

콘크리트의 인장강성을 고려한 RC보의 비틀림 해석

Torsional Analysis of RC Beam Considering Tensile Stiffening of Concrete

박 창 규*

Chang-Kyu Park

Abstract

Nonlinear analysis of the reinforced concrete beam subjected to torsion is presented. Seventeen equations involving seventeen variables are derived from the equilibrium equation, compatibility equation, and the material constitutive laws to solve the torsion problem. Newton method was used to solve the nonlinear simultaneous equations and efficient algorithms are proposed. Present model covers the behavior of reinforced concrete beam under pure torsion from service load range to ultimate stage. Tensile resistance of concrete after cracking is appropriately considered. The softened concrete truss model and the average stress-strain relations of concrete and steel are used. To verify the validity of present model, the nominal torsional moment strengths according to ACI-99 code and the ultimate torsional moment by present model are compared to experimental torsional strengths of 55 test specimens found in literature. The ultimate torsional moment strengths by the present model show good results.

Keywords : Torsion, Average strain, Newton method, After cracking.

1. 서 론¹⁾

휨부재는 일반적으로 휨과 전단을 받는다. 그러나 비틀림까지 받는 경우가 있다. 예컨대, 교량의 가장자리 보나 슬래브의 가장자리 보가 그렇다. 이러한 보는 휨과 전단 외에 비틀림까지 받는다.²⁾

Vecchio 등은 압축장이론을 비틀림 해석에 적용(Collins 등, 1991)하였으나, 콘크리트의 인장강성을 무시하였다. 이 경우 균열 전 콘크리트의 비틀림강성이 사실보다 극히 작게 됨으로써 균열 전 해석결과가 생략되는 결과를 초래하게 된다.

Vecchio 등(1986)은 콘크리트의 인장강성을 고려한 수정압축장이론을 전단문제에 적용함으로써 지금까지 통상적으로 콘크리트의 인장강성을 무시한 해석에 새로운 시도를 보이고 있다. Rahal 등(1995)은 수정압축장이론을 전단과 비틀림의 조합을 받는 보에 적용하였다.

본 논문의 연구목적은 공간트러스이론에 균열 후 콘크리트의 인장강성을 고려하고 콘크리트와 철근의 평균응력과 평균변형률을 이용한 해석을 통하여 좀 더 사실에 가까운 비틀림해석을 하고자함에 있다.

2. 철근 콘크리트 보의 비틀림

* 정회원, 군산대학교 토목환경공학부 교수

비틀림철근으로 보강된 철근콘크리트보가 비틀림모멘트를 받으면 Fig. 1에 보인 바와 같이 나선형 균열을 일으킨다.

부재의 비틀림해석은 부재를 나선형 콘크리트 사재로 구성되는 공간트러스로 취급함으로써 이루어진다. 이 경우 횡방향 인장타이는 폐쇄스터럽에 의해 얻게되고, 인장축 현저는 종방향철근에 의해 얻어진다. 이것이 박벽관, 공간트러스 이론의 개념이다.

2.1 평형방정식

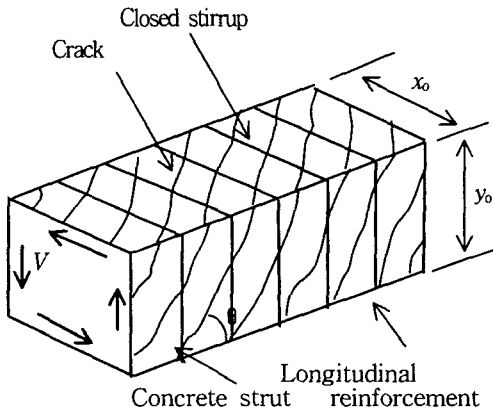


Fig. 1 Space truss model

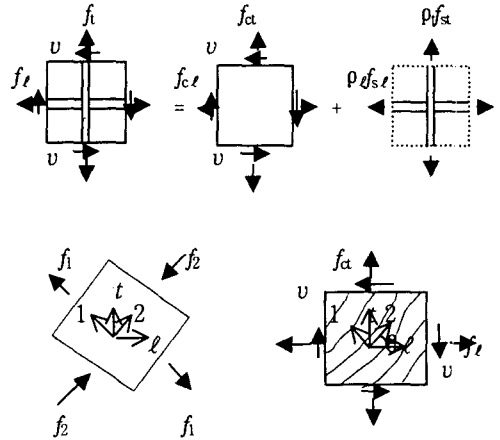


Fig. 2 RC membrane elements subjected to in-plane stresses

전단응력과 수직응력을 받는 2차원 콘크리트요소는 Fig. 2와 같은 막요소(membrane element)로 볼 수 있다. Fig. 2에서 내부 응력인 철근의 응력 f_{st} , f_{st} 과 콘크리트의 응력 f_{ct} , f_{ct} 의 합은 외부로부터 작용한 힘에 의한 응력 f_t , f_t 과 같아야 함으로 다음의 평형방정식이 성립된다.

$$f_t = f_2 \cos^2 \theta + f_1 \sin^2 \theta + \rho f_{st} \quad (1)$$

$$f_t = f_2 \sin^2 \theta + f_1 \cos^2 \theta + \rho f_{st} \quad (2)$$

$$v = (-f_2 + f_1) \sin \theta \cos \theta \quad (3)$$

여기서

f_t , f_t : 종방향 및 횡방향의 수직응력 f_{st} , f_{st} : 종방향 및 횡방향의 철근의 인장응력

ρ_t , ρ_t : 종방향 및 횡방향의 철근비 θ : 주응력의 방향각

v : 전단응력 f_1 , f_2 : 콘크리트요소 내에 작용하는 주응력

박벽관이론에 의하여 전단흐름내의 전단응력과 비틀림 모멘트의 관계식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$v = \frac{T}{2A_o t_d} \quad (4)$$

여기서

A_o : 전단흐름의 중심선으로 둘러싸인 면적 t_d : 전단흐름두께

2.2 적합방정식

Fig. 2와 같은 전단응력과 수직응력을 받는 2차원 콘크리트 막요소의 적합방정식은 변형률의 좌표 변환을 이용하여 다음과 같이 된다(Hsu, 1996).

$$\varepsilon_\ell = \varepsilon_2 \cos^2 \theta + \varepsilon_1 \sin^2 \theta \quad (5)$$

$$\varepsilon_t = \varepsilon_2 \sin^2 \theta + \varepsilon_1 \cos^2 \theta \quad (6)$$

$$\gamma = 2(-\varepsilon_2 + \varepsilon_1) \sin \theta \cos \theta \quad (7)$$

여기서

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$: 주인장 및 주압축방향의 평균 주변형률 $\varepsilon_\ell, \varepsilon_t$: 종방향 및 횡방향의 평균 수직변형률
 γ : 평균 전단변형률

콘크리트 부재가 비틀림을 받으면 콘크리트스트럿이 휨과 압축을 받는다.

Bredt의 박판탄성론에 의하여 다음과 같은 적합방정식을 얻을 수 있다(Hsu, 1984; Hsu 등, 1983).

$$\phi = \frac{p_o}{2A_o} \gamma \quad T > T_{cr} \quad (8)$$

$$\phi = \frac{T}{CG_c} \quad T \leq T_{cr} \quad (9)$$

$$C = \frac{2x_o^2 y_o^2}{x_o + y_o} \quad (10)$$

$$T_{cr} = 1.06 \sqrt{f_{cu}} \frac{A_{cp}^2}{p_{cp}} \quad (11)$$

$$\psi = \phi \sin 2\theta \quad (12)$$

$$t_d = \frac{\varepsilon_{2s}}{\psi} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{2s} = 2\varepsilon_2 \quad (14)$$

여기서

ϕ : 단위길이 당 비틀각 x_o, y_o : 각각 폐합스터럽의 짧은 변과 긴 변장
 p_o : 전단흐름의 중심선이 이루는 둘레길이 G_c : 콘크리트의 전단탄성계수
 Ψ : 콘크리트스트럿의 곡률 ε_{2s} : 콘크리트스트럿의 표면의 압축변형률
 A_{cp} : 단면의 외부둘레로 둘러싸인 콘크리트 단면적 p_{cp} : 콘크리트 단면의 둘레길이
 f_{cu} : 콘크리트의 압축강도

2.3 구성법칙

세 개의 평형방정식 식(1)~(3)과 세 개의 적합방정식 식(5)~(7)은 평균응력과 평균변형률을 기초로 한 것이므로, 이에 적용할 구성법칙 또한 평균응력과 평균변형률에 대한 것이어야 한다.

이에 대하여 Belarbi 등(1995), Pang 등(1995)이 제안한 식을 사용하였다.

콘크리트의 압축응력과 변형률의 관계식은 다음과 같다.

$$\varepsilon_2 / \xi \varepsilon_o \leq 1 \quad f_2 = \zeta f_{cu} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\xi \varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\varepsilon_2}{\xi \varepsilon_o} \right)^2 \right] \quad (15)$$

$$\varepsilon_2 / \xi \varepsilon_o > 1 \quad f_2 = \zeta f_{cu} \left[1 - \left(\frac{\varepsilon_2 / \xi \varepsilon_o - 1}{2 / \xi - 1} \right)^2 \right] \quad (16)$$

$$\zeta = \frac{0.9}{\sqrt{1 + 400\varepsilon_1}} \quad (17)$$

여기서

ε_0 : 압축강도에 대한 콘크리트의 변형률(=0.002) ζ : 연화계수
 콘크리트의 인장응력과 변형률의 관계식은 다음과 같다.

$$\varepsilon_1 \leq 0.00008 \quad f_1 = E_c \varepsilon_1 \quad (18)$$

$$\varepsilon_1 > 0.00008 \quad f_1 = f_{ct} \left(\frac{0.00008}{\varepsilon_1} \right)^{0.4} \quad (19)$$

여기서

E_c : 콘크리트의 탄성계수(12,455 $\sqrt{f_{cu}}$ kgf/cm²) f_{ct} : 콘크리트의 균열강도(0.994 $\sqrt{f_{cu}}$ kgf/cm²)
 철근의 인장응력과 변형률의 관계식은 다음과 같다.

$$\varepsilon_s \leq \varepsilon_n \quad f_s = E_s \varepsilon_s \quad (20)$$

$$\varepsilon_s > \varepsilon_n \quad f_s = f_y \left[(0.91 - 2B) + (0.02 + 0.25B) \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_y} \right] \left[1 - \frac{2 - \alpha_2/45^\circ}{1,000\rho} \right] \quad (21)$$

$$\varepsilon_n = \varepsilon_y (0.93 - 2B) \left(1 - \frac{2 - \alpha_2/45^\circ}{1,000\rho} \right) \quad (22)$$

$$B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{ct}}{f_y} \right)^{1.5} \quad (23)$$

여기서

E_s : 철근의 탄성계수 f_n : 콘크리트 속의 철근의 평균항복강도
 f_s : 철근의 평균응력 f_y : 철근의 항복강도
 α_2 : 외력에 의한 주압축응력과 종방향철근이 이루는 고정각
 ε_n : 콘크리트 속 철근의 평균항복변형률 ε_y : 철근의 항복변형률
 ρ : 철근비

3. 방정식의 해

3.1 비선형 연립방정식의 구성

방정식의 총수는 모두 17개(평형방정식 4개, 적합조건식 7개, 재료관련식 6개)이며, 미지변수는 17개 (응력 4개, 변형 및 변위 10개, 재료 3개)이다.

식(3)와 식(4)로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$T = A_o t_d (f_1 - f_2) \sin 2\theta \quad (24)$$

식(8), (12)~(14)으로부터 다음 식을 얻을 수 있다.

$$p_o t_d (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \sin^2 2\theta - 4 A_o \varepsilon_2 = 0 \quad (25)$$

모든 변수는 $\varepsilon_2, \varepsilon_1, \theta, t_d$ 를 알면 구할 수 있다. 즉, $\varepsilon_2, \varepsilon_1, \theta, t_d$ 를 독립변수로 나머지 변수를 종속변수로 간주한다. 먼저 ε_2 를 선정하고 $\varepsilon_1, \theta, t_d$ 는 식(1), (2), (25)의 연립방정식을 만족시키는 해를 Newton법으로 구하면 얻을 수 있다. 그 다음 다른 변수들은 $\varepsilon_2, \varepsilon_1, \theta, t_d$ 들로부터 순차적으로 구할 수 있다.

임의의 주압축변형률 ε_2 에 대한 비틀림모멘트는 식(24)으로부터 구할 수 있다. 주압축변형률 ε_2 를 점진적으로 증가시켜가며 그에 상응하는 비틀림모멘트를 구하면 전 하중 이력에 대한 해를 얻는다.

식(1), 식(2), 식(24), 식(25)의 연립방정식의 해를 구하기 위하여 FORTRAN 프로그램을 이용하였다.

3.2 해석예제 및 고찰

해석예제로서 참고문헌(Hsu 등, 1983)에서 인용한 보 55개를 선정하였다.

Table 1은 ACI-99 설계기준에 의한 공칭비틀림강도와 본 논문이 제안한 모델에 의한 극한비틀림모멘트를 각각 실험값과 비교한 것이다. Table 1에 보인 바와 같이 본 논문이 제안한 모델에 의한 값이 ACI-99에 의한 값보다 실험값에 더 가깝게 나타났으며, ACI-99에 의한 공칭비틀림 강도는 오히려 실험값보다 크게 나타났다.

Fig. 3~6에 보인 바와 같이 극한비틀림모멘트는 실험값에 잘 일치하고 있음을 알 수 있다. 콘크리트 균열 전 해석은 박벽관이론에 의하여 탄성이론에 의하여 수행되었으며(Hsu, 1984), 균열강도 또한 콘크리트가 2축의 인장과 압축에 있음을 감안하여 콘크리트의 파괴계수 $2.0\sqrt{f_{cu}}$ 보다 작게 $1.06\sqrt{f_{cu}}$ 를 취하였다. 이는 시방서(ACI, 1999)의 규정에 따른 것으로 균열강도의 하한 값이다. 그 결과 Fig. 3~6에 보인 바와 같이 충실단면(Fig. 3, 4)은 균열비틀림모멘트가 작게 나왔으나, 중공단면(Fig. 5, 6)은 잘 맞는 것으로 나타났다.

Table 1. Ratio of Nominal Torsional strengths compare to Test Strengths

Beam	Mean	Cov
ACI-99	1.048	0.087
Proposed Model	0.982	0.066

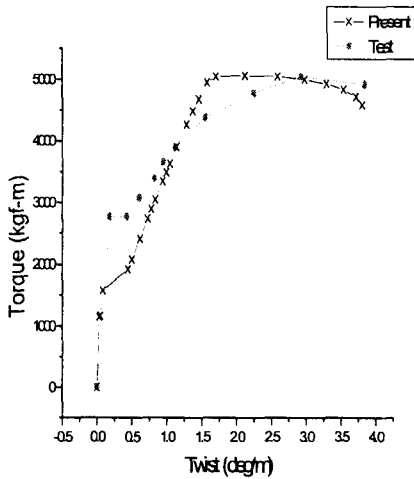


Fig. 3 Torque-twist curve for specimen G3

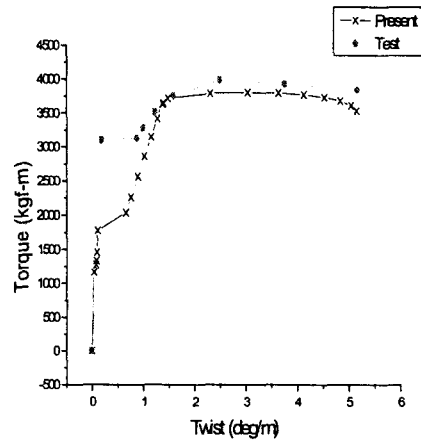


Fig. 4 Torque-twist curve for specimen G6

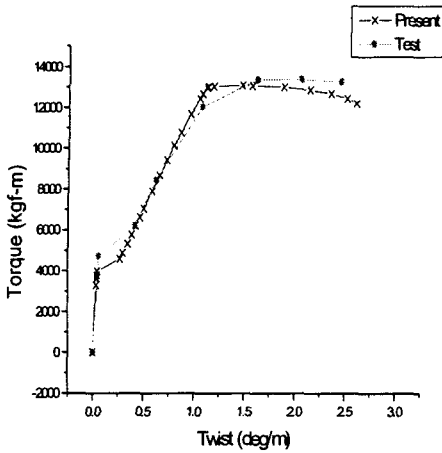


Fig. 5 Torque-twist curve for specimen T2

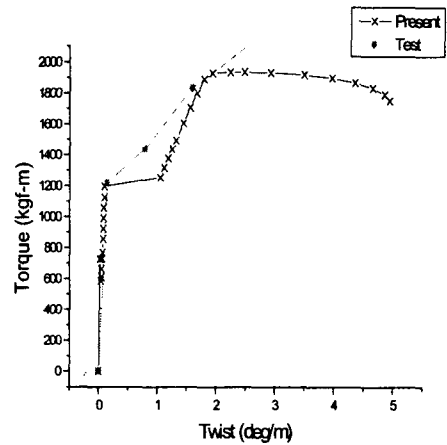


Fig. 6 Torque-twist curve for specimen VHI

4. 결론

본 연구에서는 비틀림하중을 받는 철근콘크리트부재의 거동을 해석하기 위하여 콘크리트스트럿의 연화와 콘크리트의 인장강성을 고려하였으며, 콘크리트와 철근의 의 평균응력-변형률 관계식을 사용하였다. 연구결과 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

- (1) 사용하중상태에서 극한하중상태까지 전하중 이력에 대한 거동을 해석하였다.
- (2) 콘크리트의 인장강성을 고려하여 보다 실제에 가까운 해석을 하였으며, 균열 후에도 콘크리트의 인장저항을 고려하였다.
- (3) ACI-99에 의한 공칭비틀림강도보다 본 논문이 제시한 모델에 의한 비틀림강도가 실험값에 더 가깝게 나타났다.

참고문헌

1. Belarbi, A., and Hsu, T. T. C., "Constitutive laws of softened concrete in biaxial tension-compression," ACI Structural Journal, Vol. 92, No. 5, September-October 1995, pp. 562~573.
2. Collins, Michael P., and Mitchell, D., Prestressed Concrete Structures, Prentice Hall, Inc., 1991, p.88-89.
3. Hsu, Thomas T. C., Torsion of Reinforced Concrete, Van Nostrand Reinhold Co., 1984, p.37.
4. Hsu, Thomas. T. C. "Torward A Unified Nomenclature for Reinforced-Concrete Theory," Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 112, No. 3, March, 1996, pp. 275-283.
5. Hsu, Thomas T. C., and Mo, Y. L. Softening of Concrete in Torsional Members, Research Report No. ST-TH-001-83, Dept. of Civil Eng., Univ. of Houston, March, 1983.
6. Pang, X. B., and Hsu, T. T. C., "Behavior of Reinforced Concrete Membrane Elements in Shear," ACI Structural Journal, Vol. 92, No. 6, November-December 1995, pp. 665~679.
7. Rahal, K. N. and Collins, M. P., "Analysis of Sections subjected to Combined Shear and Torsion -A theoretical Model," ACI Structural Journal, No. 92-S44, July-August 1995, pp. 459-469.
8. Vecchio, Frank J., and Collins Michael P., "The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear," ACI Structural Journal, No. 83-22, Mar.-Apr., 1986, pp. 219-231.