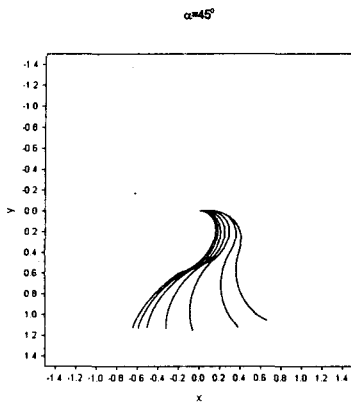


Fig. 6 profile curve for $\alpha = 45^\circ$

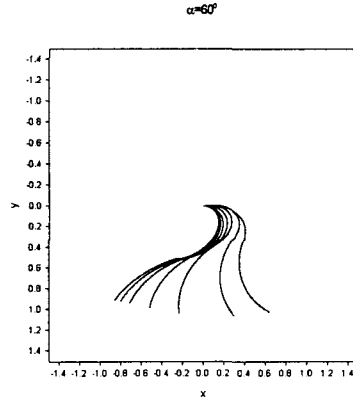


Fig. 7 profile curve for $\alpha = 60^\circ$

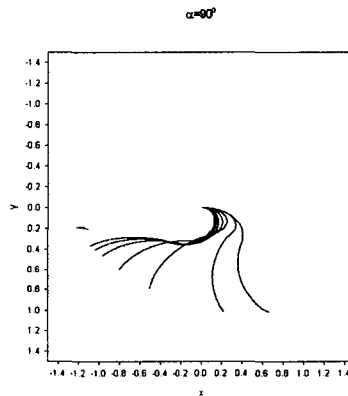


Fig. 8 profile curve for $\alpha = 90^\circ$

Literature Cited

1. Bisshop, K. E & Drucker, D. C. Large Deflection of Cantilever Beams. Quarterly of Applied Mathematics, 3, 272-275.(1945)
2. BrDH. D. Conway & Ithaca, N. Y. "The Nonlinear Bending of Thin Circular Rods." *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME 78, 7-10 (1956)
3. Nageswara Rao, B. & Venkateswara .Rao, G. Z. "On the Large Deflection of Cantilever Beams with End Rotational Load" *ZAMM*. 66(10), 507-509 (1986)
4. S. Navaee & R. E. Elling, Equilibrium Configurations of Cantilever Beams Subjected to Inclined End Loads., *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME 59, 572-579(1992)
5. Chicurel R. and Suppiger E., Load-Deflection Analysis of Fibers with Plane Crimp, *Textile Research Journal*, 30, 568-575 (1960)