

분포정수 전자기시스템에서 추출된 전기회로 상수를 이용한 동특성 해석

신유정, 한상준, 이세희, 박일한  
성균관대학교 정보통신공학부

Dynamic Characteristic Analysis by using Electric Circuit Parameter  
Extracted from Distributed Electromagnetic Systems

Yu-Jeong Shin, Sang-Joon Han, Se-Hee Lee, and Il-Han Park  
School of Information & Communications Engineering University of SungKyunKwan

**Abstract** - 전기-기계 결합시스템에서의 동특성을 정확히 해석하기 위해서는 해석모델의 전기회로 방정식과 운동방정식이 함께 고려되어야 한다. 이때 시스템의 다양한 입력과 기하학적인 구조 등에 대한 등가회로 상수는 시스템의 전반적인 특성에 매우 민감하게 작용하므로 중요하게 고려되어야 한다. 본 논문에서는 전자기시스템의 회로상수를 미리 계산한 다음 이를 기계 역학시스템에 적용하여 다양한 전기적 입력과 외부 부하특성에 대하여 어떻게 동작하는지를 알아보았다. 전자기시스템의 회로상수 추출을 위해 전자기장해석은 유한요소법을 이용하였으며 전기회로 방정식과 운동방정식이 함께 고려된 상태 미분방정식은 4차 Runge-Kutta 미분방정식 해법을 이용하여 운동특성을 해석하였다. 계산된 결과는 수학적 으로 검증된 미분방정식과 비교하여 검증하였다.

해석 모델은 실질적으로 많은 응용에 사용되는 축대칭 전자적인 플러저 모델을 사용하였다. Fig.1은 z축을 중심으로 대칭성을 만족하는 축대칭 모델을 도시하였다. 코어부분의 코일은 100[turn]이며 에너지 계산시 1[A]의 전류를 가했다.

1. 서 론

전자기시스템은 설계 시 기계에 수반된 시스템의 전기적인 입력에 의한 기계적인 출력특성 뿐 만 아니라 전체 시스템과의 상호작용에 의한 다양한 동특성의 해석을 필요로 하게된다[1]. 하지만 지금까지는 전기기기 자체에 대한 단편적인 동작특성을 파악하는데 그쳤으며 실제 다양한 전기적 입력과 기계적 부하 등에 대한 실질적인 해석이 어려웠다. 시스템 설계자들은 전체 시스템 내에서 전류전동기와 같은 전기기기의 전기적 입력과 외부 부하 특성에 대하여 어떻게 동작하는지에 대한 관심이 증가되고 있다. 이러한 이유로 설계나 전기기기의 동특성 해석함에 있어 전기적인 특성 뿐 만 아니라 기계적인 특성을 고려하여 설계나 해석이 이루어지게 된다[2][3]. 이때 시스템의 다양한 입력과 기하학적인 구조 등에 대한 등가회로 상수의 정확한 결정은 시스템의 전반적인 특성에 매우 민감하므로 중요하게 고려된다. 최근 전자기시스템의 회로정수를 비교적 정해에 가깝게 해석할 수 있게 되면서 전자기시스템에 대한 제어분야와 기계역학 분야에서 보다 실제 상황에 가까운 시뮬레이션이 가능하게 되었다. 하지만 전자기시스템에서 발생하는 회로정수를 직접적으로 기계역학시스템의 거동에 연결하여 해석을 수행하기란 상당히 긴 시간을 요구하게 될 뿐 만 아니라 비선형의 경우 다양한 입력에 대해서 각각 다른 회로상수가 나타나기 때문에 이를 일일이 고려하여 해석하기란 실제로 불가능하다. 따라서 본 논문에서는 전자기 시스템의 회로상수를 미리 계산한 다음 이를 기계역학시스템에서 이용하는 방법을 제시한다. 해석모델로는 축대칭 전자적인 플러저 모델에 대하여 전기-기계 결합시스템의 표현과 실제 전기적인 입력이 가해진 경우에 대해 동특성 해석을 하였다.

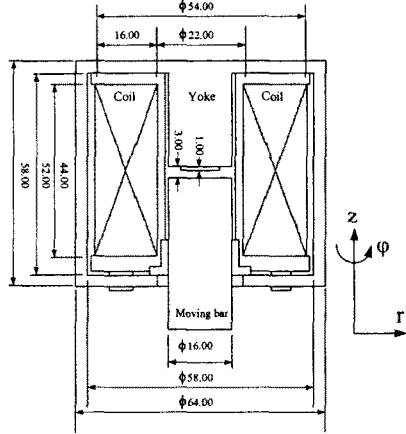


그림1 해석 모델

이 모델의 운동을 일으키는 구동힘은 코일에 입력된 전압에 의해 전류가 생성되고 이 전류는 전자력을 발생시켜 얻게되고 전자석의 가동부는 z축 방향으로 움직이게 된다. 이때 위치마다의 인덕턴스와 인덕턴스 미분값을 구한 다음 전기-기계의 정확한 해석을 위해 전기회로 방정식과 운동방정식을 함께 고려한 상태미분방정식에 파라미터 값을 넣어 해석한다.

2.2 해석 이론

Fig.1 에서와 같이 전류가  $\phi$ 방향성분만이 존재하는 경우 자기벡터포텐셜의 방향은 전류가 흐르는 방향과 동일하므로 자기벡터포텐셜  $A[\text{Wb/m}]$ 는  $\phi$ 방향성분만이 존재하게 된다. 따라서

$$A_r = A_z = 0 \tag{1}$$

가 되며 벡터포텐셜  $A$ 는  $A_\phi$ 만이 존재하고  $\phi$ 방향에 대해 일정치가 된다. 이때 축대칭 3차원 정자계의 자기벡터포텐셜에 의한 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\nu_z}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\phi) \right\} + \frac{\partial}{\partial z} (\nu_r \frac{\partial A_\phi}{\partial z}) = -J_\phi \tag{2}$$

여기서,  $\nu$ 는 투자율,  $A$ 는 자기벡터포텐셜  $[\text{Wb/m}]$ ,  $J_0$ 는 입력 전류밀도  $[\text{A/m}^2]$ 이다.

2. 본 론

2.1 플러저 해석모델

요소내의 벡터포텐셜  $A_p$  를  $r$ 과  $z$ 의 1차 함수로 표현하여 최종 유한요소 지배방정식을 구성하면 한 요소에 대하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial \lambda^{(e)}}{\partial A_{pie}} = \frac{2\pi r_0^{(e)}}{4L^{(e)}} \sum_{j=1}^3 (v_z c_{ie} c_{ie} + v_r d_{ie} d_{ie}) A_{pie} + \frac{2\pi v_z}{9r_0^{(e)}} \Delta^{(e)} \sum_{j=1}^3 A_{pie} + \frac{2\pi v_z}{6} \sum_{j=1}^3 (c_{ie} + c_{ie}) A_{pie} - \frac{2\pi I_0 v_r}{4} \Delta^{(e)} (r_0^{(e)} + \frac{r_{ie}}{3})$$

$$\text{여기서, } c_{ie} = z_{je} - z_{ke}, d_{ie} = r_{ke} - r_{je} \quad (3)$$

$\Delta^{(e)}$  = 해당요소 (e)의 면적  
여기서 얻은 자기벡터포텐셜 값을 이용하여 이 시스템의 포텐셜을 구하게 된다.

### 2.2.1 인덕턴스의 보간

여기서는 앞의 FEM방법을 이용하여 위치마다의 에너지를 구하게 되고 다음 식으로 인덕턴스를 계산하였다.

$$w = \frac{1}{2} L I^2 \quad (4)$$

상태방정식에 필요한 각 위치마다의 인덕턴스와 인덕턴스의 미분값은 빠른 동특성 해석을 하기 위하여 가동부를 적당한 위치에서부터 미리 움직여가면서 각 지점마다 에너지를 계산하게 되고 식(5)을 이용하여 인덕턴스를 계산한다. 그 다음 각 구간 사이의 인덕턴스와 인덕턴스의 미분값은 Cubic Spline 보간함수 중에서도 Natural Cubic Spline을 이용하여 계산하였다. 수치 데이터  $(x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2), \dots, (x_N, f_N)$ 가 있고 이것을  $i$ 번째 구간에서 3차 Spline함수로 표현하면 다음과 같다.

$$f_i(x) = \frac{A_{i+1}u_i^3 - A_i u_{i+1}^3}{6h_i} - B_i u_{i+1} + C_i u_i \quad (5)$$

$$(i=0, 1, 2, \dots, N-1)$$

$$\text{여기서, } B_i = \frac{f_{i+1}}{h_i} - A_i \frac{h_i}{6}, C_i = \frac{f_{i+1}}{f_i} - \frac{A_{i+1}h_i}{6}$$

$A_i, B_i, C_i$ 는  $i$ 번째 구간에서의 함수계수이다. 그리고 함수의 미분값은 다음과 같다.

$$\frac{df_i(x)}{dx} = \frac{A_{i+1}u_i^2 - A_i u_{i+1}^2}{2h_i} - B_i + C_i \quad (6)$$

### 2.2.2 전기-기계시스템 결합 방정식

입력전압이  $E(t)$ 인 경우 전압방정식은 다음과 같다.

$$E(t) = R \frac{dq}{dt} + e \quad (7)$$

여기서 코일양단의 역기전력  $e$ 는 다음과 같으며 상태방정식을 전기적 변수  $q$ 와 기계적 변수  $x$ 에 대하여 표현하기로 한다.

$$e = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) = L \frac{d^2 q}{dt^2} + L' \frac{dq}{dt} \frac{dx}{dt} \quad (8)$$

여기서  $L'$ 은 위치에 따른 인덕턴스의 미분값이다. 이 때 전자기력은 다음과 같이 구해진다.

$$f(x) = -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} \quad (9)$$

따라서 위의 식을 토대로 하여 각각 전기회로방정식과 운동방정식을 다시 기술하면 다음과 같다.

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + L' \frac{dq}{dt} \frac{dx}{dt} = E(t) \quad (10)$$

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + K(x - x_0) = f(x) \quad (11)$$

여기서  $M$ 은 가동부의 질량  $[Kg]$ ,  $B$ 는 감쇠계수,  $K$ 는 스프링 상수  $[N/m]$ 이며  $x_0$ 는 스프링의 중립위치이다.

이 두 방정식을 결합한 결합방정식을 구하면 2계 선형 미분방정식을 얻을 수 있다. 그 다음 미분방정식의 상태변수들을 아래와 같이 정의하여 정리하면 식(13)과 같은 연립 1계 선형 미분방정식으로 표현된다.

$$x_1(t) = i(t), x_2(t) = x, x_3(t) = \frac{dx}{dt} \quad (12)$$

되고, 다음과 같은 상태방정식이 얻어진다.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -L \frac{\partial L}{\partial x} x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E(t) \\ 0 \\ \frac{f(x)}{M} \end{pmatrix} \quad (13)$$

이 방정식은 미분방정식 해법 중에 Runge-Kutta 방법을 적용하여 풀면 시간에 해당하는 위치와 속도가 계산되어진다[4].

### 3. 수치해석 결과 및 검증

본 장에서는 앞서 제시한 알고리즘을 적용하여 감쇠 자유진동의 이론적인 일반해를 구해 프로그램을 검증 하였다. 그리고 해석 모델에 대하여 여러 가지 입력 값에 따라 풀린저 가동부의 변위, 속도를 구하였다. 결합한 상태미분방정식에서는 일반 해를 구할 수 없으므로 프로그램 검증을 위하여 입력전압이 없이 일반해를 구할 수 있는 파라미터 값을 넣어 비교해 보았다. 운동방정식인 식(11)의 해를 식(14)의 형태로 가정한다.

$$x(t) = C e^{st} \quad (14)$$

식에서  $C$ 와  $s$ 는 미지의 상수이다. 이 함수를 식(12)에 대입하여 특성식을 얻은 다음 두 근으로 일반해를 구하면 다음과 같다.

$$x(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} \quad (15)$$

$$= C_1 e^{\left(-\frac{B}{2m} + \sqrt{\left(\frac{B}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{B}{2m} + \sqrt{\left(\frac{B}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t}$$

여기서,  $C_1$ 과  $C_2$ 는 계의 초기 조건으로부터 결정되는 임의의 상수이다.

근  $s_1$ 과 근  $s_2$ 의 성질 즉 해의 거동은 감쇠 크기에 의존한다. 프로그램 검증을 위해 비 감쇠 진동 및 부족 감쇠, 임계감쇠, 과 감쇠에 맞는 조건들을 입력하여 그에 따른 위치변화와 속도변화를 알아보았다. 입력조건과 입력 값은 다음과 같다.[5]

비 감쇠 계	조건: $B=0$
부족 감쇠 계	조건: $\frac{B}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$
임계 감쇠 계	조건: $\frac{B}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}}$
과 감쇠 계	조건: $\frac{B}{2} > \sqrt{\frac{k}{m}}$

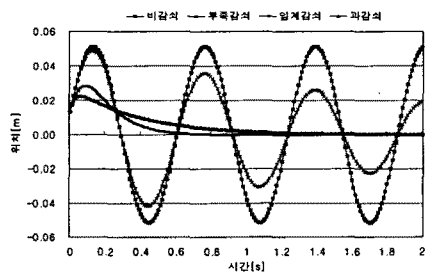


그림2 감쇠계수 조건에 따른 위치변화

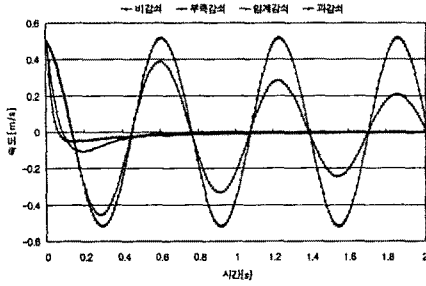


그림3 감쇠계수 조건에 따른 속도변화  
 이러한 짐중을 바탕으로 다양한 입력에 대해 결합시스템에서 파라미터들이 서로 어떤 상관관계가 있으며 동특성은 어떻게 되는지 해석해 보았다. 첫 번째 결과로 전압크기에 따른 위치변화를 알아보았다. 질량5[Kg], 스프링상수 1000[N/m], 각주파수  $\omega=15$ [rad/s]로 고정시켰다.

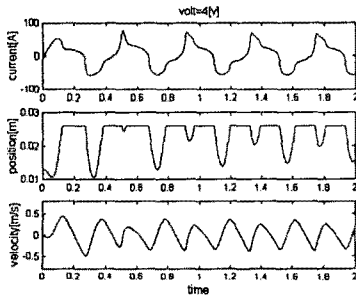


그림4  $V=4\sqrt{2}\sin(\omega t)$ 인 경우

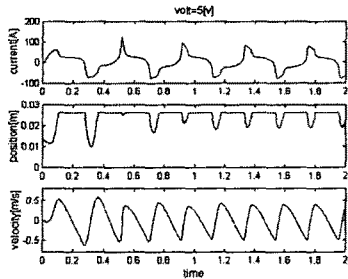


그림5  $V=5\sqrt{2}\sin(\omega t)$ 인 경우

그림4와 그림5를 비교해보면 질량과 스프링 상수가 같은 조건을 가지고 있기 때문에 위치의 주기가 같음을 볼 수 있다. 또한 전압크기가 클수록 플런저 가동부의 이동이 작음을 볼 수 있다. 여기서 더 큰 전압을 준다면 진동 없이 붙어있는 상태가 된다.

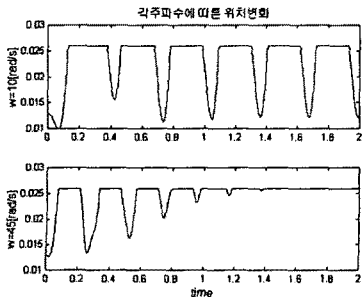


그림6 주파수 10[rad/s]와 45[rad/s]일 경우

질량 5[Kg], 스프링상수 1000[N/m],  $V=5\sqrt{2}\sin(\omega t)$ 로 고정시켜 나온 결과를 보면 주파수가 커질수록 전류가 줄어든다. 그 이유는 전압이 일정한 상태에서 주파수가 커지면 임피던스  $X_c$ 도 커지게 된다. 그러면 옴의 법칙에 의하여 전류가 줄어들게 되고 이에 따라 위치변화도 줄어들게 된다.

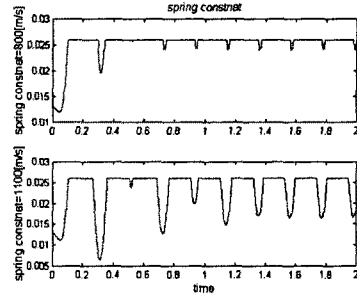


그림7 스프링상수800[N/m]와1100[N/m]일경우

스프링 상수가 커지면 각진동수  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 이 커지게 되고 따라서 위치변화도 커지게 된다. 질량에 따른 변화도 질량이 커지게 되면 각진동수는 작아지게 되고 이로 인해 위치변화도 작아지게 됨을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 논문에서는 전기회로방정식과 운동방정식을 결합하여 일정시간 동안의 도체의 위치, 속도, 전류 등의 운동 특성을 보았다. 본 알고리즘은 기존의 매 단계마다 전자력을 반복하여 계산하던 방법을 위치마다의 에너지를 구하고 이것을 이용하여 인덕턴스와 인덕턴스 미분값을 구하게 된다. 각 구간 사이의 값은 스플라인 처리를 이용하여 매 스텝마다의 전자력을 계산하던 단점을 보완하여 동특성 해석 시간이 매우 단축됨을 알 수 있다. 이러한 전자기시스템의 회로상수를 추출한 다음 전기회로방정식과 운동 방정식이 결합되어 있는 연립미분방정식을 계산하게 된다. 특히 전기적 파라미터 입력값과 기계적인 파라미터 입력값에 따른 특성을 파악함으로써 다양한 파라미터 값들의 입력을 통해 그 시스템의 동특성을 해석할 수 있다. 본 논문에서 제시한 알고리즘을 적용한다면 전기-기계시스템의 동특성 해석이 매우 빠른 시간 내에 가능해지며 이를 이용하여 보다 정밀한 특성파악과 설계에 다양하게 응용될 것으로 사료된다.

#### (참 고 문 헌)

- [1] K. Srairi and M. Feliachi, "Numerical Coupling Models for Analyzing Dynamic Behaviors of Electromagnetic Actuators", IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 34, No. 5, p. 3608-3611, September 1998.
- [2] 김영선, "유한요소법과 운동방정식의 결합에 의한 운동체의 동특성 해석", Journal of The Korean Magnetics Society, Vol.6, No.5, October 1996. 任達鎬, "전기계의 유한요소법", 동명사, pp.84-115, 1992
- [3] 이준호, "비선형 회로정수의 참조표 작성에 의한 SRM의 동작특성 해석", 박사학위 논문, 단국대학교, 1999.
- [4] Melvin J. Maron, Robert J. Lopez, "Numerical Analysis", KALA, pp.447-478, 1991.
- [5] 박노길, 박성태 "기계진동학", pp.89-161, 1994.