

루프 서브디비전 곡면의 1차 전단 변형 쉘 요소

First-Order Shear Deformable Subdivision Shell Element Consistent with Loop-Subdivision Surface

김형길* 조맹호**
Kim, Hyungkil Cho, Maenghyo

ABSTRACT

In the present study, a first order shear deformable Loop-subdivision triangular element which can handle transverse shear deformation of moderately thick shell and composite laminated or sandwich shells are developed. The developed element is more general than the previous one based on classical shell theory, since it includes the effect of transverse shell deformation and has standard five degrees of freedom per node. The quartic box spline function is employed as the interpolation basis function. Numerical examples for the benchmark static shell problems are analyzed to assess the performance of the developed subdivision shell element and locking trouble.

1. 서 론

쉘 유한요소는 지난 30여년간 활발히 개발되어 왔고 아직도 많은 연구가 이루어지고 있는 분야이다. 쉘은 곡률을 가지는 얇은 구조물로서 형상이 복잡하여 해석적인 방법으로는 쉘 문제를 접근하기가 까다롭다. 유한요소법은 다양한 기하학적 형상, 경계조건, 하중조건에 대해서 강력하게 적용할 수 있는 도구이므로 쉘 문제의 수치해석에 적합하다. 쉘 요소의 기울기의 연속조건을 만족시켜야 하는 번거로움 때문에 고전 쉘 이론에 근거한 유한요소는 널리 쓰이지 않고 있고, 변위의 연속 조건만 만족시키면 되는 Mindlin/Reissner 타입의 쉘 요소는 잠김(locking)현상이라는 수치 문제로 그 적용이 제한적이다. 최근 20여년간의 쉘 요소 개발에 대한 연구는 locking을 방지하고 안정적인 선형/비선형 쉘요소를 개발하는데 초점이 맞추어져 왔다.

또한 Ahmad⁽¹⁾등이 degenerated shell 요소를 제안한 이래 곡률을 따르는 일반 곡선 좌표계를 사용하지 않고 직교 좌표계를 사용하여 쉘을 해석하는 것이 가능해졌으므로 그 편이성 때문에 degenerated shell 요소의 개발이 그 주종을 이루고 있다. 그러나 degenerated shell 요소는 요소 내에서의 기하학적인 쉘의 형상을 근사를 통해 보간 하므로 비록 많은 수의 요소를 사용하게 되면 그 해석에서 오차가 줄어들게 되나 실제 복잡한 형상의 쉘을 효율적으로 해석하는 데는 그 한계가 있다. 그러므로 정확한 기하학적인 형상을 고려한 쉘

* 서울대학교 기계항공공학부 석사과정

** 정회원 · 서울대학교 기계항공공학부 부교수

이론에 근거한 유한요소의 개발이 Simo등에 의해 수행되었다.[2][3]

Cirak 등은 Loop의 subdivision 기법을 이용하여 곡면을 생성하고 곡면해석의 방법으로 고전 쉘이론을 사용하여 곡면해석을 수행한바 있다.[4][5] 그러나 이 방법론은 고전 쉘이론에 기초한 이론으로 공학적 설계에서 두께를 고려해야하는 비교적 두꺼운 쉘 구조물이나 샌드위치 복합재료 적층 쉘과 같이 횡전단 변형이 심한 쉘 구조물에는 적용할 수 없고 아주 얇은 등방성 탄성 물체의 곡면에만 적용이 가능하므로 그 적용 범위에 한계가 있다. 그러므로 본 연구에서는 이러한 한계를 극복하기 위해 횡전단 변형효과를 고려한 일차 전단 변형 쉘이론에 기초한 subdivision 유한요소를 개발하여 일반적인 곡면 구조물의 변형을 해석하는 도구를 확립한다.

먼저 곡면구현에 있어 Loop의 subdivision scheme을 사용하였다. Subdivision을 몇 단계 거치게 되면, 처음의 몇 개의 점들이 어떠한 위치로 수렴하게 된다. 이렇게 수렴되어서 구하게 되는 곡면이 극한곡면이다. 우리는 3-D스캐너나 B-spline으로 몇 점의 데이터를 얻게 된다. 그리고 이러한 데이터 값들은 우리가 원하는 극한곡면 위의 데이터 값이 된다. 따라서 우리는 몇 번의 subdivision 후 극한곡면을 얻어야 하기 때문에 극한 데이터 값들을 가지고 그에 상응하는 초기 데이터 값을 구해 보았다. 따라서 그 초기값을 가지고 subdivision을 통하여 정확한 극한곡면을 구현해 보았다. Cylinder, Sphere, Twisted ribbon 등 여러 종류의 surface에서 여러 차례의 subdivision을 거치게 되면 좌표값과 곡률의 상대오차가 10^{-4} 이하의 정확한 극한곡면을 구현할 수 있었다. subdivision을 이용하여 실제곡면을 완성하고 이 곡면의 기하학적 형상을 이용하여 곡면의 강성행렬(stiffness matrix)을 만들 수 있다. 이렇게 만들어진 강성행렬에 경계조건을 부여하고 하중을 가하여 연산하면 이 곡면의 변위를 구할 수가 있으며 이를 바탕으로 응력해석을 할 수 있다. 본 연구에서는 여러가지 benchmark problem의 해석결과를 제시하여 개발된 subdivision요소의 성능을 검증하고 평가한다.

2. 일반적인 쉘 이론과 유한요소화

곡면 쉘의 변형을 해석하는 것은 구조물의 강성, 강도, 안정성 등을 평가하는데 결정적이므로 해석부분에서는 유한요소법을 사용하여 쉘의 변형을 해석한다. 1차 전단변형 이론에 입각한 기하학적으로 정확한 쉘 이론에 기초하여 4차 box-스프라인 함수를 기저함수로 하는 쉘 유한요소를 정식화하고 프로그램을 구현한다. 그림 1.과 2.은 B-스프라인 패치와 Loop scheme의 삼각형 패치를 나타낸다.

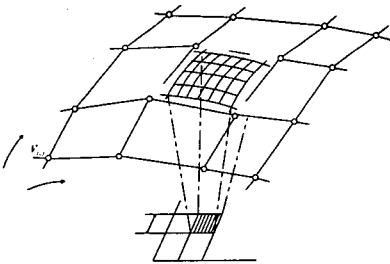


그림1 . B-spline patch

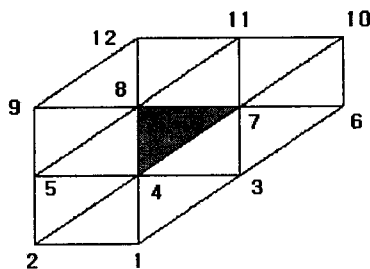


그림2. Loop scheme patch

루프 곡면의 표현식은 다음과 같다.

$$\bar{X}(\theta^1, \theta^2) = \sum_{I=1}^{12} N^I(\theta^1, \theta^2) \bar{X}_I \quad (1)$$

변형은 미소 변위를 가지는 선형 이론으로 가정한다.

정식화를 위한 변형 전(\bar{R})과 변형 후(\bar{R}') 위치 벡터는 아래와 같다. (그림 3.)

$$\bar{R} = (\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{r}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}_3(\theta^1, \theta^2) \quad -\frac{h}{2} \leq \theta^3 \leq \frac{h}{2} \quad (2)$$

$$\bar{R}' = (\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \bar{r}'(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}'_3(\theta^1, \theta^2) \quad -\frac{h}{2} \leq \theta^3 \leq \frac{h}{2} \quad (3)$$

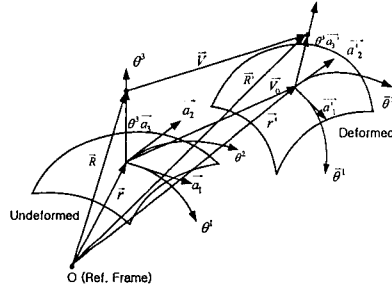


그림 3. Shell 이론의 변위장

곡면의 면내 접선 벡터와 수직 벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\bar{a}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \theta^\alpha} = \bar{r}_{,\alpha} \quad \bar{a}_3 = \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2}{|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|} \quad (4)$$

셸의 내부 점에서의 위치 벡터는 변형전에 \bar{g}_α 로 변형후에는 \bar{g}'_α 으로 주어진다.

$$\bar{g}_\alpha = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta^\alpha} = \bar{r}_{,\alpha}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}_{3,\alpha}(\theta^1, \theta^2) \quad \bar{g}_3 = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \theta^3} = \bar{a}_3 \quad (5)$$

$$\bar{g}'_\alpha = \frac{\partial \bar{R}'}{\partial \theta^\alpha} = \bar{r}'_{,\alpha}(\theta^1, \theta^2) + \theta^3 \bar{a}'_{3,\alpha}(\theta^1, \theta^2) \quad \bar{g}'_3 = \frac{\partial \bar{R}'}{\partial \theta^3} = \bar{a}'_3 \quad (6)$$

변위장은 1차 전단변형 이론에서 3개의 병진 변위와 2개의 회전 변위로 기술된다.

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u\bar{a}^1 + v\bar{a}^2 + w\bar{a}^3 \\ \bar{\phi} &= \phi_1\bar{a}^1 + \phi_2\bar{a}^2 \end{aligned} \quad (7)$$

변형 에너지는 인장($\epsilon_{\alpha\beta}$), 굽힘($\omega_{\alpha\beta}$), 전단변형에너지(γ_α) 세 가지 형태로 기술되며 아래와 같이 주

어진다.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\vec{a}_\alpha \cdot \vec{u}_{,\beta} + \vec{a}_\beta \cdot \vec{u}_{,\alpha}) \quad (8)$$

$$\omega_{\alpha\beta} = -\vec{\phi}_{,\beta} \cdot \vec{a}_\alpha - \vec{u}_{,\alpha} \cdot \vec{a}_{3,\beta} \quad (9)$$

$$\gamma_\alpha = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{\phi} + \vec{u}_{,\alpha} \cdot \vec{a}_3 \quad (10)$$

위 식을 바탕으로 각각의 요소에 대해 요소강성행렬을 구할 수 있다. 각 요소의 강성행렬을 구할 때 셀의 잠김 현상을 감안하여 인장강성행렬 가우스 적분의 경우는 1점 적분을, 굽힘강성행렬 가우스 적분의 경우는 3점 적분을, 전단변형강성행렬 가우스적분의 경우는 1점 적분을 사용하였다. 이렇게 구한 각 요소의 강성행렬을 하나의 전체 강성행렬로 만들어 주어야 한다. 이 각 요소강성행렬을 어셈블하여 전체 강성행렬을 완성할 수 있다. 구해진 전체 강성행렬에 경계조건을 부여하여 해석을 수행한다.

3. 해석 결과

현재까지 보고된 다양한 benchmark 문제들에 대해 본 서브디비전 셀요소의 성능평가가 필요하며 대표적인 아래의 문제들에 대해 성능을 시험한다.

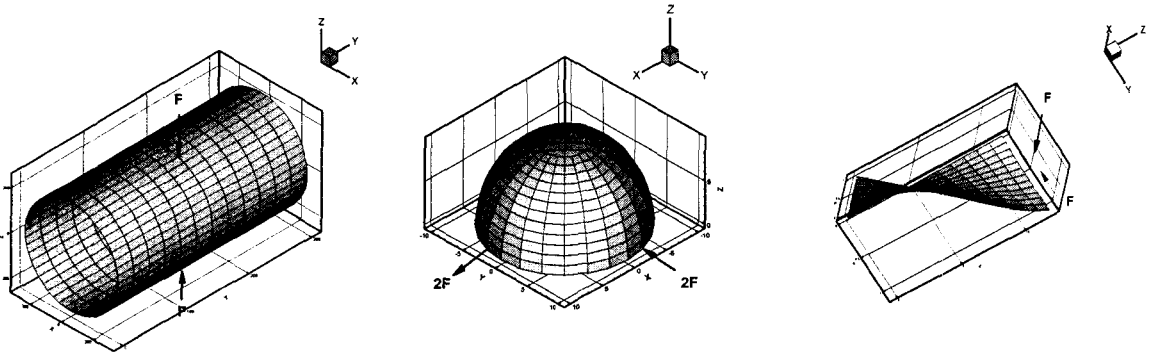


그림 4 Pinched Cylinder , Hemisphere and Twisted Ribbon

Pinched Cylinder 조건 :

F=1.0 applied at the mid-section of the cylinder
 Length = 600 , Radius = 300 , thickness = 3.0
 E=3.0*10⁶ , nu = 0.3 (rigid diaphragm condition)

Pincheu Hemisphere with 18 deg cutout on the north pole 조건 :

F=2.0 , applied with alternating the sign of load at the edge of hemisphere.
 Radius = 10 , thickness = 0.04 , E=6.825*10⁷ , nu = 0.3

Pinched Twisted ribbon 조건 :

$F=1.0$ Length=12 width=1.1 thickness=0.32

$\nu=0.22$ $E=29.0 \times 10^6$

3.1. 정확한 형상을 갖는 쉘의 해석 결과

원통형 쉘에 집중하중이 가해지는 문제

그림5.는 원통형 쉘에 집중하중이 가해지는 문제로 서브디비전을 이용한 12절점을 가진 box-spline의 해석결과를 나타낸 것이다. 전체 실린더 모델을 사용하지 않고 1/8실린더 모델만을 사용하여 경계조건을 부여하여 해석하였다. 육각기둥에서 1/8실린더 부분만을 따로 계산하여 한번 서브디비전하게 될 때 초기 3×6 요소에서 시작하게 된다. 한번 서브디비전이 실행될 때마다 양 방향으로 요소가 각각 2배로 증가하므로 전체 메쉬의 수는 4배로 증가하게 된다. 요소의 수가 4배로 늘어남에 따라 엄밀해에 수렴하는 것을 볼 수 있다.

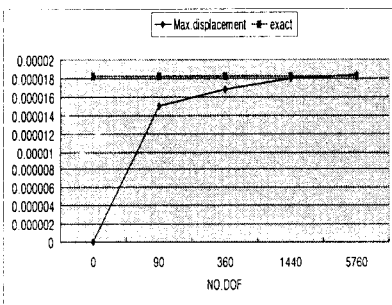


그림 5 요소 증가에 따른 해의 수렴성

구형 쉘에 집중하중이 가해지는 문제

그림6.는 1/4 hemisphere에 집중하중이 가해지는 문제로 서브디비전을 이용한 12절점을 가진 box-spline의 해석결과를 나타낸 것이다.

전체 hemisphere모델을 사용하지 않고 1/4 hemisphere모델만을 사용하여 경계조건을 부여하여 해석을 수행하였다. 초기 메쉬는 4×8 요소에서 시작하게 되며 한번 서브디비전이 실행될 때마다 양방향으로 요소가 각각 2배로 증가하므로 전체메쉬의 수는 4배로 증가하게 된다. 요소의 수가 4배씩 늘어남에 따라 엄밀해에 수렴하는 것을 볼 수 있다.

그림7.은 1/4 hemisphere의 두께비가 작아짐에 따라 잠김현상이 발생하는 것을 나타낸 것이다.

그림7.에서 133이라고 표시한 것은 인장강성행렬은 1점 적분을 하였고, 굽힘강성행렬은 3점 적분을 하였고, 전단변형강성행렬은 3점 적분을 하였음을 나타낸다. 즉 적분점의 수를 변화시켜 잠김

현상을 확인하였다. 여기서 두께비가 얇아짐에 따라 전단변형 잠김 현상이 나타남을 알 수 있다.

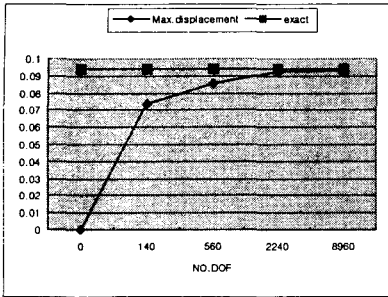


그림6. 요소 증가에 따른 해의 수렴성

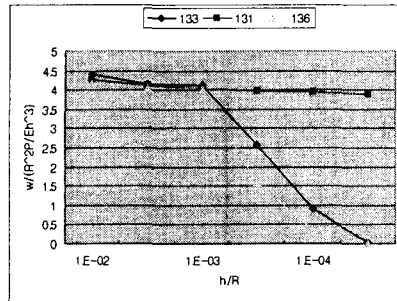


그림7. 두께비 변화에 따른 변위 수렴성

Twisted Ribbon의 끝단에 집중하중이 가해지는 문제

그림8은 Twist Ribbon의 해석결과를 나타낸 것이다.

이 경우에 인장 강성행렬 적분에는 1점 적분을, 굽힘 강성행렬 적분에는 3점 적분, 전단변형 적분에는 1점 적분을 사용하였고 매우 우수한 수렴성을 가짐을 확인할 수 있다.

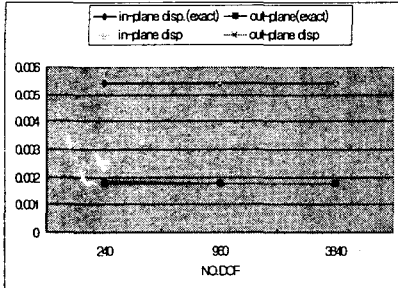


그림8. 요소 증가에 따른 해의 수렴성

4. 결 론

본 연구에서는 Loop 서브디비전 곡면을 이용한 셀의 유한요소를 개발하였고 해석을 수행하여 해석 결과를 제시하였다. 횡전단 변형효과를 고려한 일차 전단 변형 셀이론에 기초한 subdivision 유한요소가 일반적인 곡면 구조물의 변형을 기술하기 위한 표준 subdivision 곡면요소로 개발되었으며 여러 benchmark 문제에 대한 성능 평가를 수행하였고 만족할만한 수렴성과 효율성을 보여주었다.

본 연구의 방법론은 고전 셀이론에 기초한 유한요소에 비해 C^0 만 요구되므로 구현하기 편리하며 경계조건을 부가하는데 특히 이득이 있다. 본 연구에서 개발된 Loop 서브디비전 셀요소는 멀티 해상도를 가지는 곡면의 해석과 설계에 필요한 강력한 도구가 될 것으로 기대한다.

참고 문헌

1. Ahmad,S.,Iron,B., and Zienkiewicz,O.,"Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements," *Int. J. for Numerical Method in Engineering*, Vol.2, 1970, pp.419-451
2. Simo,J.C.and Fox,D.D.,"On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parameterization," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.72, 1989, pp.267-304
3. Simo,J.C.and Fox,D.D.,and Rifai,S.,"On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part II: The Linear Theory ; Computational Aspects," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.73, 1989, pp.53-92
4. Cirak,F.,Ortiz,M.,and Schroder,P.,"Subdivision surfaces : a new paradigm for thin-shell finite-element analysis," *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol 47, 2000, pp.2039-2072
5. Cirak,F.,Ortiz,M.,"Fully C^1 -conforming subdivision elements for finite deformation thin-shell analysis," *Int.J.Num.Meth.Eng.*, Vol 51, 2001, pp.813-833
6. Budiansky.B, Sanders,J.L. Jr. "On the best First-Order Linear Shell Theory", *Prog. Appl. Mech* Vol 20, 1963, pp.129-140
7. Farin,G. *Curves and surfaces for computer aided geometric design: a practical guide*. New York: Academic Press, 1993.
8. DeBoor,C."On calculating with B-Splines," *Journal of Approximation Theory*, Vol.6, No.1, 1972,pp.50-62