

적응적 Element-free Galerkin Method 해석을 위한 이중투영법의 개선

A modification of double projection method for adaptive analysis of Element-free Galerkin Method

이계희¹⁾ 정흥진²⁾ 이태열³⁾

Lee, Gye-Hee Chung, Heung-Jin Lee, Tae-Yeol

ABSTRACT

In this paper, the modification of double projection method for the adaptive analysis of Element-free Galerkin(EFG) method were proposed. As results of the double projection method, the smoothed error profile that is adequate for adaptive analysis was obtained by re-projection of error that means the differences of EFG stress and projected stress. However, it was found that the efficiency of double projection method is degraded as increase of the numerical integration order. Since, the iterative refinement to single step error estimation made the same effect as increasing of integration order, the application of the iterative refinement base on double projection method could be produced the inadequately refined analysis model. To overcome this defect, a modified scheme of double projection were proposed. In the numerical example, the results did not show degradation of double projection effect in iterative refinement and the efficiency of proposed scheme were proved.

1. 서론

절점이 모델의 임의의 지점에 자유롭게 위치할 수 있는 무요소법에서는 절점수의 변동이나, 절점의 위치 변화를 고려하는 새로운 모델의 작성이 손쉬우므로 이의 특성을 활용한 해석에 쉽게 적용될 수 있다. 이러한 특성은 특히 적응적 해석에 적합하므로 무요소법의 한 종류는 그 이름을

1) 목포해양대 해양시스템공학부, 전임강사
2) 전주대학교 건설환경공학부, 조교수
3) 한국과학기술원, 박사후 연구원

적응적 해석의 종류를 나타내는 접두사 hp 를 사용하기도 하였다.⁶⁾

이러한 주요소법의 적응적 해석의 적용에 있어서 신뢰성있는 오차의 산정과 효율적인 절점의 배치는 필수적인 과정이며 개발된 해석법의 효율을 좌우하는 중요한 요소이다. 따라서 이에 대한 연구는 여러 연구자들에 의해 개발초기부터 지속적으로 추진되어왔다. 그 중 Duarte 와 Oden 은 그들이 개발한 hp -cloud방법을 이용해 내부 영역과 Neumann 경계조건에서의 잔차를 계산하고 이를 이용한 오차평가를 수행하였고⁶⁾ Liu 등은 Reproducing Kernel Particle Methods (RKPM)에 대하여 wavelet 분해를 통한 고응력 경사부분 및 경계 탐색 알고리즘을 개발하고 이를 오차치시자로 이용하여 오차분포를 산정하였다⁹⁾. 또한 Hausser-Combe 등은 변형율의 경사(stain gradient)와 절점간의 거리를 이용해 element-free Galerkin 방법에 적용 가능한 적응적 해석법을 제시하였다⁷⁾. 또한 Chung등은 투영응력을 이용한 오차 평가법의 제안하였고⁵⁾ 이 방법을 이용해 Lee등은 적응적 균열해석을 수행하였다⁸⁾. 최근에는 이 투영응력을 이용한 오차 평가법을 개선한 이중투영오차법이 제안되어 지금 적응적해석에의 적용이 연구되고 있는 단계이다⁴⁾. 본 논문은 이중투영오차를 이용한 적응적 해석을 수행시 발생하는 이중투영오차의 성능저감현상을 규명하고 이를 개선하기 위한 새로운 알고리즘을 제안하였다. .

2. EFG 근사와 오차평가

EFG방법에 의하여 직접 계산된 임의점에서의 응력은 다음과 같다.

$$\sigma^h(\mathbf{x}) = \mathbf{D} \sum_{I=1}^n \mathbf{S} \phi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (1)$$

여기서 \mathbf{D} 는 재료행렬, \mathbf{S} 는 변형률을 정의하는 미분연산자이다.

주요소법에서 형상함수의 도함수는 원 형상함수보다 더 높은 진동수 성분을 가지게 된다. 따라서 위의 식에서 얻어진 응력은 형상함수의 도함수에 의해서 정의되기 때문에 변위보다 높은 진동수 성분을 포함하고 있다. 이러한 가상의 진동수성분은 특히 응력이 집중되거나 불연속이 발생하는 부분에서 크게 나타난다. 따라서 이러한 응력의 가상진동을 줄여주면 보다 정확한 응력분포를 산정할 수 있으며 이를 위하여 위에서 얻어진 절점응력을 다음과 같이 투영한다.

$$\sigma^p(\mathbf{x}) = \sum_K \left\{ \psi_K(\mathbf{x}) \mathbf{D} \sum_{I=1}^n \mathbf{S} \phi_I(\mathbf{x}_K) \mathbf{u}_I \right\} = \sum_K \psi_K(\mathbf{x}) \sigma^h(\mathbf{x}_K) \quad (2)$$

여기서 $\sigma^h(\mathbf{x}_K)$ 는 절점에서의 응력이며 l 은 투영응력의 영향영역내에 있는 절점의 수이다. 위 식에서 $\phi_I(\mathbf{x})$, $\psi_K(\mathbf{x})$ 각각 EFG해석시와 투영응력산정시 사용하는 형상함수이다. 이 때 투영응력의 형상함수는 EFG형상함수에 비하여 작은 영향영역을 사용한다. 결과적으로 보면 위에서 얻어진 투영응력은 절점의 응력을 원래의 형상함수보다 작은 영향영역을 갖는 또 다른 형상함수로 보간하는 것이다. 따라서 기존의 계산 루틴을 그대로 이용할 수 있으므로 추가적인 많은 노력없이 간단하게 구현할 수 있다. 이후의 오차 평가에 있어서는 이 투영응력을 정확해로 가정한다. 따라서 임의의 점에서의 오차는 다음과 같이 나타낸다.

$$\sigma^e(\mathbf{x}) = \sigma^p(\mathbf{x}) - \sigma^h(\mathbf{x}) \quad (3)$$

그러나 이렇게 얻은 오차는 다시 진동하는 특징을 가지고 있다. 이는 투영응력이 원래 응력보다 매끄러운 응력분포를 가지고 있기 때문에 투영응력과 EFG응력과의 차는 응력경사에 따른 오차와 EFG응력의 진동성분을 가지고 있다. 이러한 진동성분은 적응적 해석시 응력경사에 따라 부드럽게 세밀화되는 것을 방해한다. 이러한 진동성분은 다음과 같이 이중 투영방법을 통하여 제거할 수 있다⁴⁾.

$$\|e^p(\mathbf{x}_g)\| = \sum_{KG}^{LG} \psi_{KG}(\mathbf{x}_g) \|e(\mathbf{x}_{KG})\| \quad (4)$$

여기서 KG 는 Gauss적분점 이며 LG 는 재투영시 사용된 영향영역내의 적분점의 개수이다. 이는 절점사이에 위치한 적분점에서 응력을 보간하여 진동현상을 감소시키는 역할을 한다. 이는 적분점을 기준으로한 새로운 EFG형상함수를 이용하여 보간하는 것을 의미한다.

적응적 해석과정에서는 국부적인 세분화를 위한 지표와 전체적인 해석의 정확도를 나타내는 지표를 필요로 한다. 따라서 국부적인 세분화 지표를 산정하기 위해서는 보간오차를 임의의 국부적인 지역에서 평가해야 하고 동시에 해석이 원하는 정도의 정확도에 도달했는지를 검사하기 위해 전체 영역에 걸쳐 보간오차를 평가해야 한다.

그러나 이중투영법에 의해 얻어진 오차 분포는 실제의 오차를 평활화한 2차오차이기 때문에 해석의 정확도를 나타내지는 않는다. 따라서 전체영역 Ω 에서의 보간오차의 에너지 norms 보간오차에 대한 값을 사용하고 적응적 세분화 지표가 각 적분격자 Ω_i 에서의 국부적인 보간오차의 에너지 norms 이중투영에 의해 평활화된 오차를 사용한다. 따라서 전체영역과 국부에서의 오차norm은 각각 다음과 같이 나타낸다.

$$\|E\| = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (5)$$

$$\|E_i\| = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} e^{pT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} e^p(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2} \quad (6)$$

위의 식들은 전체 및 국부 오차 평가자로 알려져 있다.

전체 영역에서의 해의 정확도는 다음과 같은 상대오차의 항으로 평가될 수 있다. 상대오차(relative error)의 에너지 norms 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$R = \frac{\|E\|}{\|U\|} = \frac{\left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^{eT}(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma^e(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2}}{\left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T(\mathbf{x}) \mathbf{D}^{-1} \sigma(\mathbf{x}) d\Omega \right\}^{1/2}} \quad (7)$$

임의의 적분격자 i 에서의 세분화 지표가 되는 국부 오차 지시자(local error indicator)는 다음과 같이 계산한다.

$$\eta_i = \left\{ \frac{\|E_i\|^2}{\|U\|^2 / N_{cell}} \right\}^{1/2} \quad (8)$$

만일 식 (7)가 미리 정의된 값보다 작아지면 적응적 해석과정은 종료된다.

3. 이중투영오차의 개선

3.1 이중투영오차의 문제점

이중투영오차의 기본개념은 투영응력에 의해 구해진 적분점에서의 오차를 적분점을 기준으로 얻어진 EFG형상함수로 재투영하는 것이다. 이 때 각 적분점은 오차놈이나 상대오차를 구하는데 사용된다. 그러나 오차놈이나 상대오차를 계산하는 과정에서는 적분점의 수가 증가하여도 근본적으로 일정차수 이상의 수치적분은 큰 문제가 없다. 즉 적분점을 본래의 목적대로 다항식의 수치적분에 사용하는 경우에는 적분의 차수가 증가하여도 적분값의 정확도에만 영향을 미칠 뿐 적분대상인 함수의 형상은 변하지 않는다.

그러나 무요소법의 형상함수는 두 절점과의 최소거리 h 에 기반하는 가중함수를 사용하고 있으므로 적분점에 기반하는 형상함수를 이용하여 평활화를 수행하는 이중투영법은 적분차수가 증가할 수로 해상도가 큰 근사를 수행한다. 이는 절점사이의 진동현상의 감소를 위해 사용되었던 이중투영오차의 효율을 떨어뜨리는 방향으로 작용한다. 즉 많은 적분점을 사용할수록 적분점간의 거리가 감소하고 이는 국부적인 영향반경을 가진 형상함수로 구성된 근사화를 수행하게 되어 절점사이에서 진동하는 오차 분포를 평활화하지 못하고 진동현상을 그대로 반영하는 결과를 나타낸다.

이와 같이 응력에 대한 수치적분차수의 변화에 따른 영향은 Lui등이 제안한 오차 평가법에서 제시된바 있다¹⁰⁾. 이들은 오차평가를 위한 참조해로 원응력산정을 위한 적분점보다 낮은 차수를 이용해 얻은 응력을 사용하였다. 이는 일종의 감차적분으로 임의점에서의 오차를 평가할 수 있는 무요소법의 장점의 희생이나 특이점 근처에서 수치적인 불안정을 유발할 수 있고 적분격자에 심하게 의존하는 단점이 있기는 하지만 현재 적분차수의 영향에 대한 연구가 부족한 상황에서 수치적분차수를 이용한 새로운 접근법이라 할 수 있다.

앞에서 언급했던 이중투영에서의 고차 수치적분의 사용에 의한 효율의 저하는 적절한 적분점을 사용한다면 오차평가와 적응적세분화가 한차례씩 반복되는 경우에는 큰 문제를 발생시키지 않는다. 그러나 무요소법의 장점중에 하나인 임의의 지점에서의 연속적인 응력의 산정을 이용하는 반복세분화(1회의 오차평가에 대한 여러 번의 세분화)의 경우에는 문제를 발생하게 된다. 즉 고정된 절점에 대해 산정된 응력에 대한 세분화를 반복하게 되면 이는 일정한 절점분포에 대해 적분차수를 증가시키는 것과 동일한 효과를 가져온다. 따라서 부드러운 오차분포를 얻기 위해 사용된 이중투영오차법의 효율성이 저하되는 결과를 가져온다. 만일 초기에 4×4 의 적분점을 가지고 이중오차투영을 수행했다가 가정하면 2회반복세분화시에는 $(4 \times 2^2) \times (4 \times 2^2) = 16 \times 16$ 의 적분점에 대한 이중오차

투영을 수행하게 되는 것이다. 이는 1차 이중투영시보다 4배이상의 진동수를 갖는 오차분포를 근사하게 된다.

3.2 반복세분화를 위한 개선된 알고리즘

앞 절에서 언급된 반복 세분화시 발생하는 이중투영오차의 효율성 저하를 개선하기 위해서는 세분화가 진행되어도 최초의 적분점에 기반한 오차분포를 이용하여 응력을 투영하여야 한다. 즉 반복세분화시 매 세분화단계마다 새로운 적분점의 분포에 따른 형상함수를 재구성하지 않고 최초의 적분점에 기반한 형상함수를 사용하여 반복 세분화시 발생하는 적분점에 대한 투영오차를 계산하는 것이다. 이는 실제 적분격자에서 발생하는 오차놈의 계산을 위한 적분점과 투영오차를 계산하기 위한 적분점을 분리하는 것이다. 유한요소법과 같이 한정된 차수의 형상함수를 사용하는 경우에는

이러한 임의점에서 미분가능한 함수값의 보간이 곤란하지만 무요소법의 경우에는 임의점에 대하여 미분가능한 형상함수값을 얻을 수 있기 때문에 적분점에 기반한 이중투영오차를 임의점에서 보간하여 얻을 수 있다. 이 과정을 간략히 표시하면 그림 1과 같다.

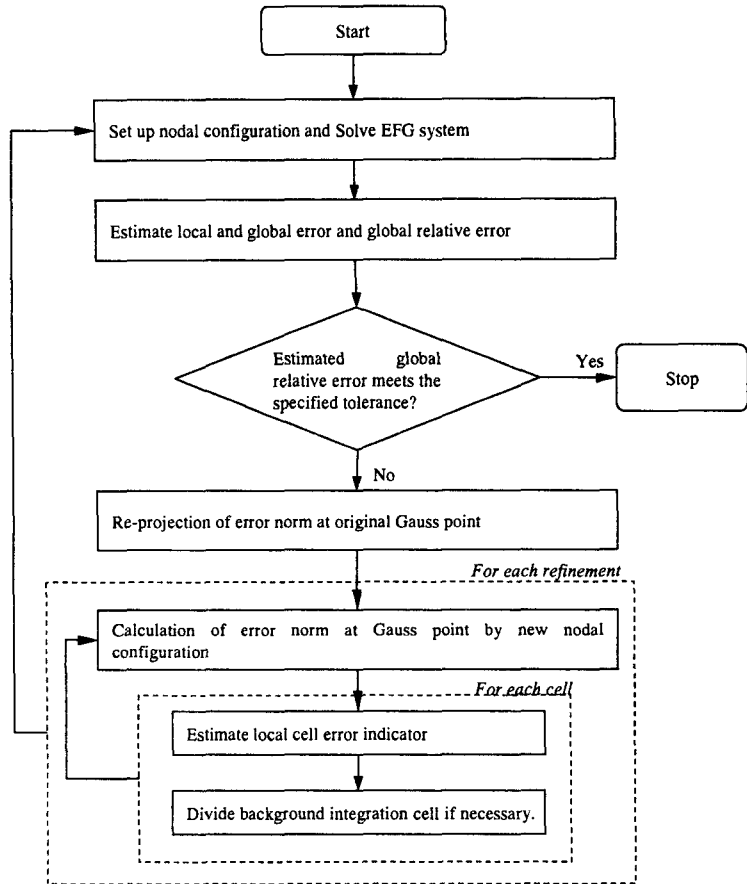


그림 1. 개선된 이중투영법에 의한 적응적 세분화 알고리즘

4. 수치예제

수치예제로 그림 2와 같은 외팔보를 사용하였다. 이 문제는 정확해는 다음과 같은 식을 따르는 것으로 알려져 있다.

$$u_x = \frac{-py}{6EI} \left[(6L-3x)x + (2+\nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right] \quad (9a)$$

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L-x) + (4+5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L-x)x^2 \right] \quad (9b)$$

여기서

$$I = \frac{D^3}{12}$$

$$\bar{E} = \begin{cases} E & \text{for plane stress} \\ E/(1-\bar{\nu}^2) & \text{for plane strain} \end{cases}$$

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \nu & \text{for plane stress} \\ \nu/(1-\nu) & \text{for plane strain} \end{cases}$$

이 문제에 사용된 계수값은 $E = 3.0 \times 10^7$, $\nu = 0.25$, $D=6$, $L=48$, $P=100$ 이며 무요소형상함수를 계산하기 위한 영향함정은 $a = D_m c$ 로 c 는 절점간의 최소거리이며 EFG계산시에는 $D_m^a = 3.0$, 응력투영시에는 $D_m^p = 1.5$ 를 사용하였다.

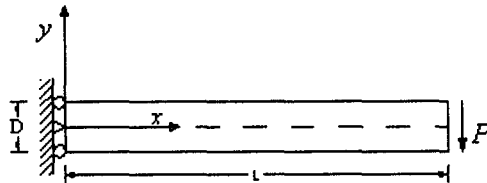


그림 2. 외팔보 문제

위 문제의 정확해는 전단응력은 길이 방향으로 일정한 값을 갖는데 반하여 EFG응력은 진동 성분을 갖는다. 그림 3.f)는 이 값의 차를 나타낸 것으로 이 응력을 기존의 오차 평가방법으로 구한 에너지놈의 오차 분포이다. 그림에서 볼 수 있듯이 응력의 가상진동성분이 포함되어 있어 오차 분포의 진동이 심한 것을 알 수 있다. 이를 5x5의 수치적분을 통하여 이중투영한 결과는 그림 3.a)에서 볼 수 있다. 이 그림에서는 그림 3.f)에서 보이는 오차분포의 진동을 볼 수 없고 전영역에 걸쳐 부드러운 오차분포가 얻어져 연속적인 세분화에 적합한 오차분포가 얻어졌음을 알 수 있다. 그러나 동일한 문제에 대하여 적분차수가 증가할수록 그림 3.f)에서 보였던 진동현상이 점점 증가함을 그림 3.b)~e)에서 볼 수 있다. 이러한 현상은 반복세분화시 영향을 나타낸다. 그림 4.a)에서 보듯이 기존의 이중투영법을 사용하여 반복세분화시 절점의 분포가 이러한 오차의 진동현상을 그대로 나타내고 있는 걸 볼 수 있다. 본 연구에서 제안된 개선된 이중투영법을 사용하여 얻어진 오차 분포는 반복 세분화가 수행되는 경우에도 최초의 적분점 분포에서 얻어진 값을 그대로 사용하므로써 오차 분포의 진동현상이 일어나지 않는다. 그림 4.b)는 개선된 이중투영법을 이용하여 반복세분화를 수행한 경우 얻어진 적분격자의 분포이다. 이 그림에서 적분격자의 분포가 부드럽게 연속화되어 반복세분화시에도 효율적인 해석모델을 얻을 수 있다.

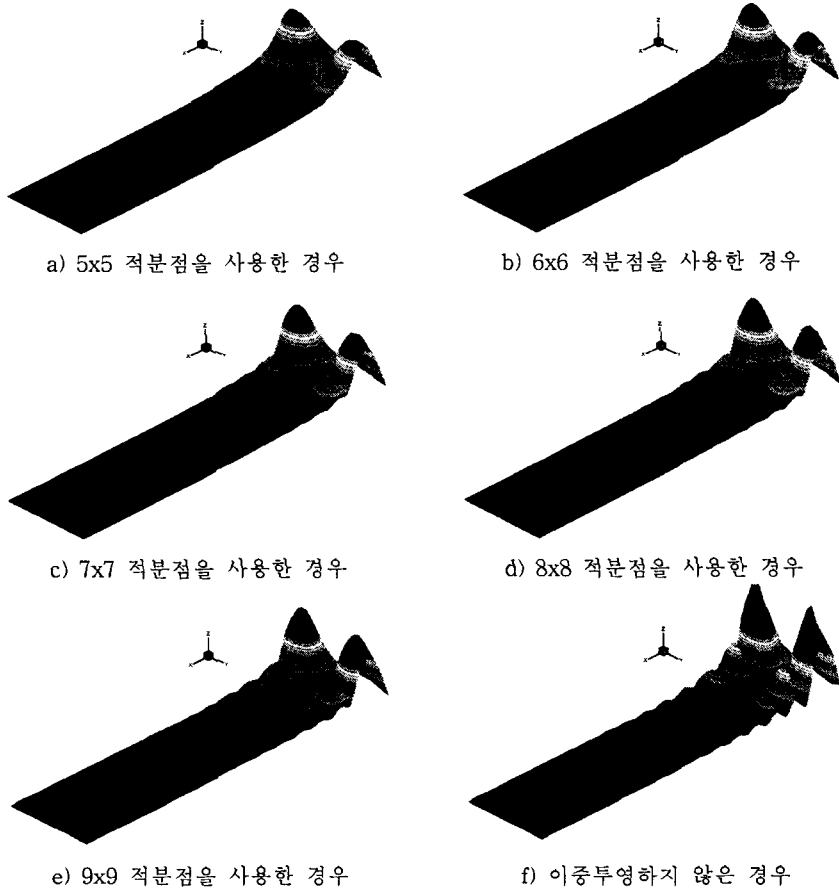
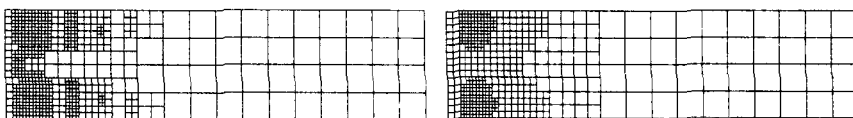


그림 3. 적분점에 수에 따른 이중투영오차분포



a) 기존 이중투영법

b) 개선된 이중투영법

그림 4. 세분화된 적분셀의 형상

4. 결론

본 논문에서는 EFG 방법에서의 적응적 해석을 위한 이중투영법에서 발생하는 수치 적분차수의 증가에 따른 진동현상의 발생을 지적하고 이를 개선할 수 있는 새로운 알고리즘을 제시하였다.

이중 투영법은 적분점에서 오차를 재투영하여 부드러운 오차분포를 얻는 방법이나 수치적분에 이용하는 적분차수가 증가될 수록 원 오차분포의 진동현상을 그대로 반영하는 성질이 있음이 밝혀졌다. 따라서 적응적 반복세분화를 수행하는 경우 적분차수를 증가시키는 것과 동일한 효과가

발생하여 비효율적인 적응적 해석모델이 얻어졌다. 이를 극복하기 위하여 반복세분화시 초기 적분 점을 이용한 오차 분포를 그대로 사용하여 부드러운 세분화 경향을 가진 개선된 적응적 해석모델이 구성될 수 있도록 하였다. 또한 수치 예제를 통해 제안된 알고리즘이 적절한 해석모델을 생성하는 것을 확인하였다. 따라서 본 연구는 적응적 해석의 효율성을 증대시키는데 활용될 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

1. Belytschko, T., Y. Krongauz, M. Fleming, D. Organ and W. K. Liu (1996a). "Smoothing and accelerated computations in the element-free Galerkin method". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 74. pp.111-126.
2. Belytschko, T., Y. Y. Lu and L. Gu (1994). "Element-free Galerkin methods". *International Journal for Numerical Method in Engineering*, Vol. 37, pp.229-256
3. Chung, H. J., Lee, G. H., Choi, C. K. (2000) "Adaptive nodal generation with the element-free Galerkin method", *Structural Engineering and Mechanics*, An International Journal. , Vol. 10, pp.635-650.
4. Chung, H. J., Lee, G. H. Kwak, H. J. "An Error Estimate in the Element-free Galerkin Method with Double Projection", *Fifth World Congress on Computational Mechanics*, Vienna, Austria, July 7th - 12th, 2002
5. Chung, H. J. and Belytschko, T.(1998). "An error estimate in the EFG method". *Computational Mechanics*, Vol. 21, pp.91-110
6. Duarte, C. A. and J. T. Oden (1996). "An *hp* Adaptive Method Using Clouds". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp.237-262.
7. Hausser-Combe, U. and Korn, C. (1998), "An adaptive approach with the EFG method" , *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 162, pp.203-222.
8. Lee, G. H., Choi, C. K. and Chung, H. J.(2002) "Adaptive Crack Propagation Analysis with the Element-free Galerkin Method", *International Journal for Numerical Method in Engineering* (in press).
9. Liu, G. U. and Tu, Z. H., (2002) , "An adaptive procedure based on background cells" , *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 191, pp.1923-1943.
10. Liu, W. K., W. Hao, Y. Chen, S. Jun and J. Gosz (1996). "Multiresolution reproducing kernel particle methods". *Computational Mechanics*, Vol. 20, pp.295-309
11. Organ, D., M. Fleming, T. Terry and T. Belytschko (1996). "Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency". *Computational Mechanics*, Vol. 18. pp.225-235.