

2축 로터-베어링 시스템의 연성 불균형 응답해석

A Coupled Unbalance Response Analysis of Geared Two-Shaft Rotor-Bearing System

⁰이 안 성* · 하 진 용**
An Sung Lee and Jin Woong Ha

ABSTRACT

A general solution method is presented to obtain the unbalance response orbit from the finite element based equations of motion of a gear-coupled two-shaft rotor-bearing system. Particularly, are proposed the analytical solutions of major and minor axis radii of the orbit. The method has been applied to analyze the unbalance response of a 800 refrigeration-ton turbo-chiller rotor-bearing system, having a bull-pinion speed increasing gear. The bumps of unbalance responses have been observed at the first torsional natural frequency due to the coupling of lateral and torsional dynamics by the gear meshing. Further, the proposed analytical solutions have been validated with results obtained by a full numerical approach.

1. 서론

기어 전동 로터-베어링 시스템에서는 기어 물림 효과에 의해 횡-비틀림 진동의 연성과 함께 연계된 축들의 횡진동 간의 연성 특성이 나타난다⁽¹⁾. 이러한 연성 진동은 연성이 고려되지 않은 시스템 해석 결과와 비교하여 전체 시스템의 고유진동과 불균형 응답 특성에서 설계상 문제될 수도 있는 상이한 결과를 나타낼 수 있다.

기어 전동 로터-베어링 시스템에 대한 불균형 응답 연구로는 유한요소 모델링에 기초하여 Neriya 등⁽²⁾과 Kahraman 등⁽³⁾이 모달 해석법을 적용하여, 그리고 전달행렬 모델링에 기초하여 Iida 등⁽⁴⁾과 Iwatsubo 등⁽⁵⁾이 통

상적인 연립 방정식 해법과 Choi와 Mau⁽⁶⁾가 주파수 분기 기법(Frequency branching technique)을 적용하여 수행하였다. 지지 베어링에 의해 연성되는 2중 축(dual shaft) 로터-베어링 시스템의 불균형 응답에 대한 연구로는 Hibner⁽⁷⁾, Li 등⁽⁸⁾, 그리고 Gupta 등⁽⁹⁾이 전달행렬 모델링에 기초하여 연립 방정식 해법을 적용하여 수행하였다. 한편, 1축 로터-베어링 시스템에 대한 일반적 불균형 응답 궤적으로부터 얻을 수 있는 장·단축 반경의 해석적 해는 Rao⁽¹⁰⁾에 제시되어 있다.

본 연구에서는 기어로 연성되어 서로 다른 속도에서 운전하는 2축 로터-베어링 시스템의 유한요소 운동 방정식으로부터 불균형 응답 궤적을 구하는 일반화된 해법과 함께 응답 궤적 장·단축 반경의 해석적 해가 제시

* 한국기계연구원 회전체그룹

** (주)센추리 기술연구소

된다. 그리고, 이들을 적용하여 불-피니언 기어의 증속기를 채택하고 있는 800 냉동톤 터보 냉동기 로터-베어링 시스템의 연성 불균형 응답 해석을 수행하고자 한다.

2. 불균형 응답 정식화

맞물리는 기어 쌍의 연성 유한요소 모델⁽¹⁾과 축, 베어링, 디스크 등으로 구성되어 있는 일반 로터-베어링 시스템의 횡진동 및 비틀림진동 유한요소 모델⁽¹¹⁾의 결합 조립을 통하여, 기어 전동 2축 로터-베어링 시스템의 일반화된 전체 시스템 운동 방정식은 식(1)과 같이 표현될 수 있다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} = \{Q\} \quad (1)$$

두 로터 축이 갖는 구동속도, ω_1 , 과 피동속도, ω_2 , 를 고려한 일반화된 불균형 가진력, $\{Q\}$, 와 불균형 응답해, $\{q\}$, 는 식(2)와 (3)으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \{Q\} &= \omega_1^2 \{U_c\}_1 \cos \omega_1 t + \omega_1^2 \{U_s\}_1 \sin \omega_1 t \\ &\quad + \omega_2^2 \{U_c\}_2 \cos \omega_2 t + \omega_2^2 \{U_s\}_2 \sin \omega_2 t \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \{q\} &= \{a\} \cos \omega_1 t + \{b\} \sin \omega_1 t \\ &\quad + \{c\} \cos \omega_2 t + \{d\} \sin \omega_2 t \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 아래 첨자 1, 2는 각각 구동과 피동 로터 시스템을 의미하고, $\{U_c\}$ 와 $\{U_s\}$ 는 일반화된 불균형 가진력 계수, 그리고 $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ 는 불균형 응답 해의 계수이다. 식(2)와 (3)를 식(1)에 대입하여 행렬형태로 정리하면, 식(4)의 불균형 응답 행렬 방정식이 얻어 진다.

$$\left[\begin{array}{cccc} [K] - \omega_1^2[M] & \omega_1[C] & 0 & 0 \\ -\omega_1[C] & [K] - \omega_1^2[M] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [K] - \omega_2^2[M] & \omega_2[C] \\ 0 & 0 & -\omega_2[C] & [K] - \omega_2^2[M] \end{array} \right] \begin{bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \\ \{d\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \{U_c\}_1 \\ \omega_1^2 \{U_s\}_1 \\ \omega_2^2 \{U_c\}_2 \\ \omega_2^2 \{U_s\}_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

식(4)로부터 구한 불균형 응답 해의 계수로부터, 각 스테이션 또는 노드에서의 수평방향 응답, q_1 , 과 수직방향 응답, q_2 , 는 편의상 식(5)와 (6)으로 표현된다.

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 \cos \omega_1 t + b_1 \sin \omega_1 t \\ &\quad + c_1 \cos \omega_2 t + d_1 \sin \omega_2 t \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} q_2 &= a_2 \cos \omega_1 t + b_2 \sin \omega_1 t \\ &\quad + c_2 \cos \omega_2 t + d_2 \sin \omega_2 t \end{aligned} \quad (6)$$

Fig. 1에 나타낸 불균형 응답 궤적은 식(5)와 (6)에 삼각공식을 적용하여 정리하면 식(7)로 얻어 진다.

$$r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} r &= \left[\frac{1}{2} \{ (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 + a_2^2 + b_2^2 \right. \\ &\quad + c_2^2 + d_2^2) + (a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2) \cos 2\omega_1 t \\ &\quad + (c_1^2 - d_1^2 + c_2^2 - d_2^2) \cos 2\omega_2 t \\ &\quad + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2) \sin 2\omega_1 t \\ &\quad + 2(c_1 d_1 + c_2 d_2) \sin 2\omega_2 t \\ &\quad + 4(a_1 c_1 + a_2 c_2) \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t \\ &\quad + 4(b_1 d_1 + b_2 d_2) \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \\ &\quad + 4(a_1 d_1 + a_2 b_2) \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t \\ &\quad \left. + 4(b_1 c_1 + b_2 c_2) \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t \right]^{1/2} \end{aligned}$$

여기서, r 이 최대·최소 값(즉, 타원 궤적의 장축과 단축 반경)을 갖는 조건들은 식(8)과 (9)로부터 얻어지며, 이들은 식(10)~(13)으로 표현된다.

$$\frac{\partial r}{\partial (\omega_1 t)} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial r}{\partial (\omega_2 t)} = 0 \quad (9)$$

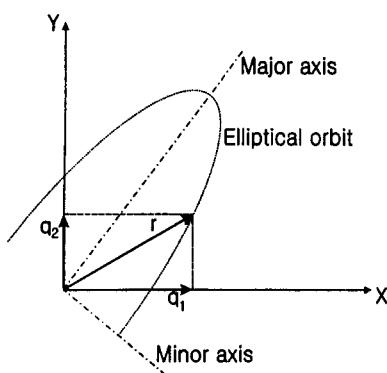


Fig. 1 A general elliptical orbit of unbalance response with its major and minor axes

$$-2(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2) \sin 2\omega_1 t + 4(a_1 b_1 + a_2 b_2) \cos 2\omega_1 t = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & -4(a_1 c_1 + a_2 c_2) \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t \\ & + 4(b_1 d_1 + b_2 d_2) \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t \\ & -4(a_1 d_1 + a_2 d_2) \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \\ & + 4(b_1 c_1 + b_2 c_2) \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & -2(c_1^2 - d_1^2 + c_2^2 - d_2^2) \sin 2\omega_2 t \\ & + 4(c_1 d_1 + c_2 d_2) \cos 2\omega_2 t = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & -4(a_1 c_1 + a_2 c_2) \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t \\ & + 4(b_1 d_1 + b_2 d_2) \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t \\ & + 4(a_1 d_1 + a_2 d_2) \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t \\ & -4(b_1 c_1 + b_2 c_2) \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

식(10)~(13)에 삼각공식을 적용하고 정리하여 얻어진 (r 이 최대·최소 값을 갖는) 조건 식들을 식(7)에 대입하고, 최종적으로 이를 조건 식들의 각 조합에 대한 r 값의 비교를 통해 얻어진 불균형 응답 궤적의 최대·최소 반경은 다음의 식(14)로 표현된다.

$$\begin{aligned} \therefore r_{\max} = & \left[\frac{1}{2} \{ (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) \right. \\ & \left. \pm [(a_1^2 - b_1^2 + a_2^2 - b_2^2)^2 + 4(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2]^{1/2} \pm [(c_1^2 - d_1^2 + c_2^2 - d_2^2)^2 + 4(c_1 d_1 + c_2 d_2)^2]^{1/2} \right]^{1/2} \quad (14a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \pm 2(a_1 c_1 + a_2 c_2) \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \right] \\ & \mp 2(b_1 d_1 + b_2 d_2) \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \right] \\ & \pm 2(a_1 d_1 + a_2 d_2) \left[\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \right] \\ & \pm 2(b_1 c_1 + b_2 c_2) \left[\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2 + \delta^2}} \right] \end{aligned}$$

$$\text{where, } \alpha = a_1 c_1 + b_1 d_1 + a_2 c_2 + b_2 d_2 \quad (14b)$$

$$\beta = a_1 d_1 + b_1 c_1 + a_2 d_2 + b_2 c_2$$

$$\text{where, } \gamma = a_1 c_1 + b_1 d_1 + a_2 c_2 + b_2 d_2 \quad (14c)$$

$$\delta = b_1 c_1 - a_1 d_1 + b_2 c_2 - a_2 d_2$$

여기서, '+'는 불균형 응답 궤적의 최대 반경의 경우에 그리고 '-'는 최소 반경의 경우에 적용된다.

3. 해석 결과 및 토의

이상에서 개발된 기어로 연성된 2축 로터-베어링 시스템에 대한 불균형 응답 해법을 적용하여, Fig. 2에 보여진 증속 기어를 갖는 800 냉동톤 터보 냉동기 로터-베어링 시스템의 연성 불균형 응답 해석을 수행하였다. 정격속도 3,420 rpm인 모터와 불-기어로 구성된 구동 로터-베어링 시스템은 불-피니언 기어 쌍의 증속기를 통해 압축기 임펠러와 피니언-기어로 구성된 피동 로터-베어링 시스템을 11,845 rpm으로 구동하고 있다.

구동 로터에 시험 불균형 U_{M1} (2018.5 g · mm)와 U_{M2} (873.0 g · mm)를 모터 로터와 불-기어에 180° out-of-phase로 부가하여 수행한 해석 결과가 Fig. 3과 4의 구동/피동 로터의 불균형 응답으로 나타나 있다. 모터 로터와 임펠러에서의 최대 진폭(peak-to-peak)이 각각 $60 \mu\text{m}$ 과 $0.06 \mu\text{m}$ 이하로 서로 3차수(order of 3) 정도의 차이를 보여 연성에 의한 상호 불균형 영향도는 경미한 것으로 분석된다.

피동 로터에 시험 불균형 U_f (19.7 g · mm)

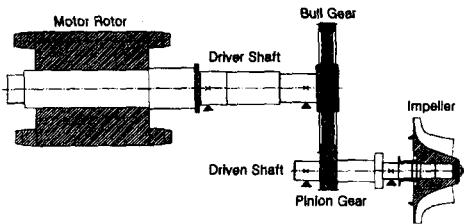


Fig. 2 Schematic of a 800 RT turbo-chiller rotor-bearing system

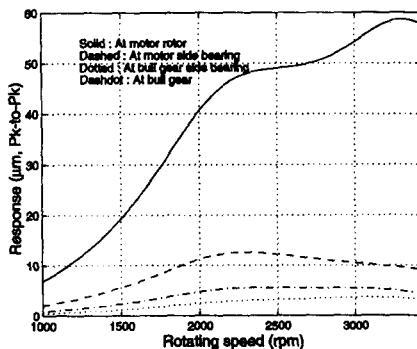


Fig. 3 Coupled unbalance responses at the driver rotor system with test unbalances attached to the motor rotor and bull gear

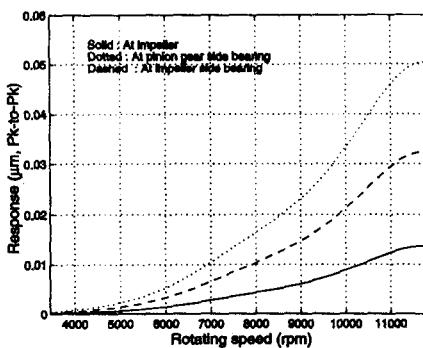


Fig. 4 Coupled unbalance responses at the driven rotor system with test unbalances attached to the motor rotor and bull gear

를 임펠러에 부가하여 수행한 해석결과가 Fig. 5와 6의 피동/구동 로터의 불균형 응답으로 나타나 있다. 임펠러와 모터 로터에서

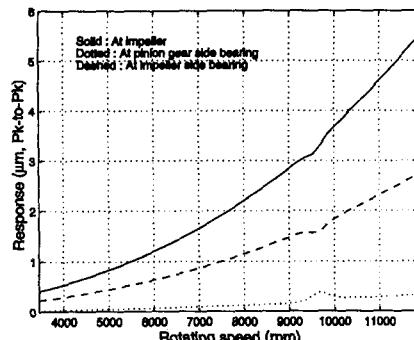


Fig. 5 Coupled unbalance responses at the driven rotor system with a test unbalance attached to the compressor impeller

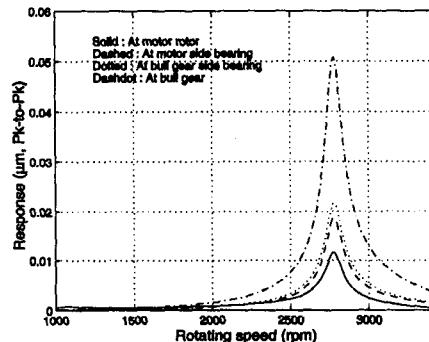


Fig. 6 Coupled unbalance responses at the driver rotor system with a test unbalance attached to the compressor impeller.

의 최대 진폭이 각각 $6 \mu\text{m}$ 과 $0.06 \mu\text{m}$ 이하로 서로 2차수 정도의 차이를 보여 다시 한번 연성에 의한 상호 불균형 영향도는 경미한 것으로 분석된다. 그러나, Fig. 5로부터 피동 로터의 불균형 응답이 9,621 rpm에서 뛰는 현상이 관찰된다. 이 속도는 비틀림 1차 공진 주파수와 정확히 일치하며, 횡-비틀림 진동의 연성의 영향으로 비틀림 공진이 횡진동 불균형 응답에 영향을 준 것으로 분석된다. 또한, Fig. 6로부터 피동 로터의 9,621 rpm에 상응하는 구동 로터의 2,778 rpm에서 마찬가지 이유로 불균형 응답의 증

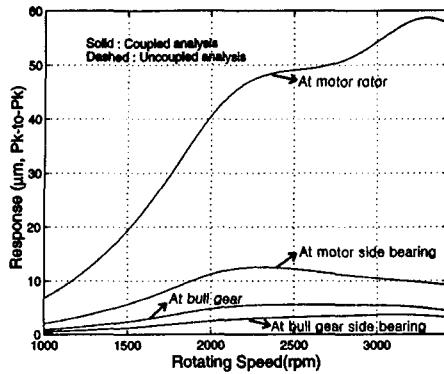


Fig. 7 Coupled and uncoupled unbalance responses at the driver rotor system with test unbalances attached to the motor rotor, bull gear, and compressor impeller.

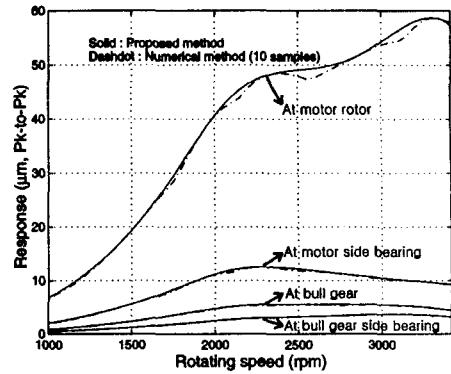


Fig. 9 Coupled unbalance responses at the driver rotor system with a full set of test unbalances as obtained by the proposed and full numerical methods for 10 samples

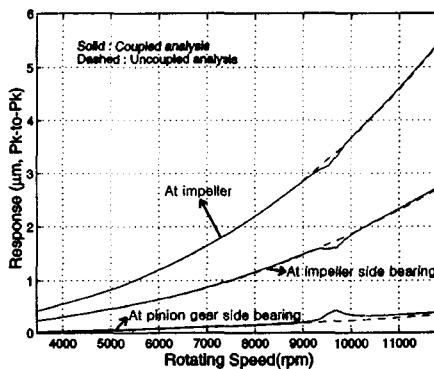


Fig. 8 Coupled and uncoupled unbalance responses at the driven rotor system with test unbalances attached to the motor rotor, bull gear, and compressor impeller

폭이 관찰된다.

구동 로터와 피동 로터에 시험 불균형 U_{M1} , U_{M2} , 그리고 U_I 를 동시에 해당 위치에 부가하여 (여기서, U_{M1} 과 U_{M2} 는 180° out-of-phase, 그리고 U_{M1} 과 U_I 는 in-phase의 관계에 있음) 수행한 연성과 해당 비연성 해석 결과가 비교되어 Fig. 7과 8의 구동/피동 로터의 불균형 응답으로 나타나 있다. Fig. 7로부터 구동 로터에서 연성과 비연성 해석에 따른 결과의 차이는 없는 것

으로 나타난다. 그리고, Fig. 8로부터 피동 로터에서 연성 해석 결과가 비틀림 공진의 연성의 영향으로 다소 뛰는 것을 제외하고는 전반적으로 비연성 해석 결과와 잘 일치하는 것으로 관찰된다.

한편, 본 연구에서 제안된 불균형 응답 측정의 해석적 장축 반경과 완전 수치해석으로부터 예측된 터보 냉동기 주요부에서의 불균형 응답 최대 진폭(peak-to-peak)이 구동 로터의 속도 3,420 rpm에서 Table 1에 비교되어 있으며, 표에 제시된 회전 당 샘플의 수는 수치해석에서 최대 진폭을 찾기 위해 사용된 샘플의 수로 구동 로터의 1회전을 기준으로 한다. Table 1로부터 샘플의 수에 관계없이 두 방법의 결과가 잘 일치하고 있으며, 피니언 측 베어링 위치의 불균형 응답을 제외하면 샘플의 수가 증가함에 따라 오차가 크게 감소함을 알 수 있다. Fig. 9는 제안된 방법과 10개의 샘플을 사용한 완전 수치적 방법으로 얻어진 구동 로터 시스템에서의 최대 연성 불균형 응답을 보여주고 있다. 두 방법에 의한 응답들은 전반적으로 운전 속도 범위에서 비교적 잘 일치하고 있다.

Table 1 Comparison of coupled unbalance responses at a driver speed of 3,420 rpm as obtained by the proposed and full numerical methods with a full set of test unbalances

Proposed method	Coupled unbalance responses (μm , peak-to-peak)			Error (%) between proposed and full numerical methods			
	Full numerical method			Sample number per revolution			
	10	100	1000	10	100	1000	
At motor rotor	57.7866	57.2790	57.7778	57.7863	0.8784	0.0152	0.0005
At motor side bearing	9.2585	9.2387	9.2577	9.2581	0.2139	0.0086	0.0043
At bull gear side bearing	3.1326	3.1274	3.1322	3.1322	0.1660	0.0128	0.0128
At bull gear	4.3948	4.3781	4.3919	4.3920	0.3800	0.0660	0.0637
CPU time (s)	0.05	0.06	0.18	1.78			
At pinion side bearing	0.3750	0.3735	0.3735	0.3735	0.4000	0.4000	0.4000
At impeller side bearing	2.7420	2.7206	2.7377	2.7377	0.7805	0.1568	0.1568
At impeller	5.4708	5.4511	5.4572	5.4690	0.3601	0.2486	0.0329
CPU time (s)	0.05	0.05	0.15	1.37			

4. 결론

본 연구에서는 기어로 연성되어 서로 다른 속도에서 운전하는 기어 전동 2축 로터-베어링 시스템의 유한요소 운동 방정식으로부터 불균형 응답 궤적을 구하는 일반화된 해법이 제시되었으며, 특히 장·단축 반경의 해석적 해가 유도되었다. 불-피니언 기어의 중속기를 채택하고 있는 800 냉동톤 터보 냉동기 로터-베어링 시스템의 연성 불균형 응답 해석을 수행한 결과, 기어 물림 효과에 따른 횡-비틀림 진동의 연성의 영향으로 1차 비틀림 고유진동수에서 피동 고속 압축기 로터 시스템의 불균형 응답에서 템 발생이 관찰되었으나, 두 축간의 상호 불균형 응답 영향도는 경미한 것으로 예측되었다. 한편, 본 연구에서 유도된 불균형 응답 궤적의 장·단축 반경 해는 두 축이 기어뿐만 아니

라 베어링 등에 의해 연성되어 상호 작용하며 다른 속도로 운전하는 2축 또는 이중(dual) 축 로터-베어링 시스템에 대해 일반적으로 적용될 수 있다.

참고문헌

- (1) 이안성, 하진웅, 최동훈, 2001, “증속 기어 전동 로터-베어링 시스템의 횡-비틀림 연성 유한요소 로터다이나믹 해석,” 한국소음진동학회지 제11권 11호, pp. 82-88.
- (2) Neriya, S. V., Bhat, R. B., and Sankar, T. S., 1985, “Coupled Torsional Flexural Vibration of a Geared Shaft System Using Finite Element Method,” The Shock and Vibration Bulletin, Part 3, Vol. 55, pp. 13-25.
- (3) Kahraman, A., Ozguven, H. N., Houser,

- D. R. and Zakrajsek, J. J., 1992, "Dynamic Analysis of Geared Rotors by Finite Elements," ASME Trans. Journal of Mechanical Design, Vol. 114, pp. 507-514.
- (4) Iida, H., Tamura, A., Kikuchi, K., and Agata, H., 1980, "Coupled Torsional-flexural Vibration of a Shaft in a Geared System of Rotors (1st Report)," Bulletin of the JSME, Vol. 23, No. 186, pp. 2111-2117.
- (5) Iwatsubo, T., Arii, S., and Kawai, R., 1984, "Coupled Lateral-Torsional Vibration of Rotor System Trained by Gears," Bulletin of JSME, Vol. 27, No. 224, pp. 271-277.
- (6) Choi, S. T., and Mau, S. Y., 1995, "Dynamic Analysis of Geared Rotor-Bearing Systems by the Transfer Matrix Method," ASME DE-Vol. 84-2, Design Engineering Technical Conferences, Vol. 3, Part B, pp. 967-976.
- (7) Hibner, D. H., 1975, "Dynamic Response of Viscous-Damped Multi-Shaft Jet Engines," Journal of Aircraft, Vol. 12, No. 4, pp. 305-312.
- (8) Li, Q., Yan, L., and Hamilton, J. F., 1986, "Investigation of the Steady-State Response of a Dual-Rotor System with Intershift Squeeze Film Damper," ASME Trans. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, Vol. 108, pp. 605-612.
- (9) Gupta, K., Gupta, K. D., and Athre, K., 1993, "Unbalance Response of a Dual Rotor System: Theory and Experiment," ASME Trans. Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 115, pp. 427-435.
- (10) Rao, J. S., 1996, Rotor Dynamics, New Age International Publishers, Third Edition.
- (11) Lee, A. S. and Lee, Y.-S., 2001, "Rotordynamic Characteristics of an APU Gas Turbine Rotor-Bearing System Having a Tie Shaft," KSME International Journal, Vol. 15, No. 2, pp. 152-159.