

# 유한요소법을 이용한 유체속도가 고려된 덕트의 음향특성 해석

## Acoustic Analysis of a Duct with Mean Flow by Use of FEM

서영수\* · 정의봉\*\* · 윤상돈\*

Young Soo Seo , Weui Bong Jeong , Sang Don Yoon

### ABSTRACT

This paper shows the effect of mean flow in duct. The potential equation of duct with mean flow is obtained. A finite element method(FEM) is used to predict acoustic performance of duct with mean flow. The formulation of the finite element method is derived for duct taking into consideration of the convective effect of mean flow. A simple duct , simple expansion chamber and a duct with resonator are implemented to show the effects of the mean flow.

### 1. 서론

지금까지 관을 통해 배출되는 과도한 소음을 줄이기 위하여 소음기가 만들어졌으며, 소음기에 대한 많은 연구가 이루어졌다. 간단한 형상의 소음기는 수식을 이용하여 해석이 가능하나, 복잡한 형상의 소음기는 수식을 이용한 해석이 매우 어렵다. 따라서, 이와 같은 복잡한 형상의 소음기 해석을 위해서 일반적으로 유한요소법(FEM)과 경계요소법(BEM)을 사용하고 있다. 유한요소법과 경계요소법에 사용되는 경계조건을 보면, 소음기의 입의의 면에 입자속도, 음압 또는 임피던스를 주고 소음기 해석을 하게 된다. 즉, 소음기내의 유체유동은 고려되지 않고 해석하고 있다. 그러나, 실제관 또는 소음기내에는 입의의 유체의 유동이 존재하며, 이는 해석결과에 많은 영향을 미치게 될 것이다.

본 논문에서는 실제 존재하는 관내의 유체 속도(mean flow)를 고려하여 관의 음향특성을 해석하였으며, 고려된 유체 속도가 미치는 영향에 대하여 보여주고 있다. 해석방법으로는 유한요소법을 사용하였다. 또한 유한요소법에 사용된 모델은 사각 덕트, 원형 단순확장관, 헬름홀츠 공명기이다. 사각 덕트에서는 유체속도에 의한 공진주파수의 변화를 볼 수 있었으며, 원형 단순확장관, 헬름홀츠 공명기에서는 투과손실(TL)의 변화를 볼 수 있었다.

### 2. 이론

#### 2.1 음향 파동 방정식

음향 파동 방정식은 연속 방정식과 운동방정식에 의하여 유도되어진다. 여기서, 이상유체이며 등엔트로피 과정이라고 가정하면, 연속방정식은

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho c^2 \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

가 된다. 또한, 입자속도  $\vec{u}$ 와 음압  $p$ 의 관계식은

\* 부산대학교 대학원 기계설계공학과

\*\* 정희원, 부산대학교 기계공학부

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p = 0 \quad (2)$$

으로 나타내어지므로 식(1)과 식(2)로부터 다음과 같이 유체 속도를 고려한 음향파동방정식을 유도할 수 있다.

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla p \right) + \nabla \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} \frac{\partial p}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{\rho_0 c^2} \vec{u} \cdot \nabla p \right) = 0 \quad (3)$$

여기서,

$p$  : 음압

$\rho_0$  : 정적 밀도(static density of medium)

$c$  : 음속

$u$  : 입자 속도

이다.

## 2.2 평균유속이 고려된 관내 포텐셜 방정식

입자속도와 속도 포텐셜  $\phi$ 의 관계는

$$\vec{u} = -\nabla \phi \quad (4)$$

와 같으므로 식(2)에서 음압과 속도 포텐셜의 관계식은 다음과 같다.

$$p = j\rho_0 \omega \phi + \rho_0 u_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

여기서,

$\phi$  : 속도 포텐셜

$u_z$  :  $z$  방향의 평균 유속

$\omega$  : 주파수

이다. 그러므로 식(3)과 식(5)에서 평균유속이 고려된 관내 포텐셜 방정식은 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - M^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 2kMj \frac{\partial \phi}{\partial z} + k^2 \phi = 0$$

여기서,

$M = \frac{u_z}{c}$ : 평균유속 마하수(mach number)

$k = \frac{\omega}{c}$ : 파수 (wave number)

이다.

## 2.3 유한요소 모델링

식(6)에 가중함수  $\phi^*$ 를 이용하면 가중잔차 방정식은 다음과 같다.

$$\int_V \phi^* \left\{ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - M^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - 2kMj \frac{\partial \phi}{\partial z} + k^2 \phi \right\} dx dy dz = 0 \quad (7)$$

여기서,

$\phi^*$  : 가중함수

$\phi$  : 속도 포텐셜

$V$  : 유한요소의 체적

이다. 그리고 식(7)의 2계 미분항들은 다음과 같이 1계 미분항으로 바꾸어 쓸 수 있다.

$$\int \phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx = - \int \left\{ \frac{\partial \phi^*}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} dx$$

$$\int \phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dy = - \int \left\{ \frac{\partial \phi^*}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} dy$$

$$\int (1 - M^2) \phi^* \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} dz = -(1 - M^2) \int \left\{ \frac{\partial \phi^*}{\partial z} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right\} dz$$

(4)

보간함수와 가중함수가 같은 형태를 취하는 Galerkin법을 사용한다.

$$\phi^* = \{N_i\} \phi_i^* \quad , \quad \phi = \{N_i\} \phi_i \quad (8)$$

여기서, 형상함수는

$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \epsilon \epsilon_i)(1 + \zeta \zeta_i)(1 + \eta \eta_i)$$

$$\left( \begin{array}{l} \epsilon_i = \pm 1, \zeta_i = \pm 1, \eta_i = \pm 1 \\ -1 \leq \epsilon, \zeta, \eta \leq 1, i = 1, \dots, 8 \end{array} \right)$$

와 같다. 식(8)을 식(7)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 지배방정식을 얻는다.

$$([M] + j2kM[C] - k^2[K])\{\phi\} = \{0\} \quad (9)$$

(6) 단,

$$[M] = \iiint \left[ \frac{\partial(N)}{\partial x} \frac{\partial(N)}{\partial y} (1 - M^2) \frac{\partial(N)}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial(N)^T}{\partial x} \\ \frac{\partial(N)^T}{\partial y} \\ \frac{\partial(N)^T}{\partial z} \end{bmatrix} dx dy dz$$

$$[K] = \iiint \{N\}\{N\}^T dx dy dz$$

$$[C] = \iiint \left[ 0 \ 0 \ \{N\} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial(N)^T}{\partial z} \end{bmatrix} dx dy dz$$

경계조건을 고려하여 식(9)로 주어지는 전체계에 대한 연립 방정식을 풀면 절점에서의 속도 포텐셜을 구할수 있다.

### 2.4 4 단자 정수와 투과 손실

본 논문에서는 4단자 정수를 이용하여 투과손실을 구한다. Fig.1과 같은 단순 확장관에서 위치 1, 4 간의 4단자 매개변수를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad (10)$$

단,

$$\begin{aligned} T_{11} &= \left. \frac{p_1}{p_4} \right|_{v_4=0} & T_{12} &= \left. \frac{p_1}{v_4} \right|_{p_4=0} \\ T_{21} &= \left. \frac{v_1}{p_4} \right|_{v_4=0} & T_{22} &= \left. \frac{v_1}{v_4} \right|_{p_4=0} \end{aligned}$$

여기서,  $S_1$ 는 단면적이고  $L$ 은 확장관의 길이이다. 그리고, 4단자 정수로 표현되는 투과손실은 다음과 같이 표현된다.

$$TL = 20 \log_{10} \left[ \frac{1}{2} \left| T_{11} + \frac{T_{12}}{Z_3} + T_{21}Z_1 + T_{22} \left( \frac{S_3}{S_1} \right) \right| \sqrt{\left( \frac{S_3}{S_1} \right)} \right] \quad (dB) \quad (11)$$

단,

$$Z_1 = \frac{\rho_0 c}{S_1}, \quad Z_3 = \frac{\rho_0 c}{S_3}$$

### 3. 해석 결과 및 분석

본 논문에서의 해석 대상은 사각 덕트, 원형단순 확장관, 헬름홀츠 공명기이다. 먼저, 사각 덕트에서는 임의의 절점에서의 압력이 평균 유속이 고려되면서 어떤 변화가 발생되는가에 대하여 보여주

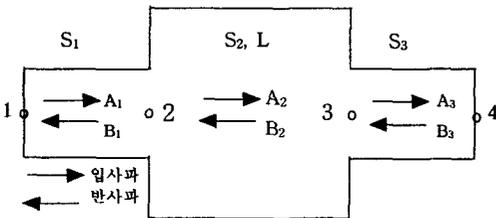


Fig.1 Simple Expansion Chamber

고 있다. 그리고, 원형단순 확장관과 헬름홀츠 공명기에서는 평균 유속이 투과 손실에 미치는 영향을 보여주고 있다.

### 3.1 덕트 모델

본 논문에서 해석한 덕트 모델은 아래 Fig.2에 나타나 있다. 경계조건은 다음과 같다.

$$\text{inlet}(z=0) : \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 1$$

$$\text{outlet}(z=L) : p = 0$$

Fig.3은 평균 유속을 고려하지 않았을 때의 압력과 평균 유속을 고려하였을 때의 해석결과이고, Table 1은 평균유속에 따른 덕트의 공진주파수변화를 보여준다. Table 1에서 보여지는 것과 같이, 평균 유속이 고려되어지면 공진주파수는

$$f_r(M) = \sqrt{1 - M^2} f_r(M=0)$$

의 관계를 만족함을 알 수 있다. 또한 Fig.3에서 보여지는 것과 같이, 평균 유속이 고려되어지면 피크가 전체적으로 낮아지는 것을 볼 수 있다.

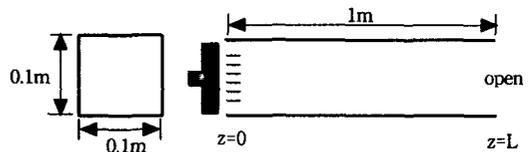
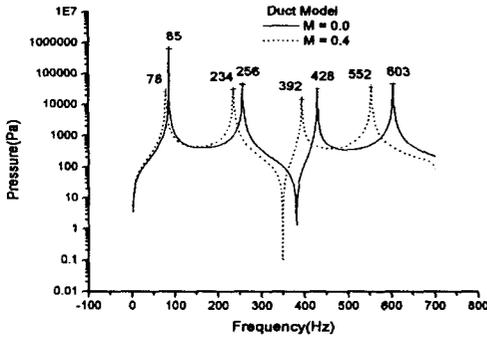


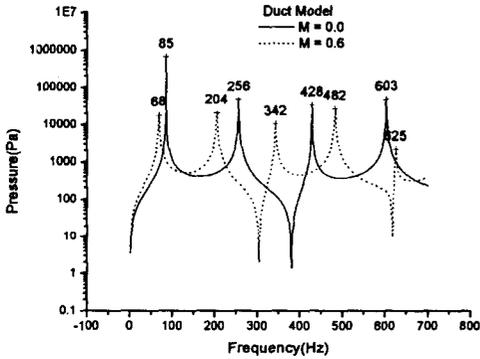
Fig.2 Duct Model

Table 1. Resonance frequencies of duct with varying Mach number

Order	Resonance Frequencies [Hz]				
	M=0.0	M=0.2	M=0.4	M=0.6	M=0.8
1st	85	83	78	68	51
2nd	256	250	234	204	153
3rd	428	419	392	342	257
4th	603	590	552	482	361



(a)  $M = 0.4$



(b)  $M = 0.6$

Fig. 3 Pressure Spectrum of Duct Model

### 3.2 원형 단순확장관 모델

Fig.4는 본 논문에서 해석한 원형 단순확장관 모델을 나타내고 있다. 여기서,  $L = 0.225(m)$ ,  $r_1 = 0.025(m)$ ,  $r_2 = 0.1(m)$ 이다. Fig.5는 평균유속을 고려하지 않고( $M=0.0$ ) 구한 투과손실곡선, 소음해석 상용패키지인 sysnoise를 이용한 투과손실 곡선, 그리고 평면파로 가정한 이론해를 같이 보여주고 있다. program의 결과와 sysnoise의 결과가 아주 잘 일치함을 볼 수 있다. 또한, 이론상 평면파로 가정할수 있는 한계주파수(cutoff frequency)는

$$f_c = \frac{1.84c}{\pi D} = \frac{1.84 \times 340}{\pi \times 0.2} \approx 996 \text{ (Hz)}$$

임을 알수있다. Fig. 5를 보면, 유한요소법을 이용

한 해석결과에서 약 1000 Hz부근에서 평면파로 가정한 이론해와 차이가 발생함을 볼 수 있다. Fig. 6은 평균 유속을 고려하였을 때의 투과손실곡선과 평균 유속을 고려하지 않은 투과손실곡선을 비교하고 있다. Fig. 6의 결과를 보면, Duct에서와 마찬가지로 공진주파수가 낮아지는 것을 볼 수 있으며, 저주파에서 투과손실성능도 떨어지는 것을 볼 수 있다. Table 2는 유체 속도의 변화에 따른 최대 투과손실 발생주파수를 보여준다.

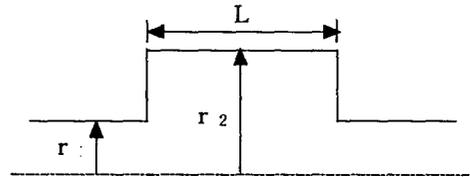


Fig.4 Circular Simple Expansion Chamber

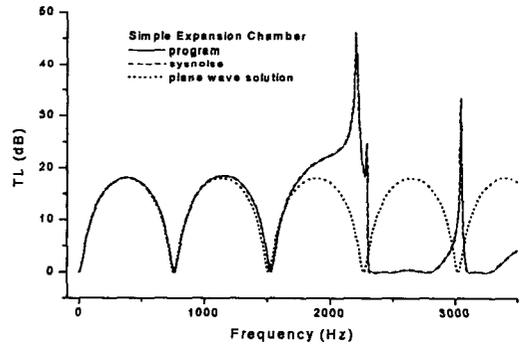
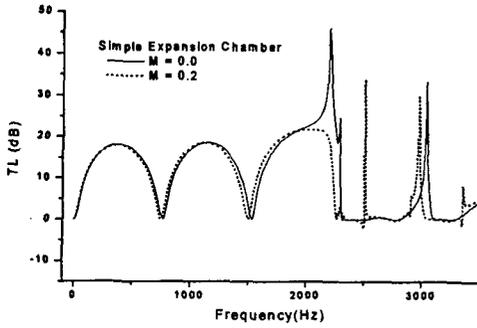


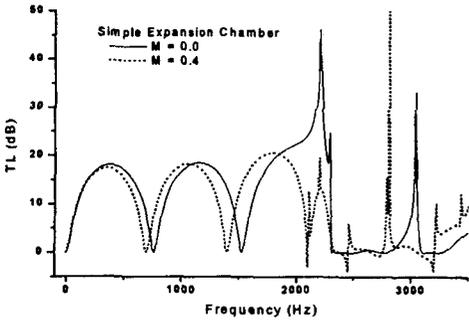
Fig. 5 TL Curve of Simple Expansion Chamber

Table 2. Frequencies of maximum TL in simple expansion chamber with varying Mach number

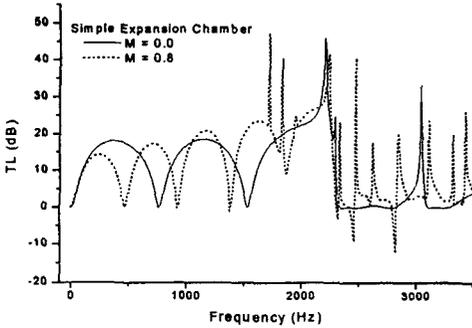
Order	Frequencies at $TL_{max}$ [Hz]				
	M=0.0	M=0.2	M=0.4	M=0.6	M=0.8
1st	381	371	351	311	251
2nd	1151	1131	1061	931	711



(a)  $M = 0.2$



(b)  $M = 0.4$



(c)  $M = 0.8$

Fig. 6 TL Curve of Simple Expansion Chamber

### 3.3 공명기 모델

공명기는 진동에서의 동흡진기와 같은 역할을 하는 소음기이다. 즉, 작은 범위의 주파수를 차단시켜주는 노치필터의 역할을 한다. Fig. 7은 본 논문에서 해석한 공명기 모델이다. 치수는 다음과 같다.

$$l_x = l_y = l_z = 0.09 \text{ m}$$

$$l_{xn} = 0.02 \text{ m}, l_{yn} = 0.015 \text{ m}, l_{zn} = 0.02 \text{ m}$$

Fig 8은 평균 유속이 고려되지 않았을 때와 고려되었을 때의 공명기 투과손실(TL) 곡선을 보여주고 있다. Table 3은 유체 속도의 변화에 따른 헬름홀츠 공명기의 공명주파수의 변화를 보여주고 있다. 평균 유속이 고려되어지면, 공명기의 차단 주파수가 떨어지며, 또한 공명기의 성능도 떨어지는 것을 알 수 있다.

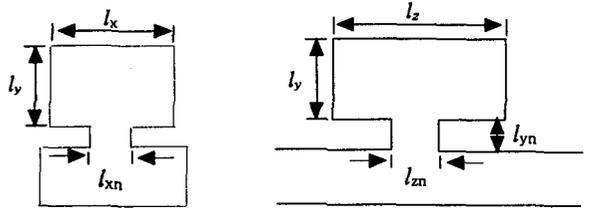
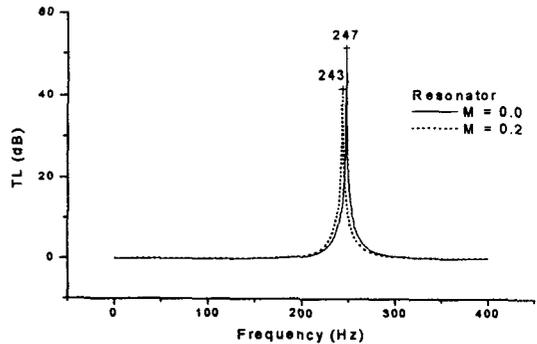


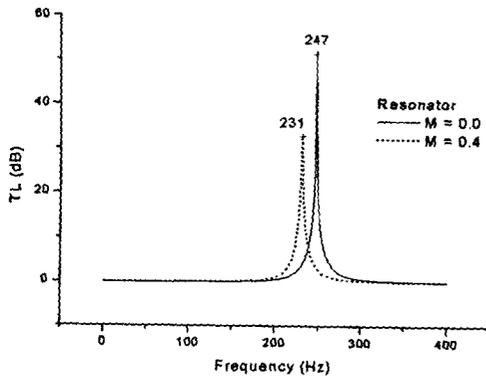
Fig. 7 Resonator Model

Table 3. Resonance frequencies of Helmholtz resonator with varying Mach number

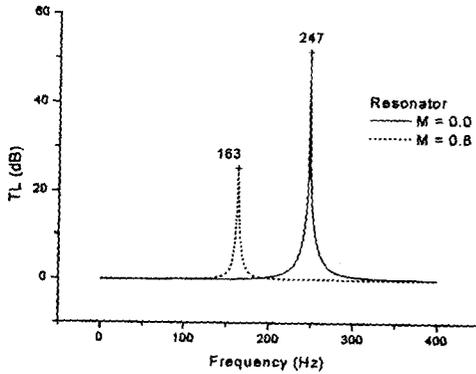
Resonance Frequencies [Hz]				
M=0.0	M=0.2	M=0.4	M=0.6	M=0.8
247	243	231	207	163



(a)  $M = 0.2$



(b)  $M = 0.4$



(c)  $M = 0.8$

Fig. 8 TL Curve of Resonator

#### 참고 문헌

- (1) L.E.Kinsler, Fundamentals of Acoustics, 3rd ed., John Wiley & Sons, 1982
- (2) Maurice Petyt, Introduction to finite element vibration analysis, 1st ed., Cambridge University Press, 1990
- (3) P.M.Morse, Theoretical Acoustics, McGraw-Hill, 1968
- (4) M.L.Munjaj, Acoustics of Ducts and Muffler, John Wiley & Sons, 1987
- (5) Mutsuto Kawahara, 有限要素法 流體解析, 遠彰出版社, 1995
- (6) 加川幸雄, 有限要素法による振動, 音響工學/基礎と應用, 5th ed., 培風館, 1990

#### 4. 결론

- 1) 유한요소법을 이용하여 평균유속이 고려된 덕트의 음향해석 프로그램을 개발하였다.
- 2) 평균유속이 고려되어지면 덕트의 공진 주파수가 낮아졌다.
- 3) 평균유속이 고려되어지면 단순확장관의 투과손실 성능의 저하를 가졌으며, 최대 투과손실이 발생하는 주파수도 낮아졌다.
- 4) 평균유속이 고려되어지면 공명기의 투과손실 성능이 저하되었으며 공명 주파수도 낮아졌다.
- 5) 소음기의 최적설계를 위해서는 관내의 유속을 고려한 설계의 보정이 필요하게 될 것이다.