

개선된 유한요소를 이용한 평판구조물의 정적 및 동적해석

Static and Dynamic Analysis of Plate Structures using an Enhanced Finite Element

김 선 훈[†] 한 인 선* 유 승 운** 최 창 근***
Kim, Sun Hoon Han, In Seon Yoo, Seung Woon Choi, Chang Koon

Abstract

This paper is concerned with development of an enhanced quadratic Mindlin plate bending element. The behavior of the proposed plate element is further improved by the coupled use of non-conforming displacement modes, the selectively reduced integration scheme, and the assumed shear strain fields. The improvement may be attributable to the fact that the merits of these improvement techniques are merged in the formation of the new element in a complementary manner. The proposed quadratic finite element passes the patch tests, does not show spurious mechanism, and does not produce shear locking phenomena even with distorted meshes. It is shown that the element produces reliable solutions through numerical tests for standard benchmark problems. It is also noted that the element is applicable to transient dynamic analysis of Mindlin plates.

1. 서 론

지난 이십 여년동안 Mindlin 평판요소에서 발생하는 전단잠김현상(Shear locking)을 제거하기 위해 다양한 연구가 행해져 왔다[1-6]. 이와 같은 노력의 결과로 몇가지의 주목할만한 방법들이 제시되었는데 이는 감차적분 방법[1,2]과 비적합변위형의 추가[3,4], 그리고 대체전단변형률장의 사용[5,6]이다. 그럼에도 불구하고, 위에서 언급한 개선방법들을 단독으로 사용하였을 경우 Mindlin 평판요소의 거동개선에 있어서 각각의 단점이 발생하게 되었다[7]. Serendifity family요소 중 하나인 8절점 Mindlin 평판요소에 선택적감차적분(Selectively reduced integration)방법만을 적용하였을 경우에는 특정 두께-폭 비율에서 전단잠김현상을 유발하고 찌그러진 요소에서 나쁜 결과를 초래하였다. 또한 대체전단변형률장만을 적용한 8절점 평판요소의 경우, 일반적으로 좋은 거동을 나타내었으나 찌그러진 요소에 있어서는 역시 나쁜 결과를 나타냈다. 이러한 문제점들을 해결하기 위한 방법을 본 연구에서 제시하였다. 특히 새로운 2차 Mindlin 평판요소는 비적합변위형의 추가와 선택적감차적분방법, 그리고 대체전단변형률장을 복합적으로 적용하여 보다 향상된 거동을 나타내었다.

[†] 영동대학교 토목환경공학과부교수
* 한국과학기술원 건설환경공학과 박사과정
** 관동대학교 토목공학과 부교수
*** 한국과학기술원 건설환경공학과 석좌교수

2. 비적합 Mindlin 평판요소의 구성

비적합변위형이 추가된 Mindlin 평판요소의 요소 내 변위장은 다음과 같이 가정할 수 있다[8].

$$\begin{aligned}
 w &= \sum N_i w_i + \sum \bar{N}_j \bar{w}_j \\
 \theta_x &= \sum N_i \theta_{xi} + \sum \bar{N}_j \bar{\theta}_{xj} \\
 \theta_y &= \sum N_i \theta_{yi} + \sum \bar{N}_j \bar{\theta}_{yj}
 \end{aligned} \tag{1}$$

8 절점 serendipity 평판요소에 사용 가능한 기본적인 비적합 변위모드를 표현하면 다음과 같은 형상함수의 형태로 주어진다. (그림 1).

$$\begin{aligned}
 \bar{N}_1 &= \xi(1-\xi^2), & \bar{N}_2 &= \eta(1-\eta^2) \\
 \bar{N}_3 &= \xi\eta(1-\xi^2), & \bar{N}_4 &= \xi\eta(1-\eta^2) \\
 \bar{N}_5 &= (1-\xi^2)(1-\eta^2)
 \end{aligned} \tag{2}$$

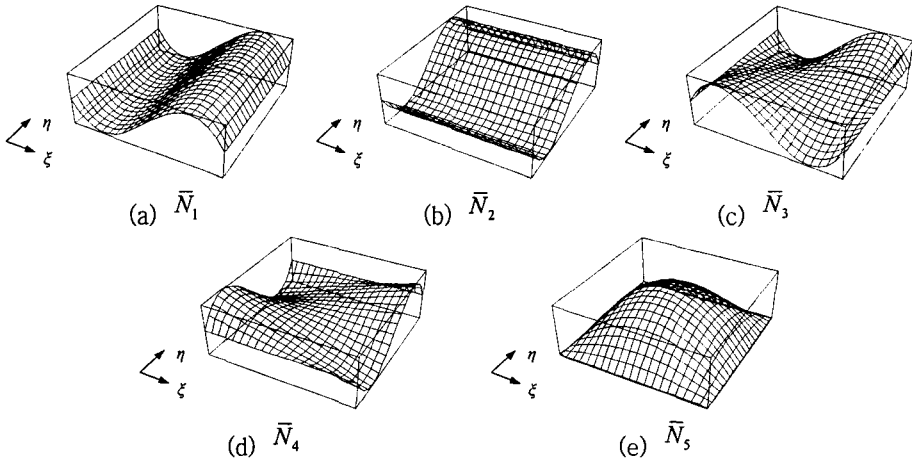


그림 1. 8절점 요소의 비적합 변위형

식(2)에서 주어진 모드는 각 절점에서 영값을 가지며 원래의 등매개 변수 요소내에서 제약된 부적합한 변위모드를 풀어주어 실제 변위를 복원하게 된다. 추가적인 미지수는 요소내의 최소변형률 에너지이론에 의해 결정될 수 있다. 추가적인 비적합변위형에 의해 최종적인 강성행렬은 등매개 변수 요소로부터 확장되어 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cn} \\ K_{cn}^T & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \bar{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ O \end{Bmatrix} \tag{3}$$

확장된 강성행렬은 정적응축(Static condensation)기법을 사용하면 다음과 같이 원래의 평판요소와

같은 차수를 가지는 강성행렬로 만들 수 있다.

$$K' = K_{cc} - K_{cn} K_{nn}^{-1} K_{cn}^T \quad (4)$$

3. 여러가지 개선 방법의 복합적인 이용

효과적이고 보다 개선된 Mindlin 평판 요소의 개발을 위해 NC-QH[8] 요소에 추가적으로 대체전단변형률장을 적용하였다. 따라서 본 연구에서는 선택적감차적분과 대체전단변형률장 그리고, 비적합변위형을 조합하여 사용하였다. 전단잠김 현상을 제거 하기 위한 한가지 방법은 전단변형률 식에서 회전에 해당하는 성분의 다항식차수를 줄이는 것이다. 이를 위해 전단변형률을 수직변위의 미분형태로 구하는 것이 아니라 변위와는 독립적으로 적절히 선택된 보간함수를 통해 변위의 경우와 같은 방법으로 전단변형률을 가정할 수 있다. 이때 전단변형률장은 감차적분점 또는 특정한 표본점에서 주어지고 증립축의 회전과 경사로 주어지는 원래의 전단변형률장은 대체된다. 대체전단변형률장을 도입한 Mindlin 평판요소는 회전자유도에 대하여 비적합변위형을 추가함으로써 보다 개선된 거동을 보여줄 수 있다. 회전자유도에 추가된 비적합변위형은 전단거동보다 휨거동에 대한 개선이 두드러지게 나타나는데 이는 전단거동에 대한 개선이 이미 대체전단변형률장에 의해 어느 정도 이루어졌기 때문이라고 볼 수 있다. 따라서, 최종적인 변위장은 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \omega \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} = \sum \tilde{N}_i \begin{pmatrix} \omega_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{pmatrix} + \sum \bar{N}_j \begin{pmatrix} \omega_j \\ \bar{\theta}_{xj} \\ \bar{\theta}_{yj} \end{pmatrix} \quad (5)$$

여기서 \tilde{N}_i 는 전단변형에서의 회전변위에 대한 수정이 반영된 것으로 휨변형률 성분에 대하여는 원래의 형상함수와 동일하다. 식(5)와 같이 새롭게 구성된 변위장은 조각시험을 통과하지 못한다. 이는 회전항이 휨변형률항과 전단변형률항내에 같이 존재하는 것에 기인하는데, 추가적인 비적합모드를 회전항에 추가함에 따라서 정의된 부행렬 K_{cn} 의 정식화에서 휨변형률과 전단변형률의 커플링이 발생하게 된다.

전단거동 및 휨거동의 커플링은 순수전단상태를 파괴할 수 있기 때문에 NC-QH와 같은 요소가 조각시험에 실패하는 결과를 초래하였다. 따라서 새롭게 제안된 Mindlin 평판요소를 조각시험에 통과시키기 위해 정식화에 대한 추가적인 수정이 필요하게 되었다. 비적합 요소의 조각시험을 위해 다음과 같은 추가적인 일정변형도 조건(constant strain condition)이 필요하다[9].

$$\int_V \bar{\mathbf{B}}^T dV = 0 \quad (6)$$

식(6)을 만족시키기 위해서는 비적합변형률행렬 $\bar{\mathbf{B}}$ 는 보정행렬 $\bar{\mathbf{B}}^C$ 에 의해서 수정되어야 한다. 새로이 보정된 변형도 행렬을 $\bar{\mathbf{B}}^*$ 라 표시하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\mathbf{B}}^* = \bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{B}}^C \quad (7)$$

여기서,

$$\bar{\mathbf{B}}^c = -\frac{1}{V} \int_V \bar{\mathbf{B}} dV \quad (8)$$

또한, 전단에 대한 변형도-변위 관계 행렬을 대체하면 최종적으로 다음과 같이 변형도를 구할 수 있다.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{B}}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b \\ \bar{\mathbf{B}}_s \end{bmatrix} \mathbf{U} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_b^* \\ \bar{\mathbf{B}}_s^* \end{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_b & \bar{\mathbf{B}}_b^* \\ \bar{\mathbf{B}}_s & \bar{\mathbf{B}}_s^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \bar{\mathbf{U}} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

여기서, \mathbf{B}_b 는 휨변형률행렬, $\bar{\mathbf{B}}_s$ 는 대체전단변형률장에 의해 수정된 전단변형률행렬, $\bar{\mathbf{B}}_b^*$ 와 $\bar{\mathbf{B}}_s^*$ 는 비적합모드의 휨 및 전단변형률행렬이다. 식(9)의 변형률행렬에 의해 구성되는 전체강성행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{cc} &= \int_V \mathbf{B}_b^T \mathbf{E}_b \mathbf{B}_b dV + \int_V \bar{\mathbf{B}}_s^T \mathbf{E}_s \bar{\mathbf{B}}_s dV \\ \mathbf{K}_{cn} &= \int_V \mathbf{B}_b^T \mathbf{E}_b \bar{\mathbf{B}}_s^* dV + \int_V \bar{\mathbf{B}}_s^T \mathbf{E}_s \bar{\mathbf{B}}_b^* dV \\ \mathbf{K}_{nn} &= \int_V \bar{\mathbf{B}}_b^{*T} \mathbf{E}_b \bar{\mathbf{B}}_b^* dV + \int_V \bar{\mathbf{B}}_s^{*T} \mathbf{E}_s \bar{\mathbf{B}}_s^* dV \end{aligned} \quad (10)$$

식(7)에서부터 식(10)까지를 통해, 몇 가지의 다양한 요소를 구성할 수 있다. 본 연구에서 보다 향상된 거동을 나타내는 요소개발을 위해 사용된 세 가지 개선 방법은 회전자유도에 대한 비적합모드의 추가, 선택적 감차적분의 사용 그리고 대체전단변형률장의 사용이며, 구성된 요소들 가운데 네 개의 비적합모드 ($\bar{\mathbf{N}}_1 \sim \bar{\mathbf{N}}_4$)를 갖는 평판요소(NMS8로 명명)가 다른 요소와 비교할 때 보다 우수한 거동을 나타낸다.

4. 동적평형방정식 및 시간적분방법

NMS8 요소를 사용한 구조물의 동적평형방정식은 다음과 같이 널리 알려진 행렬식으로 표현가능 하다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}(t) \quad (11)$$

여기서 \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 는 각각 구조물의 질량행렬, 감쇠행렬, 강성도행렬을 의미하고, $\mathbf{R}(t)$ 는 임의의 시간 t 에서의 외력 벡터를 의미한다.

평판 유한요소의 질량행렬은 요소의 베틀 성분을 근사화 하는데 사용하는 형상함수와 동일한 것을 사용하면 다음과 같이 구할 수 있다. 즉, 요소 내 두께가 일정하다고 가정하고, i 와 j 를 요소 내 절점이라고 하면 요소의 질량행렬은 다음과 같다.

$$M_{ij} = c_{ij} \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & \frac{t^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{t^3}{12} \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서 c_{ij} 는 질량행렬의 계수로서 다음과 같이 형상함수로부터 계산이 가능하다.

$$c_{ij} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \rho N_i N_j |J| d\xi d\eta \quad (13)$$

여기서 ρ 는 평판구조물의 단위질량을 의미한다.

본 연구에서 제안한 평판유한요소의 질량행렬 계산에서는 식 (13)의 질량행렬계수 계산 시 9절점 요소의 형상함수만을 사용하고 비적합변위형의 추가는 생략하였는데 이는 질량행렬에 있어서 비적합변위형의 영향이 매우 작기 때문이다. 감쇄행렬의 경우 강성행렬과 질량행렬의 선형조합으로 나타내는 Rayleigh Damping 방법을 사용하였다.

식(11)의 구조물 동적평형방정식을 계산하기 위해서 본 연구에서는 여러 시간적분방법 가운데에서 일정 평균가속도방법으로서 조건 없이 안정된 결과를 보여주고 있는 Newmark방법을 사용하였다.

5. 수치해석

가상적인 제로에너지모드의 존재여부를 검토하기 위하여 요소에 대한 고유치해석을 수행하였다. 비적합모드를 포함하고 있는 8절점 serendipity 요소인 NMS8 은 강체모드에서 3개의 제로에너지모드만이 존재하였고 가상적인 제로에너지모드는 없는 것으로 판명되었다.

제안된 요소의 거동을 검증하기 위하여 다양한 두께-폭 비에서 일련의 불규칙적인 요소형태에 대한 전단 잠김시험을 수행하였다. 시험에 사용된 요소형태는 그림2와 같다. A는 일반적인 정방형이며, B는 경사를 갖는 형태, C는 곡선형태, D는 요소 내 절점의 위치 이동을 나타낸다. 이 시험의 결과는 표2 에 주어져 있다. 표에서 나타난 바와 같이 본 연구에서 제안한 NMS8 요소는 뒤틀린 형태의 요소에서도 잠김현상이 일어나지 않는 좋은 거동을 보여주었다.

그림3은 단순지지 정방형 평판예제로 ($t/L=10^{-2}$) 요소개수는 4×4 로 구성하였으며 전체에 등분포 하중을 재하하여 x축방향으로 가우스 적분점에서의 휨모멘트 및 전단력분포를 다른 요소들의 결과와 비교 하였다. 전단력분포에 있어서 Q8[6]과 MITC8[8] 요소가 불안정한 분포를 보이는 반면에 NMS8 요소는 안정된 결과를 나타내는 것을 알 수 있다.

요소의 동적응답시험을 위해 고정지지된 원형평판구조물에 면에 수직한 방향으로 균등 단위분포하중이 갑자기 작용하는 경우 (Suddenly Applied Uniform Load)에 대한 해석을 수행하여 시간변화에 대한 평판중심점에서의 수직변위값의 변화를 검토하였다. 해석대상 구조물은 그림4와 같이 대칭성을 이용하여 전체 구조물의 1/4만을 모형화 하였으며, 해석에 사용한 유한요소는 5개이다. 해석구조물의 형상과 재료특성치는 그림4와 같다. Newmark방법에 의한 시간적분방법을 도입하여 중심점에서의 시간에 따른 수직변위의 변화를 Reismann의 결과와 비교하여 그림5에 나타내었다.

표1. 8절점 Mindlin 평판요소

Reference	Name	Shape Function		Integration Rule						DOF per Node (after condensation /original)	No. Zero(0) Eigenvalues		Comment
				K _{CC}		K _{CN}		K _{NN}			Total Zero Eigenvalues	Virtual Zero Eigenvalues	
		w	θ_x, θ_y	B	S	B	S	B	S				
Hughes [2]	QLS	9-node	9-node	N	R	-	-	-	-	27/27	4	1	-
Choi and Kim [3]	NC8-A	8-node + $\bar{N}_3 \sim \bar{N}_5$	8-node	R	R	R	R	R	R	24/27	7	4	Spurious zero energy modes
	NC8-B	8-node + \bar{N}_5	8-node	R	R	R	R	R	R	24/25	5	2	
Choi and Kim [4]	NC8-CS	8-node + $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_5$	8-node	R	N	-	N	-	N	24/27	3	0	-
	NC8-DS	8-node + $\bar{N}_1 \sim \bar{N}_5$	8-node	R	N	-	N	-	N	24/27	3	0	
Kim and Choi [8]	NC-QH	8-node	9-node + \bar{N}_1, \bar{N}_2	N	R	N	R	N	R	24/30	3	0	
This Study	NMS8	8-node	8-node [†] + $\bar{N}_1 \sim \bar{N}_4$	N	R	N	R	N	R	24/32	3	0	

† : assumed shear strains
 N : normal integration (3x3 scheme)
 R : reduced integration (2x2 scheme)
 * : not communicable in a mesh of two or more elements
 B : bending
 S : shear

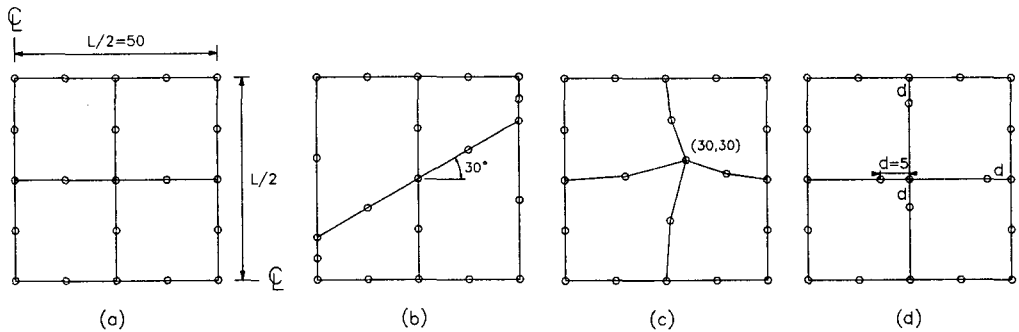


그림2. 전단잡김 시험에 사용된 요소형태

표2. 중앙에서의 정규화된 수직변위 (전단잠김 시험)

References	Name	t/L	Mesh type				Comment
			(a)	(b)	(c)	(d)	
Hughes et al. [2]	QLS	10^{-1}	1.0108	1.0213	1.0110	0.9637	No locking
		10^{-2}	1.0108	0.9659	1.0073	0.9238	
		10^{-3}	1.0088	0.9038	1.0053	0.9150	
		10^{-4}	1.0088	0.9017	1.0052	0.9149	
Kim and Choi [8]	NC-QH	10^{-1}	1.0031	1.0101	0.9930	0.9590	Poor with mesh (d)
		10^{-2}	1.0023	1.0018	0.9946	0.7963	
		10^{-3}	1.0018	0.9944	0.9937	0.7760	
		10^{-4}	1.0018	0.9943	0.9936	0.7757	
Donea and Lamain [6]	Q8	10^{-1}	1.0103	1.0096	1.0110	0.9884	Poor with mesh (b), (c) and (d)
		10^{-2}	1.0032	0.9805	0.9615	0.9056	
		10^{-3}	1.0005	0.6184	0.5527	0.6133	
		10^{-4}	1.0004	0.5341	0.5099	0.5977	
This Study	NMS8	10^{-1}	1.0186	1.0398	1.0140	1.0407	No locking
		10^{-2}	1.0068	1.0334	1.0025	1.0514	
		10^{-3}	1.0047	1.0312	1.0004	1.0495	
		10^{-4}	1.0047	1.0313	1.0003	1.0498	

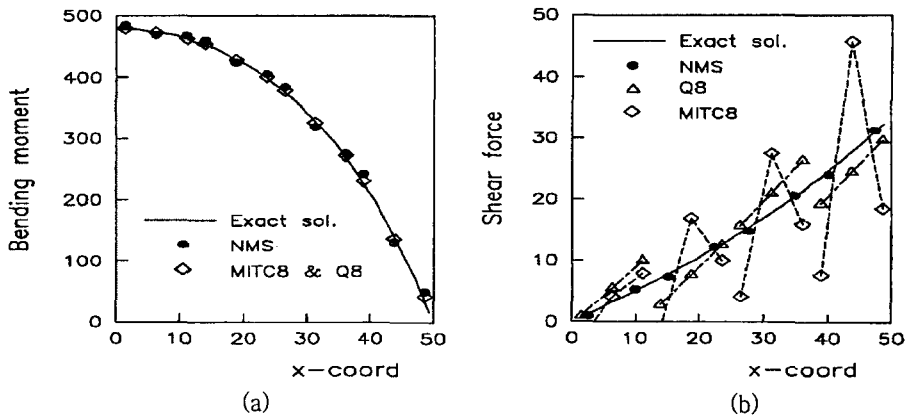


그림3. 단순지지된 정방형 평판; (a) 휨모멘트 분포 (b) 전단력 분포

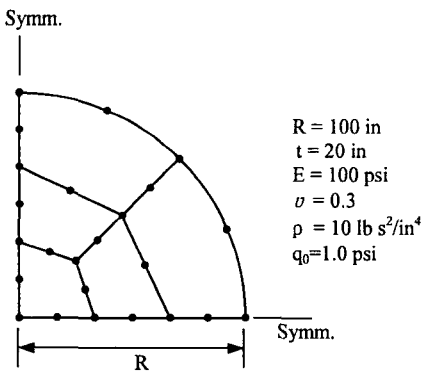


그림4. 원형 평판 모델

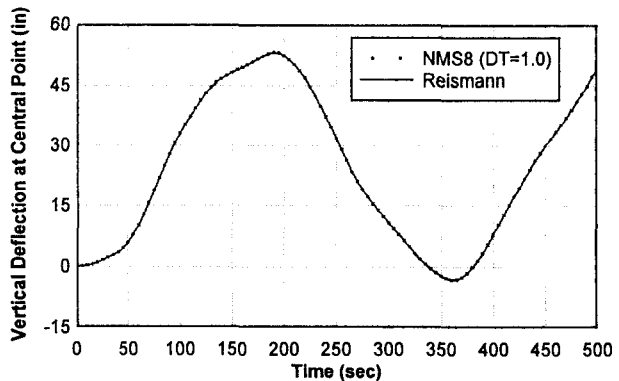


그림5. 중앙에서의 수직변위변화

6. 결 론

본 연구에서는 기존의 평판요소들에서 나타나는 문제점을 개선한 평판유한요소를 제시하였다. 이 요소는 비적합변위형과 선택적 감차적분방법 그리고 대체전단변형률장을 복합적으로 적용하여 각각의 장점들을 포함하는 향상된 거동을 보여주고 있다. 대표적인 검증문제에 대한 수치해석작업을 통하여 본 연구에서 개발한 NMS8요소는 조각시험을 통과하고 있으며 가상적인 제로에너지모드 및 전단잠김현상의 발생과 같은 문제를 나타내지 않음을 알 수 있었다. 특히 찌그러진 형상으로 모형화 한 경우와 경계조건이 억제된 문제에 있어서도 잠김현상이 발생하지 않았으며 본 연구에서 수행한 동적반응해석 시험에 있어서도 이론해와 잘 일치하는 결과를 보여주었다.

참고문헌

- [1] Pugh, E.D.L., Hinton, E., and Zienkiewicz, O.C. (1978), "A study of quadrilateral plate bending elements with reduced integration", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 12, 1059–1079.
- [2] Huges, T.J.R. and Cohen, M. (1978), "The 'heterosis' finite element for plate bending", *Computers and Structures*, Vol. 9, 445–450.
- [3] Choi, C.K. and Kim, S.H. (1988), "Reduced integration, nonconforming modes and their coupling in thin plate elements", *Computers and Structures*, Vol. 29, 57–62.
- [4] Choi, C.K. and Kim, S.H. (1989), "Coupled use of reduced integration and non-conforming modes in quadratic Mindlin plate element", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 28, 1909–1928.
- [5] Hinton, E. and Huang, H.C. (1986), "A family of quadrilateral Mindlin plate elements with substitute shear strain fields", *Computers and Structures*, Vol 23, 409–431.
- [6] Donea, J. and Lamain, G. (1987), "A modified representation of transverse shear in C0 quadrilateral plate element", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 63, 183–207.
- [7] Choi, C.K. and Yoo, S.W. (1991), "Combined use of multiple improvement techniques in degenerated shell element", *Computers and Structures*, Vol. 39, 557–569.
- [8] Kim, S.H. and Choi, C.K. (1992), "Improvement of quadratic finite element for Mindlin plate bending", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 34, 197–208.
- [9] Wilson, E.L. and Ibrahimvegovic, A. (1990), "A use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffness and stresses", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 7, 229–241.
- [10] Bathe, K.J. (1996), *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, NJ.
- [11] Reismann, H. and Lee, Y. (1969) "Forced Motions of Rectangular Plates", *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 4.
- [12] 최창근, "유한요소법", 테크노프레스, 2002