

부정내적공간에서의 강인칼만필터 설계

이태훈, *윤태성, 박진배

연세대학교 전기전자공학과, *창원대학교 전기공학과

전화 : 02-2123-2773 / 휴대폰 : 016-261-6968

Robust Kalman Filter Design in Indefinite inner product space

Tae Hoon Lee, *Tae Sung Yoon, Jin Bae Park

Dept. of Electrical & Electronic Eng., Yonsei University

*Dept. of Electrical Eng., Changwon National University

E-mail : hoon@control.yonsei.ac.kr

Abstract

A new robust Kalman filter is designed for the linear discrete-time system with norm-bounded parametric uncertainties. Sum quadratic constraint, which describes the uncertainties of the system, is converted into an indefinite quadratic form to be minimized in indefinite inner product space. This minimization problem is solved by the new robust Kalman filter. Since the new filter is obtained by simply modifying the conventional Kalman filter, robust filtering scheme can be more readily designed using the proposed method in comparison with the existing robust Kalman filters. A numerical example demonstrates the robustness and the improvement of the proposed filter compared with the existing filters.

I. 서론

기존에 상용화되고 있는 칼만필터는 상태추정 문제에 대한 해법의 하나로서 항법장치, 목표추적 문제, 시스템 동정화, 제어시스템 설계 등 여러 분야에 걸쳐서 지난 40여 년 동안 적용되어 왔으며 현재까지도 여러 분야의 공학자에 의해 연구 개발되고 있다. 그러나 이 기법은 플랜트(Plant)의 상태변수에 영향을 주는 프로세스 잡음(process noise)과 센서로부터 발생되는 측정잡음이 가우시안 백색잡음(Gaussian white noise)이라고 설정하여 잡음의 통계적 특성을 알고 있으며, 시스템을 나타내는 프로세스 방정식과 측정방정식에 대한 정확한 수학적 모델을 구하였다가 가정하거나, 근사한

(approximate) 모델을 얻음으로써 발생하는 오차는 잡음의 영향으로 보상할 수 있다는 전제 하에 출발한다. 그러나 이 가정들은 실제 문제의 적용에 있어서 성립하지 않는 경우가 많은데, 특히 설정한 모델이 부정확할 때, 즉 불확실성을 고려하지 않은 경우, 기존의 칼만필터의 성능은 최적이지 못할 뿐 아니라 추정오차의 발산을 나타내는 경우도 생긴다는 사실이 알려져 있다.

이러한 모델의 불확실성 중 파라미터의 불확실성을 고려한 강인칼만필터(robust Kalman filter)에 대한 연구는 최근에 활발히 진행되어 왔으며, 여러 가지 연구기법들이 등장하였다. 이 중 보편적인 접근방법은 이차 안정 추정기(quadratic stable estimator)를 이용한 대수 리카티 방정식(algebraic Riccati equation) 기반의 설계기법이다[1-5]. 이 방법은 불확실성을 스케일 파라미터(scaling parameter)로 나타내어 필터의 오차범위에 대한 상한계(upper bound)를 보장한다. 따라서 최적인 스케일 파라미터를 찾는 것이 가장 큰 관심사이며 이를 위하여 준정 프로그램(semidefinite program)방법이 이용되기도 하였다[4]. 또 하나의 방법으로는 기준값 추정(set-valued estimation)방법이 있으며, 불확실성을 에너지형태의 제한(energy type constraint) 또는 이산시간에 대한 이차합제한(sum quadratic constraints: SQC)으로 나타낸다.

위의 방법들을 이용하여 강인필터를 설계하기 위해서는 복잡한 유도과정에 의해 얻어지는 2개의 리카티방정식을 연속적으로 구해야하는 등, 대수적인 복잡함 때문에 실제 시스템 적용에는 어려움이 있는 것이 단점이다.

본 연구는 파라미터 불확실성을 가지는 이산시간 시스템에 대하여 강인칼만필터를 설계하는 새로운 기법을 제시하고자 한다. 기존의 칼만필터 문제를 부정내적공간(indefinite inner product space), 일명 크라인 공간(Krein space)으로 불리는 공간에서 해석한 필터를 크라인 공간 칼만필터라 하며, 강인필터 문제를 해결하기 위한 도구로서 본 논문에서 사용한다. 크라인 공간 칼만필터를

적용하기 위해서는 두 가지 전제조건이 필요하다. 첫째, 불확실성은 SQC에 의해서 표현되어야 하며, 둘째, SQC를 부정부호 이차비용함수(indefinite quadratic cost function)로 전환시켜야 한다. 이러한 이차함수를 얻을 수만 있다면 이를 크라인 공간에서의 최소화 문제와 연관시킬 수 있으며 이차함수의 최소점을 크라인 공간에서의 정사영(orthogonal projection) 방법을 통해서 쉽게 구할 수 있다. 여기서 정사영 방법이란 일반적인 최소제곱판정법(least square criterion)에서 실제값과 추정값 사이의 오차를 최소화하는 추정값을 구하는 방법을 말한다. 따라서 정사영을 통해 얻어지는 최적 추정값을 반복적으로 구하는 알고리듬은 기존의 칼만필터 알고리듬의 형태를 그대로 취하기 때문에 위에서 기술한 기준의 강인칼만필터의 해석 및 설계의 어려움을 극복하고 손쉽게 강인필터를 설계하고 구현할 수 있다는 것과 그 구조의 단순함 때문에 온라인(on-line) 응용에도 적합하다는 장점을 지닌다.

본 논문의 구성은 다음과 같은 순서를 가진다. 2절에서 크라인 공간에서의 선형추정 문제를 기본적인 개념과 함께 간략히 설명하고자 한다. 3절에서는 불확실성을 SQC로 표현하고 이를 다시 부정이차비용함수로 변화하는 과정을 다룬다. 4절에서 일반적인 칼만필터와 기준의 강인칼만필터에 대한 비교 모의실험을 통하여 본 논문에서 제시하는 방법이 기존 필터에 비해 보다 정확하고 안정적인 성능을 가짐을 컴퓨터 모의실험을 통하여 입증하고자 한다. 마지막 5절에서 결론과 함께 향후 연구의 방향에 대하여 언급한다.

이후의 표기법에 대해서 미리 밝히면, 크라인 공간의 원소들은 굵은체로 나타낼 것이며 힐버트 공간(Hilbert space)의 원소들은 보통체로 표기할 것이다.

II. 크라인 공간에서의 선형추정 문제

본 절에서 크라인 공간에서의 선형추정이론에 대하여 간략히 언급하고자 한다. 이론의 기본적인 개념은 다음 문장으로 요약할 수 있다. 일반적인 이차비용함수의 최소화 문제를 칼만필터 문제로 전환하는데, 이를 일반적인 힐버트 공간이 아닌 부정내적공간, 즉 크라인 공간에서 수행한다. 따라서 이차함수형태로 표현되는 많은 문제들을 크라인 공간 칼만필터와 연계시킴으로서 간단히 해결할 수 있다. 여기서 크라인 공간 칼만필터는 기존 칼만필터를 크라인 공간으로 확장시킨 것이지만 기존 칼만필터와 정확히 같은 구조와 방정식을 가진다. 크라인 공간에서의 선형추정이론과 그 응용은 [6-7]에서 자세히 살펴볼 수 있으며, 본 논문에서는 결과로서 얻어지는 크라인 공간 칼만필터 방정식만을 다루기로 한다.

복소수체(complex number field)에서 정의되는 상태공간방정식으로 표현되는 다음과 같은 시스템을 고려하자.

$$\begin{cases} x_{j+1} = F_j x_j + G_j u_j & 0 \leq j \leq N \\ y_j = H_j x_j + v_j \end{cases} \quad (1)$$

여기서 $F_j \in C^{n \times n}$, $G_j \in C^{m \times n}$, $H_j \in C^{p \times n}$ 은 주어지는

행렬이고, 초기 상태값 $x_0 \in C^n$, 시스템 외란 $u_j \in C^m$, 측정 외란 $v_j \in C^p$ 는 알 수 없는 복소벡터이다. 출력 $y_j \in C^p$ 는 모든 j 에 대해서 알고 있다고 가정한다. 이러한 시스템이 주어졌을 때, 공학응용분야에서 다음과 같은 결정적(deterministic) 최소화 문제를 해결해야하는 경우를 자주 접한다.

$$J(x_0, u, y) = x_0^* \Pi_0^{-1} x_0 + \sum_{j=0}^N [u_j^* v_j^*] \begin{bmatrix} Q_j & S_j \\ S_j^* & R_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (2)$$

즉, 주어진 y_j 에 대하여 적절한 x_0 와 u_j 로, (1)의 시스템 조건을 만족하는 (2)식을 최소화하는 문제를 말한다. 여기서 $Q_j \in C^{m \times m}$, $S_j \in C^{m \times p}$, $R_j \in C^{p \times p}$, $\Pi_0 \in C^{n \times n}$ 는 에르미트(Hermitian) 행렬이며 부정부호(indefinite) 행렬일 수 있다. 이러한 부정부호 이차형식은 크라인 공간에서 정의되는 상태방정식 모델과 연관 지을 수 있으며 이차형식의 정류점(stationary point)을 크라인 공간 칼만필터를 통해 얻을 수 있다.

일반적인 힐버트 공간에서 정사영은 항상 주어진 이차형태의 최소점이 된다. 하지만 크라인 공간에서는 정사영은 단지 정류한다고 말할 수 있다(stationarize). 이러한 정류점이 최소점이 되기 위해서는 충족해야하는 추가 조건이 따른다. 하지만 본 논문에서 언급되는 모든 정류점은 추가 조건을 만족하여 최소점이 된다는 가정을 한다.

크라인 공간에서 정의된 상태공간방정식과 이를 기반으로 전개한 칼만필터, 즉 크라인 공간 칼만필터는 다음과 같은 식으로 표현된다[6].

보조정리 1 (크라인 공간 칼만 필터)

다음은 크라인 공간 상태공간방정식이며

$$\begin{cases} x_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i \\ y_i = H_i x_i + v_i \end{cases} \quad (3)$$

학률변수 x , u , v 는 아래의 조건을 가지고 있다.

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} Q_j & S_j \\ S_j^* & R_j \end{bmatrix} \delta_{jk} \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 크라인 공간에서의 내적이며, $*$ 는 복소켤레전치(complex conjugate transpose)를 나타낸다.

측정값 $[y_0, \dots, y_{i-1}]^T$ 에 근거하여 x_i 에 대한 추정값을 \hat{x}_i 라 하고, 그래미안 행렬 $R_y = [\langle y_i, y_j \rangle]_{i,j=0:N}$ 는 강정칙행렬(strongly nonsingular matrix), 즉 모든 i 에 대해서

1) $[]^T$ 는 행렬의 전치(transpose)를 나타낸다.

정칙한 (*nonsingular*) 행렬이라 가정한다. 이 때 최소평균제곱 관점 (*least mean square sense*)에서 추정오차의 최소분산 (*minimum variance*)을 신출하는 e_i 는 다음 식들로부터 구할 수 있다.

$$e_i = y_i - H_i \hat{x}_i \quad (5)$$

$$\hat{x}_{i+1} = F_i \hat{x}_i + K_{p,i} (y_i - H_i \hat{x}_i) \quad (6)$$

$$K_{p,i} = (F_i P_i H_i^* + G_i S_i) R_{e,i}^{-1} \quad (7)$$

여기서

$$R_{e,i} = \langle e_i, e_i \rangle = R_i + H_i P_i H_i^* \quad (8)$$

이며 P_i 는 다음의 순환 리카티 방정식으로부터 구할 수 있다.

$$P_{i+1} = F_i P_i F_i^* - K_{p,i} R_{e,i} K_{p,i}^* + G_i Q_i G_i^* \quad (9)$$

위에서 그레미안 행렬이라 함은 원래는 양의 준정부호 행렬(*positive semidefinite matrix*)을 일컫지만 힐버트 공간에서의 공분산행렬과 구분하기 위해서 쓰여진 용어이다.

결국, 다음과 같이 크라인 공간 칼만필터의 중요한 용도를 서술할 수 있다. 부정부호 결정적 이차형태(*indefinite deterministic quadratic form*)가 주어졌을 때, 이를 크라인 공간 풀적 문제와 연관시켜 크라인 공간 칼만필터식을 얻을 수 있으며 이 칼만필터식들을 가지고 주어진 이차형태의 최소점을 반복적으로 구할 수 있다.

III. 강인칼만필터의 설계

본 절에서는 에너지 제한, 즉 SQC로 표현될 수 있는 불확실성을 가지는 이산시간 불확정 프로세스 모델에 대한 강인필터 문제를 다룬다. 이 문제는 앞 절에서 기술한 크라인 공간 칼만필터로부터 강인필터식을 유도함으로써 해결한다.

3.1 문제 설정

$j=0, 1, \dots, N$ 에 대하여 다음과 같은 시변(time-varying) 불확정 이산시간 시스템을 고려하자.

$$\begin{cases} x_{j+1} = F_j x_j + G_j u_j \\ y_j = H_j x_j + v_j \\ s_j = K_j x_j \end{cases} \quad (10)$$

여기서 첫 번째와 두 번째 식은 (1)식의 조건과 같고 세 번째 식의 K_j 는 주어지는 행렬이며, u_j 와 v_j 는 불확정 입력으로 보면 s_j 는 불확정 출력으로 생각할 수 있다.

\hat{x}_0 와 ϵ 은 양의 상수이며 Q_j 와 R_j 는 양의 정부호 대칭 행렬(*positive-definite symmetric matrix*)이라 하자. 불확정 입력 u 와 v , 초기 상태 x_0 를 고려했을 때 위 시스템의 불확실성은 다음과 같은 에너지 제한, 즉 SQC로 표현할 수 있다[8-9].

$$(x_0 - \hat{x}_0)^* \Pi_0^{-1} (x_0 - \hat{x}_0) + \sum_{i=0}^N (u_i^* Q_i^{-1} u_i + v_i^* R_i^{-1} v_i) \leq \epsilon + \sum_{i=0}^N \|s_i\|^2 \quad (11)$$

한편, 위의 불확정 모델에 대한 SQC는 표준 뉴유계 불확실성 (standard norm bounded uncertainty)에 대해서도 만족하는데, 이를 확인하기 위해 다음과 같은 상태방정식으로 표현되는 불확정 시스템을 고려해 보자.

$$\begin{cases} x_{j+1} = F_j x_j + G_{1j} \Delta_j K_j x_j + G_{2j} n_j \\ y_j = H_j x_j + m_j \end{cases} \quad (12)$$

여기서 $G_j = [G_{1j} \ G_{2j}]$ 는 알고있는 상수행렬이고, Δ_j 는 불확정 행렬(*uncertain matrix*)이며 $\|\Delta_j\| \leq 1$ 조건을 만족한다. $\|\cdot\|$ 는 표준 유도된 행렬 뉴(standard induced matrix norm)이다. 또한, n_j 와 m_j , 초기 상태 x_0 는 다음의 조건을 만족한다.

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ n_j \\ m_j \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ n_k \\ m_k \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} Q_j & 0 \\ 0 & R_j \end{bmatrix} \delta_{jk} \end{bmatrix} \quad (13)$$

(12)식의 불확실성이 (10)과 (11)로 표현되는 불확실성에 충족되는지는 다음 일련의 과정을 통해 알 수 있다. 우선, (12)식의 불확실성을 무시하면 주어진 뉴유계 조건 시스템을 일반적인 선형시스템으로 생각할 수 있으며 다음의 에너지 제한을 만족한다.

$$\overline{x_0}^* \Pi_0^{-1} \overline{x_0} + \sum_{j=0}^N (n_j^* Q_j^{-1} n_j + m_j^* R_j^{-1} m_j) \leq \epsilon \quad (14)$$

여기서 $\overline{x_0} = x_0 - \hat{x}_0$. (12)식에서 $\xi_j = \Delta_j K_j x_j$ 라 하면 다음 조건을 만족하므로

$$\sum_{j=0}^N \|\xi_j\|^2 \leq \sum_{j=0}^N \|s_j\|^2 \quad (15)$$

(14)식과 (15)식을 더함으로써 다음과 같은 제한을 얻는다.

$$\begin{aligned} \overline{x_0}^* \Pi_0^{-1} \overline{x_0} + \sum_{j=0}^N \begin{bmatrix} \xi_j \\ n_j \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} 2I & 0 \\ 0 & Q_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \xi_j \\ n_j \end{bmatrix} \\ \sum_{j=0}^N m_j^* R_j^{-1} m_j \leq \epsilon + \sum_{j=0}^N \|s_j\|^2 \end{aligned} \quad (16)$$

따라서 위 식의 항들을 다음과 같이 정의하면 (11)식의 SQC가 만족한다.

$$\begin{bmatrix} \xi_j \\ n_j \end{bmatrix} = u_j, \begin{bmatrix} 2I & 0 \\ 0 & Q_j \end{bmatrix} = Q_j, \\ m_j = v_j, \quad R_j = R_j.$$

결국, SQC로 표현되는 불확실성은 표준 뉴유계 불확실성까지 포함한다는 것을 알 수 있다.

2절에서 기술한 크라인 공간 칼만필터를 불확정 시스템에 적용하기 위하여 (11)식으로부터 다음과 같은 부정부호 이차형태를 정의한다.

$$J(x_0, u, y) = \overline{x}_0^* \Pi_0^{-1} \overline{x}_0 + \sum_{j=0}^N (u_j^* Q_j^{-1} u_j + v_j^* R_j^{-1} v_j - \|s_j\|^2) \leq \epsilon \quad (17)$$

(17)식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$J(x_0, u, y) = \overline{x}_0^* \Pi_0^{-1} \overline{x}_0 + \sum_{j=0}^N u_j^* Q_j^{-1} u_j + \sum_{j=0}^N (y_j^* - [H_j] x_j)^* \overline{R}_j ([y_j] - [H_j] x_j) \leq \epsilon \quad (18)$$

위 식에서 $\overline{R}_j = \begin{bmatrix} R_j & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ 가 부정부호를 가지므로 이차형태가 부정부호가 되며 따라서 크라인 공간 해석이 필요함을 알 수 있다. 또한, 불확정 출력에 관한 항이 이차형태에 포함되어 있는 것을 볼 수 있다.

따라서 상한계를 가지는 이차형태 (18)식의 최소점을 찾는 것이 목적으로 설정할 수 있으며 다음과 같이 풀어서 정의 내릴 수 있다.

(11)식의 SQC를 가지는 불확정 시스템이 (10)식과 같이 주어졌을 때, 결정적 강인칼만필터 문제는 (18)식의 부정이차형태를 최소화하는 상태추정을 찾는 것이다.

3.2 크라인 공간에서의 강인칼만필터

2절에서 언급한 바와 같이, 부정부호 이차형태가 주어졌을 때 이를 칼만필터식을 유도할 수 있는 크라인 공간 문제로 바꿀 수 있으므로, (18)식과 같은 부정부호 이차형태에 따른 크라인 공간 상태공간모델을 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x}_{i+1} = F_i x_i + G_i u_i \\ \dot{y}_i = [H_i] x_i + v_i \\ \dot{0} \end{cases} \quad (19)$$

또한 다음의 조건을 가진다.

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_0 \\ u_j \\ v_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} \right\rangle = \begin{bmatrix} \Pi_0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_j \delta_{jk} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} R_j & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \delta_{jk} \end{bmatrix} \quad (20)$$

상태공간방정식 (19)와 조건 (20)을 보조정리 1과 비교하면, 아래와 같이 크라인 공간 칼만필터를 강인필터로 각색한 식을 쉽게 유도해낼 수 있다.

정리 1 (강인 크라인 공간 칼만필터)

(19)와 같은 크라인 공간 상태공간방정식이 조건 (20)과 같이 주어졌을 때, 부정부호 이차형태 (18)을 최소화하는 상태변수의 주정값은 다음 식에 의해서 반복적으로 구할 수 있다.

$$\hat{x}_{i+1|i} = F_i \hat{x}_{i|i-1} + L_i \begin{bmatrix} y_i - H_i \hat{x}_{i|i-1} \\ -K_i \hat{x}_{i|i-1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$L_i = F_i P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i \\ K_i \end{bmatrix}^* R_{e,i}^{-1} \quad (22)$$

$$R_{e,i} = \left(\begin{bmatrix} H_i \\ K_i \end{bmatrix} P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i \\ K_i \end{bmatrix}^* + \begin{bmatrix} R_j & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \right) \quad (23)$$

위 식의 P_i 는 순환 리카티 방정식에 의하여 구할 수 있으며

$$P_{i+1|i} = F_i P_{i|i-1} F_i^* + G_i Q_i G_i^* \quad (24)$$

여기서 $P_{i|i}$ 는 다음을 만족한다.

$$P_{i|i} = \left(I - P_{i|i-1} \begin{bmatrix} H_i \\ K_i \end{bmatrix}^* R_{e,i}^{-1} \begin{bmatrix} H_i \\ K_i \end{bmatrix} \right) P_{i|i-1} \quad (25)$$

강인 칼만필터식은 일반적인 칼만필터식과 정확히 같은 구조를 가지고 있으며, 다만 일반 칼만필터식의 H_i 는 $[H_i \ K_i]^T$ 로, R_i 는 $\begin{bmatrix} R_j & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$ 로 각각 대치되었음이 다를 뿐이다.

IV. 모의실험

제안된 필터의 성능을 평가하기 위하여 다음과 같은 불확정 시스템 모델을 가정한다. 아래의 모델은 강인칼만필터의 성능을 평가하는 벤치마크(benchmark) 모델로서 이미 여러 논문에서 사용된 모델이다[1-2, 4-5].

$$\begin{aligned} x_{j+1} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.5 \\ 1 & 1+\delta \end{bmatrix} x_j + \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} u_j \\ y_j &= [-100 \ 10] x_j + v_j \end{aligned}$$

여기서 외부잡음은 평균이 0이고 분산이 1인 백색잡음이라 가정하며, 파라미터 불확실성을 나타내는 δ 는 $\|\delta\| \leq 0.3$ 을 만족한다. 또한, 추정하려는 값은 첫 번째 상태변수의 값이다. 즉, 추정하려는 값을 z 라 하면, $z_k = [1 \ 0] x_k$ 을 만족한다.

(12)식의 시스템과 주어진 예제 모델을 일치시키려면, 불확실성을 나타내는 행렬들을 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad E = 0, \quad K = [0 \ 0.03]$$

모의실험을 두 가지 측면에서 관찰할 수 있는데, 하나는 필터 응답의 시작부터 수렴하기까지의 과정, 즉 초기 과도응답(transient

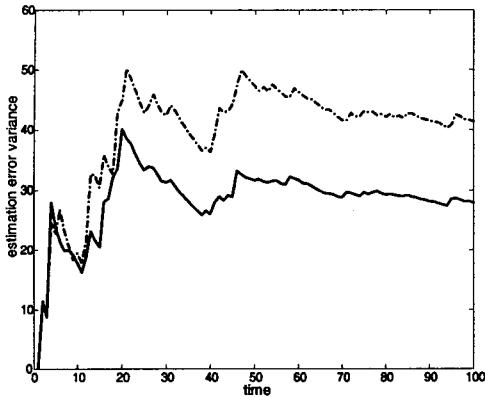


그림 1 $\delta=0$ 일 때 추정오차분산비교(— 칼만필터, -- 강인칼만필터)

response)을 관찰하는 것이며, 또 하나는 정상상태(steady state)에 도달한 이후의 응답을 관찰하는 것이다.

4.1 과도응답 실험

그림 1, 그림 2는 첫 번째 관찰을 위한 것으로서, 일반적인 칼만필터와 본 논문에서 제안하는 크라인 공간 강인칼만필터의 과도응답을 비교한다.

그림 1에서는 불확실성이 존재하지 않을 때, 즉 $\delta=0$ 일 때의 추정오차분산의 변화를 나타내었다. 불확실성이 없을 때는 일반 칼만필터가 제안한 강인칼만필터보다 좋은 성능을 나타낼 수 있다. 하지만 그림 2에서 불확실성이 존재할 때는 일반 칼만필터가 그림 1에서의 값보다 상대적으로 매우 큰 오차분산값을 가짐에 반해 제안된 필터는 작은 값의 오차를 가진다. 결과를 통해, 강인필터는 불확실성에 대하여 강인함(robustness)을 보이는 것이지 일반 필터보다 항상 좋은 성능을 가지는 것은 아니라는 것을 확인할 수 있다.

4.2 정상상태응답 실험

두 번째 관찰, 즉 정상상태응답을 살펴보기 위하여 추정오차 분산이 정상상태에 도달할 때까지 제안된 필터를 가지고 충분한 연산을 행하였으며, 그 결과로서 얻어지는 필터이득은 다음과 같다.

$$L = \begin{bmatrix} -0.0068 & 2.3008 \\ 0.0049 & -5.0617 \end{bmatrix}$$

위의 필터이득을 가지고 기존의 일반적인 칼만필터와 Xie[1]의 강인칼만필터와의 정상상태응답을 비교하였으며 표 1에 그 결과를 나타내었다. 각 필터에 대하여 파라미터 불확실성값 δ 가 최대, 최소일 때와 불확실성이 없을 때, 즉 $\delta=0$ 일 때의 평균제곱 추정 오차값 (mean-squared estimation error)을 명시했다. 표 1에서 불

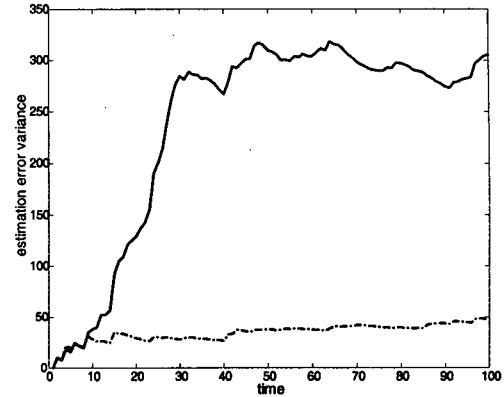


그림 2 $\delta=1$ 일 때 추정오차분산비교(— 칼만필터, -- 강인칼만필터)

수 있듯이 제안된 필터는 파라미터 불확실성에 대하여 강인성을 보이고 있으며 일반적인 칼만필터는 물론, Xie의 강인칼만필터보다 보다 나은 성능을 가짐을 알 수 있다.

V. 결론

본 논문에는 파라미터 불확실성을 가지는 선형 시스템에 대한 강인칼만필터를 설계하기 위하여 새로운 개념인 크라인 공간 해석법을 이용하였다. 기존의 크라인 공간 칼만필터를 강인필터문제에 접목하여 확장하였으며, 이 때 강인필터문제는 SQC로 표현되는 부정부호 이차형태의 최소화 문제로 변환될 수 있어야 한다. 제안된 강인칼만필터는, 불확실성을 포함하는 항을 삽입한다면, 일반 칼만필터의 단순한 구조를 그대로 사용할 수 있다. 따라서 이러한 간단한 구조 특성을 가지는 본 논문의 강인칼만필터가 기존의 복잡한 구조를 가지는 강인칼만필터에 비해 설계가 용이하며 온라인 응용분야에 보다 적합하다는 것을 장점으로 들 수 있다.

향후의 연구과제로서, 2절에서 언급한 바와 같이 정류점이 최소점이 되기 위한 조건을 크라인 공간 강인필터문제에서 해석하고 구하는 과정이 필요하다. 또한 본 논문에서 전개한 이론을 비선형 시스템에 적용하여 확장강인칼만필터(extended robust Kalman filter)에 관한 식을 크라인 공간에서 유도하는 연구 또한 좋은 결과를 기대할 수 있는 과제로 꼽을 수 있다.

표 5 각 필터의 정상상태 성능비교

필터	$\delta=-0.3$	$\delta=0$	$\delta=0.3$
칼만필터	535.1	36.0	8795.6
Xie의 강인칼만필터	62.3	62.5	62.1
크라인 공간 강인칼만필터	52.3	50.7	54.3

참고문헌

- [1] L. Xie, C. Soh and C. E. de Souza, "Robust Kalman Filtering for Uncertain Discrete-Time Systems," IEEE Trans. Automatic Control, vol. 39 no. 6, pp. 1310-1314, 1994.
- [2] Y. Theodor and U. Shaked, "Robust Discrete-Time Minimum-Variance Filtering," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 44 no. 2, pp. 181-189, 1996.
- [3] I. R. Petersen and D. C. McFarlane "Optimal guaranteed cost filtering for uncertain discrete-time linear systems," Int. J. of Robust Nonlinear Contr., vol. 6, pp. 267-280, 1996.
- [4] M. Fu, C. E. de Souza and Z. Q. Luo, "Finite Horizon Robust Kalman Filter Design," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 49 no. 9, pp. 2103-2112, 2001.
- [5] X. Zhu, Y. C. Soh and L. Xie, "Design and analysis of discrete-time robust Kalman filters," Automatica, vol. 38, pp. 1069-1077, 2002.
- [6] B. Hassibi, A.H.Sayed and T. Kailath, "Linear estimation in Krein space-Part I: Theory", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 41, pp.18-33, 1996.
- [7] B. Hassibi, A.H.Sayed and T. Kailath, "Linear estimation in Krein space-Part II: Applications", IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 41, pp.34-49, 1996.
- [8] D.P. Bertsekas and LB. Rhodes, "Recursive state estimation for set-membership description of uncertainty", IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. 16 No. 2, pp. 117-128, 1971.
- [9] A. V. Savkin, I. R. Peterson, "Robust state estimation and model validation for discrete-time uncertain systems with a deterministic description of noise and uncertainty," Automatica, vol. 34 no. 2, pp. 271-274, 1998.