

## 기본 진동수 최대화를 위한 지지점의 최적 위치에 관한 연구

A Study on Optimal Location of Point Supports  
to Maximize the Fundamental Frequency

°류충현\* · 이영신\*\*

Chung-Hyun Ryu, Young-Shin Lee

**Key Words :** cantilever plate(외팔판)

### ABSTRACT

Addition of point supports results in increasing the fundamental frequency of a structure, generally. In this paper, searching more effective location of point supports is a major object to maximize a fundamental frequency of various cantilever plates. Results are presented by aspect ratio of the plate, by design domain within which point supports generate, and by mass location equipped on the plate. Optimization method is applied due to expand the ESO(Evolutionary Structural Optimization) method.

### 1. 서 론

한쪽 단이 고정된 판인 외팔판은 공학구조물에서 중요한 구조요소들 중의 하나이다. 일반적으로 외팔판은 터빈 블레이드, 비행기 날개등과 같은 복잡한 문제를 단순화하여 해석 모델로 사용되어왔다. 다양한 공학분야의 적용에서 판의 변위를 구속하거나 진동특성에 영향을 주는 구속조건을 더하여 고유진동수를 증가시키려는 상황들이 발생하게 되었다. 전자장치가 소형화와 경량화를 지향함으로서 전자부품을 구성하는 회로판의 고밀도화가 필수적이며 이동중에 발생되는 외력에 의한 변위에 대한 허용범위가 작아지고 있다. 고려되는 외력은 정적인 하중이 기본이 되나 주기적인 또는 충격적인 하중이 미치는 영향을 또한 무시할 수 없다. 따라서 구조물의 동적특성을 개선하기 위해 연구를 하고 있다.

Saliba[1]는 사각 외팔판이 대칭적으로 분포하는 점지지들이 자유단을 따라 있을 경우에 대한 자유진동해석을 해석적인 방법으로 연구하였다. 해석적인 방법은 Gorman에 의해 개발된 중첩법을 이용하여 수행되었다. Narita[2]는 외팔판에 점구속이 진동에 미치는 영향을 해석적 방법을 통해

진동수와 모드형상으로 고찰하였다. Singhal과 Gorman[3]은 판의 한쪽 끝단이 부분적으로 고정된 사각판의 자유진동해석을 수행하였다. 고려된 사각판의 내부에 볼트로 지지되는 점지지가 존재하지 않을 경우와 존재할 경우에 대하여 중첩법을 이용하여 해석한 결과와 실험결과를 비교하여 잘 일치함을 보였다.

Lim[4] 등은 PCB 구조의 진동해석을 실험과 유한요소기법을 이용하여 연구를 하였다. 이영신[5]은 복합재료 사각판에 점지지가 있을 경우에 대하여 실험과 유한요소해석을 이용하여 연구하였다.

Zhao 등[6,7]은 진화적 구조 최적화 기법을 이용하여 고유진동수를 최대화할 수 있는 위상을 연구하였다. 최적화 과정은 각 요소가 구조물의 동적특성에 영향을 미치는 정도를 나타내는 기여도를 정의하여 요소의 존재/제거를 결정하고 반복과정을 수행함으로서 최적 위상을 얻게 된다.

본 연구는 외팔판을 대상으로 기본 진동수를 최대화하기 위하여 변위를 구속하는 점지지들의 최적 위치는 선정하는데 있어서 진화적 구조 최적화 기법의 개념을 활용하였다. 고려된 외팔판은 종횡비, 설계영역, 질량의 분포에 따른 영향을 고찰하기 위해 선정되었다.

### 2. 해석모델 및 최적화

해석 모델은 한쪽 끝단이 고정되고 나머지 세 끝단들은 자유경계조건인 CFFF의 외팔판을 정하였다. 판재의 재질은 일반 강재로 고려하였으며 두께는 0.01m이다. 유한요소 해

\* 충남대학교 기계설계공학과  
E-mail : rch@orgio.net  
Tel : (042) 821-7621, Fax : (042) 822-7366

\*\* 충남대학교 기계설계공학과

석에 사용된 요소는 4절점의 shell요소를 사용하였으며 메쉬는  $20 \times 20$ 를 적용하였다. 점지지 경계조건은 각 방향에 대한 변위만을 구속할 수 있는 조건으로 정하였다. 사용된 해석코드는 상용유한요소해석코드인 ANSYS이고 점지지의 생성을 포함한 일련의 과정은 APDL(Ansys Parametric Design Language)을 이용하여 전개하였다.

Fig. 1은 해석모델인 외팔판의 개략도를 나타내고 있으며 폭과 높이는 각각 A와 B이다.

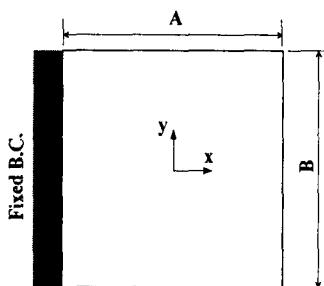


Fig. 1 Schematic diagram for a rectangular cantilever plate

일반적으로 구조물에 점지지의 증가는 구조물의 강성을 증가시키는 결과를 초래하여 구조물의 고유진동수를 증가하게 된다. 그러나 고유진동수를 증가시키기 위해 구조물의 모든 부분에 지지점을 설치하는 것은 비합리적이며 또한 주변 환경에 의해 불가능할 경우가 대부분이다. 따라서 점지지의 개수가 한정되어 있을 경우에 대해 고유진동수를 증가시키기 위해서 가장 효과적인 지점을 선정하여 지지하는 기술이 절실히 필요하다. 고유진동수를 증가시키는데 있어서 지지점의 가장 효과적인 지점은 고유벡터가 큰 지점이 된다. 모든 영역에서 지지점이 설치될 수 있다면 그리고 정하여진 지지점의 수가 2개 정도라면 예측할 수 있으나 지지점의 설치 영역이 한정되어 있고 지지점의 수가 그 이상이 되면 고유진동수를 증가시키는데 가장 효과적인 지점을 예측하는 것은 힘들게 된다. 지지점의 설치 영역은 주변환경이나 운전환경에 의해 결정되며 이 조건은 최적화 과정에서 제약조건으로 작용하게 된다.

Fig. 2는 기본 진동수를 최대화하기 위한 과정을 순서도를 나타낸 것이다.

단계 1 최초 모델을 생성하고 진동해석을 수행한다.

단계 2 최대화 모드를 선정한 후 그 모드에 해당하는 진동수를 목적함수로 사용한다. 본 연구에서는 사용한 모드는 1차 모드에 해당하는 기본 진동수를 목적함수로 사용하였다.

단계 3 지지점의 설치영역인 설계영역(Design Domain)을 정의하고 지지점의 개수를 선택한다.

단계 4 설계영역에서 최대 고유벡터를 갖는 절점들을 선

정한 후 점지지 경계조건을 적용한다.

단계 5 변화된 해석모델을 고유진동 해석을 수행한다.

단계 6 변화된 해석모델의 기본 고유진동수와 변화전의 해석모델의 기본 고유진동수의 차가 최초 모델의 기본 고유진동수의 50%보다 작으면 반복과정을 멈추고 그렇지 않으면 단계 4부터의 일련의 과정을 정하여진 지지점의 개수에 이를 때까지 반복 수행하여 지지점의 수를 증가시킨다.

$$Diff = |f_1(I-1) - f_1(I)| \quad (1)$$

### 3. 결과 및 고찰

외팔판의 크기가  $A=1m$ ,  $B=1m$ 인 경우에 대하여 기본 고유진동수를 최대화하기 위한 최적의 지지점의 위치를 Fig. 3에 나타내었다. 각 지지점을 나타내는 번호들은 반복과정이 진행됨에 따라 생성되는 순서를 나타낸다. 즉 지지점의 개수를 3으로 설정하게 되면 1, 2 그리고 3번의 지점이 기본진동수를 최대화하기 위한 최적의 지점들이 되고 지지점의 개수를 5로 설정하게 되면 1번부터 5번까지의 지점들을 지지하는 것이 기본진동수를 최대화하는데 가장 효과적인 것이다. 최대 고유벡터를 갖는 절점은 대칭모드의 경우에는 1개

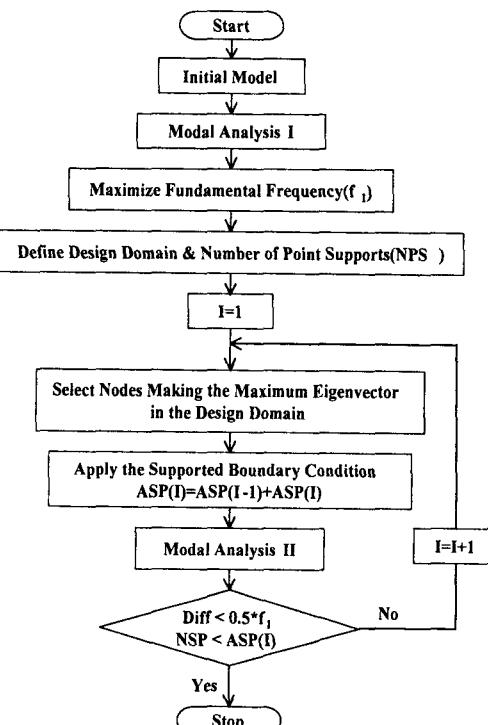


Fig. 2 Flowchart in searching optimal location of point supports to maximize the fundamental frequency

이상이 되고 최대 고유벡터의 0.1%이하의 차이를 보이는 절점들은 동일하게 취급하여 동시에 여러 절점에 지지점이 생성될 수 있다. 이는 수치적인 결과들이 초래할 수 있는 오류를 줄이고 좀더 실제적인 결과를 얻을 수 있게 하였다.

첫 번째 지지점은  $x=A/2$ 인 자유단의  $y=0$ 부근에 생성되고 두 번째 지지점은  $x=A/5$ ,  $y=\pm B/2$ 에 생성된다. 이 결과들은 각각의 경계조건을 갖는 판의 기본 진동모드를 고려하여 보면 쉽게 예측이 될 수 있다. 그러나, 지지점의 개수가 3개 이상일 경우에는 이를 예측하기가 쉽지 않다. 세 번째 지지점은  $x=A/20$ ,  $y=0$ 지점에 생성되며 네 번째는  $x=A/2$ ,  $y=\pm B/2$ 에 생성된다. 일련의 과정을 제약조건이 위배될 때까지 수행하여 보면 판의 전영역에 지지점들이 생성되는 것을 볼 수 있으나 이 결과는 이미 예측된 바이며 이를 적용할 수 없는 경우가 일반적이다.

반복과정이 수행됨에 따라 각 모드에 대한 고유진동수의 변화이력을 Fig. 4에 나타내었다. 반복과정은 기본 고유진동수의 변화가 최초 기본 고유진동수의 50%보다 커야한다는 제약조건에 위배될 때까지 수행되었다. 모든 모드의 고유진동수는 반복과정이 진행됨에 따라 즉, 지지점의 수가 증가함에 따라 증가한다. 반복과정 8까지는 각 모드들의 고유진동

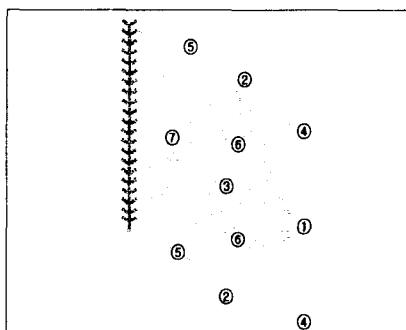


Fig. 3 Optimal location of point supports for  $1\text{m} \times 1\text{m}$  square cantilever plate

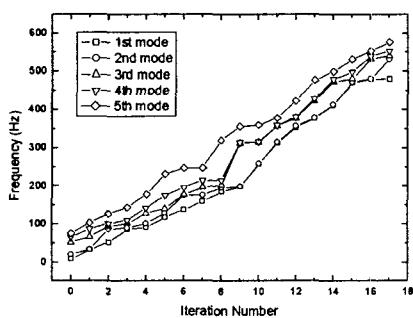
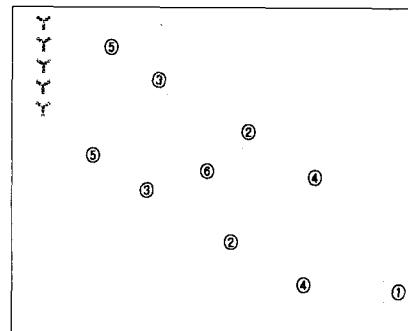
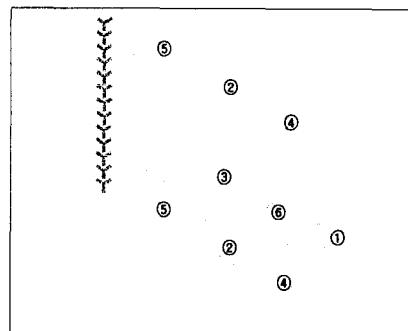


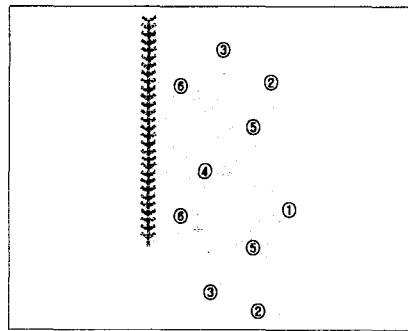
Fig. 4 History of natural frequencies with iteration number for  $1\text{m} \times 1\text{m}$  square cantilever plate



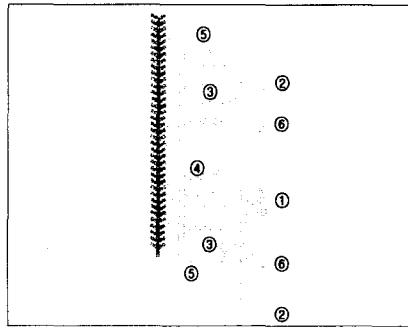
(a)  $B/A = 0.2$



(b)  $B/A = 0.6$



(c)  $B/A = 1.4$



(d)  $B/A = 1.8$

Fig. 5 Optimal location of point supports for rectangular cantilever plates with various aspect ratio

수가 서로 다르게 증가되나 반복과정 9이후에는 1차와 2차 그리고 3차와 4차가 동일한 값으로 증가하는 것을 알 수 있다. 반복과정 4의 경우에는 기본 고유진동수가 최초 모델의  $91/8 = 11.4$ 배로 증가되는 것을 확인할 수 있다.

### 3.1 종횡비(B/A)의 영향

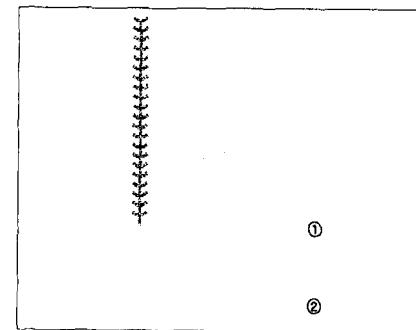
외팔판의 종횡비에 따라 기본 고유진동수를 증가시키기 위한 지지점의 최적위치를 탐색하였다. Fig. 5은 종횡비가 다른 외팔판에서 지지점의 개수에 따른 최적의 지지점들의 위치를 나타내고 있다. 1개의 지지점을 결정할 경우에는 종횡비에 관계없이  $x = A/2$ ,  $y = 0$ 인 부근에 설치하는 가장 효과적이다. 2번째의 지지점은 종횡비가 1보다 큰 경우에  $x = A/2$ ,  $y = \pm B/2$ 에 생성되며 이들은 첫 번째 지지점의 x 좌표가 동일한 것이 특징이다. 그러나, 종횡비가 1보다 작은 경우에는  $x = A/10$ ,  $y = \pm B/2$ 에 최적의 지지점이 생성된다. 지지점을 경계로 하여 x방향의 수직인 면으로 나누어 보면  $B/A = 1.8$ 인 판인 경우에는 2이고 종횡비가 작을수록 증가하여  $B/A = 0.2$ 인 경우에는 6이 된다. 반면 지지점을 경계로 하여 y방향의 수직인 면으로 나누어 보면 종횡비가 작을수록 감소하는 특징이 있다.

### 3.2 설계영역의 영향

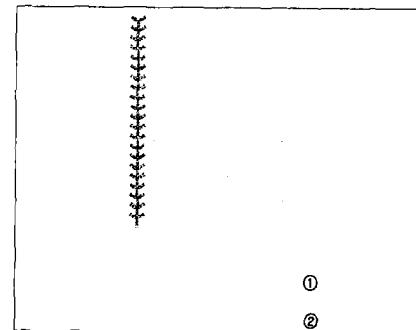
지지점이 설치될 수 있는 영역은 주변장치나 환경에 따라 여러 가지 형태로 나타날 수 있으나 본 연구에서는 Table 1과 같은 몇몇의 경우에 대해서 고찰하였다. 각각의 경우를 DD1~DD6로 정하였으며 DD1인 경우에는 설계영역이  $y < 0$ 이고 DD2인 경우에는 설계영역이  $y < -B/4$ 이다. 유사하게 DD3는  $x > 0$ , DD4는  $x > A/4$ 이고 DD5인 경우에는 설계영역이  $|y| > A/4$ 인 경우이다. 고려된 외팔판은 정사각판으로  $A = B = 1m$ 이다.

Table 1 Considered types for design domain

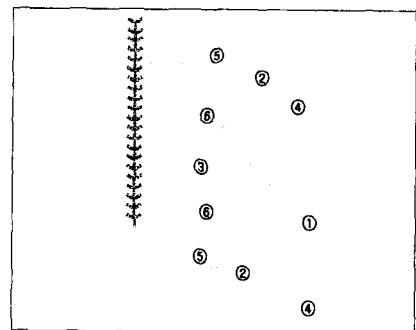
Sign	Design domain	Sign	Design domain
DD1		DD2	
DD3		DD4	
DD5			<p>■ : Fixed B.C. ■ : Design domain</p>



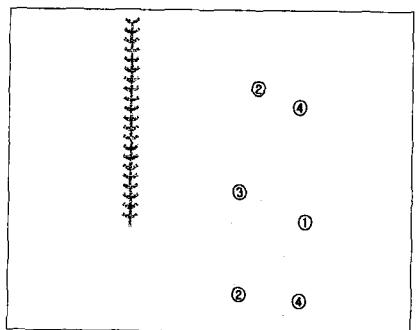
(a) DD1



(b) DD2



(c) DD3



(d) DD4

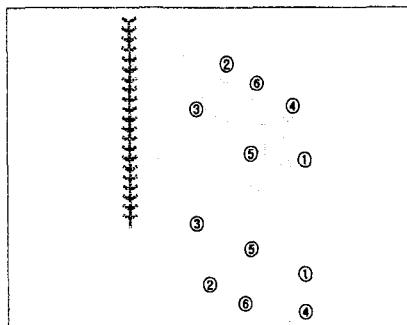
Fig. 6 Optimal location of point supports for square cantilever plates with various design domain (continued)

각 설계영역에 따른 지지점의 배치는 Fig. 6에 나타내었다. DD1과 DD2인 경우를 보면 두 경우 모두  $x=A/2$ 인 지점에만 지지점이 생성된 것을 확인할 수 있으며  $y$  방향으로는 첫 번째 지지점이 설계영역에서  $y=0$ 에 가장 가까운 지점에 생성된다. 그리고 두 번째 지지점은  $y=B/2$ 에 생성되지만 변화된 경계조건에 따른 기본 진동수의 변화가 50% 이상이어야 한다는 제약조건에 위배되어 반복계산을 종료하게 된다. DD3인 경우에는 지지점의 배치가 설계영역이 판 전체인 경우와 유사한 배치를 보이나  $x=0$ 에 지지점이 많이 위치하는 것을 볼 수 있다. DD4인 경우에도 DD3인 경우와 유사한 배치를 보이나 설계영역이 좁기 때문에 지지점의 배치가 양의  $x$  방향으로  $A/4$  이동된 것으로 생각할 수 있다. 그러나 제약조건을 만족하면서 지지점을 생성하는 반복과정은 감소한다. 설계영역이 양쪽으로 분리된 DD5의 경우에는 모든 지지점들이 쌍으로 생성되며 모든 지지점들이 설계영역의 경계에 배치되는 것을 볼 수 있다.

이상의 설계영역에 따른 영향을 살펴보면 2개의 지지점을 설치할 경우에는 DD2가 가장 비효율적이며 나머지의 경우는 유사하다. 그러나 3개의 지지점이라면 DD3, DD4, DD5가 가장 효과적인 것으로 평가된다. 5개의 지지점을 설치할 경우라면 DD5의 경우가 가장 효과적이다.

### 3.3 질량 위치의 영향

외팔판은 다른 장치들이 설치되는 기초이 역할을 수행하는 경우가 많이 있다. 일반적으로 회로기판의 경우를 예로 들으면 기판위에 여러 가지 장치들이 설치되게 되고 이들 중에서는 판의 동적거동에 영향을 줄 수 있을 만큼의 질량을 갖는 장치들도 있다. 따라서 본 연구에서는 외팔판에 설치될 장치들을 질량으로 고려하여 장치들의 배치에 따라 기본 진동수를 최대화하기 위한 지지점의 배치를 연구하였다. Table 2는 고려된 모델을 보여진고 있으며 질량의 배치에 따라 분류하였다. 이용한 모델은 정사각 외팔판이며 질량은 정사각영역인  $0.2m \times 0.2m$ 에 25kg의 질량을 적용하였다. 질량이 포함된 모델인 ML3인 경우만 대칭모델이고 나머지 모



(e) DD5

Fig. 6 Optimal location of point supports for square cantilever plates with various design domain

델은 비대칭 모델이다. 기본 진동수를 비교하여 보면  $ML2 > ML3 > ML1 > ML4$ 이다.

각 경우에 대한 지지점의 배치를 Fig. 7에 보였다. 지지점들은 질량이 없는 외팔판에 대한 경우에서 질량이 있는 쪽으로 이동된 경향을 보이나 ML2인 경우는 지지점의 증가로 기본 진동수를 향상시키는 효율이 작기 때문에 이상에서 설명된 제약조건에 위배되어 반복과정을 종료하게 된다. ML3의 결과는 질량을 포함하지 않은 모델의 결과와 같다. ML4는 ML1의 결과와 매우 유사한 지지점의 배치를 갖으나 8 번째 지지점이 서로 다른 지점에 생성된 것을 확인할 수 있다. 기본 진동수는 지지점의 증가에 따라 ML3의 경우가 가장 영향이 크며 나머지 경우는 유사하다.

### 4. 결론

본 연구는 외팔판의 기본 진동수를 높이기 위한 방안 중 지지점 위치 조건을 활용한 영역에 그리고 가장 효과적으로 적용하기 위하여 지지점을 결정하는 방법을 제시한다. 이 결과들은 설계자에게 매우 유용한 자료로 사용될 수 있으리라 생각한다. 여러 가지 경우에 대한 결과들을 정리하면 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다.

(1) 지지점을 첨가함에 따라 기본 진동수는 증가하고 다른 모드에 대한 진동수 역시 함께 증가한다.

(2) 고려된 모든 외팔판에 하나의 지지점을 생성할 경우에는 고정경계조건을 갖는 면의 반대면인 자유면에 설치하는 것이 가장 효과적이다.

(3) 지지점의 생성에 대한 기본 진동수의 증가는 종횡비가 작을수록 그 영향이 크다.

(4) 설계영역은 고정면의 반대편인 자유면을 포함하여야 지지점의 생성이 기본 진동수의 향상에 큰 영향을 미친다.

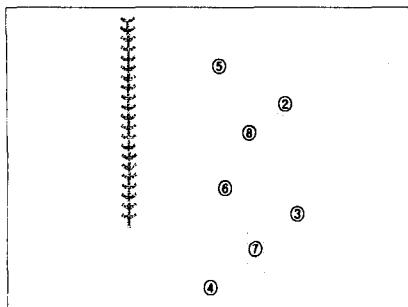
(5) 질량을 포함한 외팔판의 기본 진동수는 질량이 고정면에서 멀수록 지지점의 영향이 크게 나타난다.

Table 2 Considered types for mass location

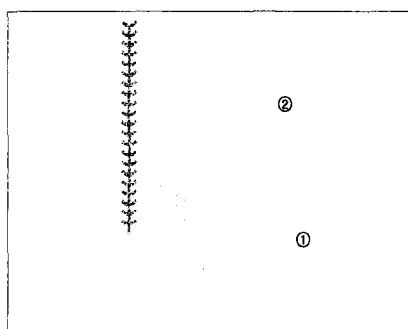
Sign	Mass location	Sign	Mass location
ML1		ML2	
ML3		ML4	

■ : Fixed B.C.      ■ : Mass

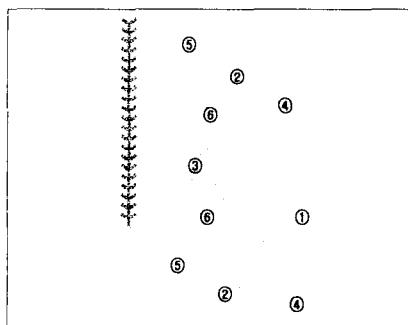
## 참 고 문 헌



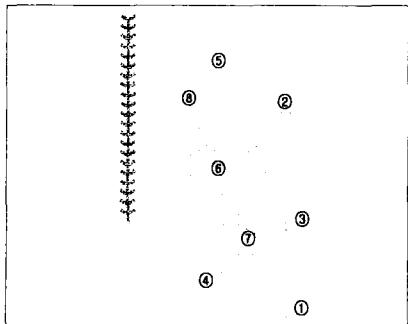
(a) ML1



(b) ML2



(c) ML3



(d) ML4

Fig. 7 Optimal location of point supports for square cantilever plates with various mass location

(1) Saliba, H. T., 1984, "Free Vibartion Analysis of Rectangular Cantilever Plates with Symmetrically Distributed Point Supports Along the Edges," Journal of Sound and Vibration, Vol.94, No.3, pp.381~395.

(2) Narita, Y., 1985, "The Effect of Point Constraints on Transverse Vibration o Cantilever Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol.102, No.3, pp.305~313.

(3) Singhal, R. K., and Gorman, D. J., 1997, "Free Vibration of Partially Clamped Rectangular Plates with and without Rigid Point Supports," Journal of Sound and Vibration, Vol.203, No.2, pp.181~192.

(4) Lim, G. H., Ong, J. H., and Penny, J. E. T., 1997, "Vibration Analysis of a Printed Circuit Board Structure," Proceeding of Asia-Pacific Vibration Conference.

(5) 이영신, 류충현, 김현수, 김규원, 1998, "원형 개구부를 갖는 점지지된 복합재료 사각판의 자유진동해석," 한국소음진동공학회 1998년 추계학술대회논문집, pp.756~764.

(6) Zhao, C., Steven, G. P., and Xie, Y. M., 1996, "Evolutionary Natural Frequency Optimization of Thin Plate Bending Vibration Problems," Stuructural Optimization, Vol.11, pp.244~251.

(7) Zhao, C., Steven, G. P., and Xie, Y. M., 1996, "General Evolutionary Path for Fundamental Natural Frequencies of Structural Vibration Problems: towards Optimum from Below," Structural Engineering and Mechanics, Vol.4, No.5, pp.513~527.