

# 이차 이산 시스템에서 영점의 위치의 영향을 이용한 임의의 정상상태 응답을 위한 이산 보상기의 설계

이재석, 정태상  
중앙대학교 전자전기공학부  
전화 : 02-825-1644 / 핸드폰 : 017-354-1855

## Design of the Discrete Compensator for Arbitrary Steady-State Response Using the Effects of Zero Location in Second-Order Discrete Systems

Jae Seok Lee, Tae-Sang Chung  
School of Electrical and Electronics Engineering, Chung-Ang University  
E-mail : icarus@piano.cie.cau.ac.kr

### Abstract

The damping ratio  $\zeta$  of the unit-step response of a second-order discrete system is a function of only the location of the closed-loop poles and is not directly related to the location of the system zero. However, the peak overshoot of the response is the function of both the damping ratio  $\zeta$  and an angle  $\alpha$ , which is the phasor angle of the damped sinusoidal response and is determined by the relative location of the zero with respect to the closed-loop poles. Accordingly, when the closed-loop system poles are fixed, the peak overshoot is considered as a function of the angle  $\alpha$  or the system zero location. In this paper the effects of the relative location of the zero on the system performance of a second-order discrete system is studied, and a design method of digital compensator which achieves arbitrary

steady-state response with minimum peak overshoot while maintaining the desired system mode and the damping ratio of the unit step response is presented.

### I. 서 론

이차 이산 시스템(second-order discrete system)의 시간영역에서의 성능은 일반적으로 단위계단 함수(unit-step function)를 인가했을 때의 응답특성으로 규정할 수 있다. 단위계단 입력에 대한 시스템의 응답특성으로는 최대 오버슈트(peak overshoot), 정상상태 응답(steady-state response), 정착시간(settling time), 상승시간(rise time) 등이 정의된다.

이 논문에서는 이차 이산 시스템의 성능에 미치는 영점의 영향을 연구하여, 단위계단 입력에 대한 응답의 감쇠비와 정착시간을 제어 성능에서 요구하는 값으로 유지하면서도, 임의의 원하는 정상상태 응답치를 얻는 동시에 추가적으로 응답의 최대 오버슈트를 최소

화하는 보상기를 설계하는 방법을 제안한다.

## II. 이차 이산 시스템의 특성

### 2.1 이차 이산 시스템의 단위계단 응답

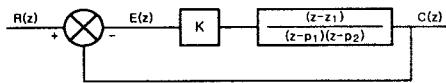


그림 1. 전형적인 이차 이산 시스템

그림 1과 같이 일반적으로 서로 다른 두 개의 실수 극점  $p_1, p_2$ 와 한 개의 실수 영점  $z_1$ 을 가지며 전향이 등을  $K$ 로 할 때, 단위 피드백(feedback)을 취하여 폐루프 제어시스템이 구성되며, 이 때의 전달함수는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{R(z)} &= \frac{G(z)}{1+G(z)} \\ &= \frac{K(z-z_1)}{(z-p_1)(z-p_2)+K(z-z_1)} \\ &= \frac{K(z-z_1)}{z^2-(p_1+p_2-K)z+(p_1p_2-Kz_1)} \end{aligned} \quad (1)$$

이 시스템이 감쇠 정현파 응답(damped sinusoidal response)을 하도록 제어기가 설계되려면, 폐루프 극점이 단위원 안에서 두 개의 공액복소수를 갖게 되는 경우이다. 이 경우 공액복소수 극점을  $p/\pm\phi$ 로 표시하면 (1)의 이차 폐루프 이산 시스템은 다음과의 식으로 주어진다( $p$ 는 폐루프 공액복소수 극점의 크기,  $\phi$ 는 위상각).

$$\begin{aligned} \frac{C(z)}{R(z)} &= \frac{K(z-z_1)}{(z-pe^{j\phi})(z-pe^{-j\phi})} \\ &= \frac{K(z-z_1)}{z^2-2pz\cos\phi+p^2} \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)의 이차 이산 시스템에 단위계단 함수를 인가하였을 때, 단위계단 응답은  $z$  영역에서 다음과 같다.

$$C(z) = \frac{z}{z-1} \frac{K(z-z_1)}{(z-pe^{j\phi})(z-pe^{-j\phi})} \quad (3)$$

식 (3)의 우변을 부분분수로 분할하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$C(z) = c_s \left\{ \frac{z}{z-1} - \left( \frac{Be^{j\alpha}z}{z-pe^{j\phi}} + \frac{Be^{-j\alpha}z}{z-pe^{-j\phi}} \right) \right\} \quad (4)$$

여기서  $c_s$ 는 시스템이 안정되어 있을 때, 즉 폐루프 극점이 단위원 안에 있을 때의 정상상태의 응답치로서 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} c_s &= [(1-z^{-1})C(z)] \Big|_{z=1} \\ &= \frac{K(1-z_1)}{(1-pe^{j\phi})(1-pe^{-j\phi})} \\ &= \frac{K(1-z_1)}{1-2p\cos\phi+p^2} \end{aligned} \quad (5)$$

또한 (4)의 상수  $Be^{j\alpha}$ 는 다음처럼 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} Be^{j\alpha} &= -\frac{1}{c_s} \left[ \frac{C(z)}{z} (z-pe^{j\phi}) \right] \Big|_{z=pe^{j\phi}} \\ &= \frac{(1-pe^{-j\phi})(pe^{j\phi}-z_1)}{(1-z_1)(pe^{j\phi}-pe^{-j\phi})} \end{aligned} \quad (6)$$

식 (6)의 양변으로부터 아래의 두 관계를 유도한다.

$$\begin{aligned} a &= \arg(1-pe^{-j\phi}) + \arg(pe^{j\phi}-z_1) \\ &\quad - \arg(1-z_1) - \arg(pe^{j\phi}-pe^{-j\phi}) \\ &= \text{atan2}(p\sin\phi, 1-p\cos\phi) \\ &\quad + \text{atan2}(p\sin\phi, p\cos\phi-z_1) \\ &= \text{atan2}(0, 1-z_1) - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$2B = 2 \frac{|1-pe^{-j\phi}| |pe^{j\phi}-z_1|}{|1-z_1| |pe^{j\phi}-pe^{-j\phi}|} \quad (8)$$

이제 단위계단 응답은 극점이 단위원 안에 있어서 시스템이 안정된 경우, (4)의 역  $z$ -변환으로 다음과 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} c(k) &= c_s \{ 1 - [Be^{j\alpha}(pe^{j\phi})^k + Be^{-j\alpha}(pe^{-j\phi})^k] \} \\ &= c_s \{ 1 - 2Bp^k \cos(k\phi + a) \} \\ &= c_s \left\{ 1 - \frac{p^k}{\cos\alpha} \cos(k\phi + a) \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

식 (9)에서 나타난 것과 같이 각  $\alpha$ 는 감쇠 정현파의 위상이 됨을 알 수 있고, 더구나  $\cos\alpha$ 항이 분모에 있는 관계로 최대 오버슈트에 영향을 끼침을 알 수 있다. 폐루프 극점의 위치가 고정된 경우( $p$ 와  $\phi$ 고정)는, (7)로 계산되어지는 위상각  $\alpha$ 를 알면 (9)와 같이 이차 이산 시스템의 단위계단 응답  $c(k)$ 를 구할 수 있는데, 여기서 위상각  $\alpha$ 는 영점의 위치  $z_1$ 의 함수이다[1, 4].

### 2.2 이차 이산 단위계단 응답의 포락선

식 (9)로 주어지는 이차 이산 시스템의 이산 응답의 모든 점들을 지나는 포락선 곡선은 이차 연속 시스템의 응답을 고려하여 다음과 같이 설정할 수 있다.

$$\begin{aligned} c(k) &= c_s \left\{ 1 - \frac{p^k}{\cos\alpha} \cos(k\phi + a) \right\} \\ &= c_s \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta w_n t}}{\cos\alpha} \cos(w_n \sqrt{1-\zeta^2} t + a) \right\} \Big|_{t=kT} \\ &= c_s \left\{ 1 - \frac{e^{-\zeta w_n kT}}{\cos\alpha} \cos(w_n kT \sqrt{1-\zeta^2} + a) \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $w_n$ 은 자유진동각 주기,  $\zeta$ 는 감쇠비, 그리고

$T$ 는 이산 시스템의 샘플링 주기이고 감쇠비  $\zeta$ 는 다음과 같이 폐루프 극점의 크기  $p$ 와 위상각  $\phi$ 로 표현된다[4].

$$\zeta = \frac{-\ln p}{\sqrt{\phi^2 + (\ln p)^2}} \quad (11)$$

감쇠비  $\zeta$ 는 오직 폐루프 극점  $p/\phi$ 만의 함수이며, 폐루프 극점의 위치 형성에 관계되는 영점의 위치와는 직접적인 관계가 없음을 알 수 있다.

### 2.3 연속 포락선 곡선의 최대 오버슈트

이산 응답  $c(k)$ 의 모든 점을 지나는 연속적인 포락선의 최대 오버슈트를 주는 시간 인덱스  $k$ 는, (10)에서  $k$ 를 연속 변수로 간주하고  $k$ 에 대하여 미분함으로써 구할 수 있으며 최대 오버슈트는 첫 번째 극대점  $k_p$ 에서 일어나며 그 값은 다음과 같다[4].

$$\begin{aligned} k_p &= \frac{1}{\phi}(\pi - \alpha - \theta) \\ &= \frac{1}{\phi}[\pi - \alpha - \text{atan}2(\zeta, \sqrt{1-\zeta^2})] \end{aligned} \quad (12)$$

최대 오버슈트 값은 (10)으로부터 아래와 같이 표현되고,

$$\begin{aligned} c_p &= c(k_p) = c_{ss} \left\{ 1 - \frac{p^{k_p}}{\cos \alpha} \cos(k_p \phi + \alpha) \right\} \\ &= c_{ss} \left\{ 1 + \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\cos \alpha} e^{-\frac{k_p}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi - \alpha - \text{atan}2(\zeta, \sqrt{1-\zeta^2}))} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

최대 오버슈트의 정상상태 값에 대한 퍼센트 비는 아래와 같이 된다:

$$\begin{aligned} POS &= \frac{c(k_p) - c_{ss}}{c_{ss}} \times 100\% \\ &= -\frac{p^{k_p}}{\cos \alpha} \cos(k_p \phi + \alpha) \times 100\% \\ &= \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\cos \alpha} e^{-\frac{k_p}{\sqrt{1-\zeta^2}}(\pi - \alpha - \text{atan}2(\zeta, \sqrt{1-\zeta^2}))} \times 100\% \end{aligned} \quad (14)$$

식 (13)과 (14)로 각각 주어지는 최대 오버슈트와 퍼센트 최대 오버슈트는 감쇠비  $\zeta$ 와 각  $\alpha$ 의 함수로 유일하게 결정된다. 여기서 감쇠비  $\zeta$ 는 (11)에 주어진 것과 같이 폐루프 극점의 위치에 의해서만 좌우되고, 각  $\alpha$ 는 폐루프 극점에 대한 영점의 상대적 위치에 의해서만 결정된다. 따라서 주어진 제어의 목표 등에 의하여 시스템의 폐루프 극점이 먼저 결정된다면, 시스템의 응답의 최대 오버슈트는, 설정된 폐루프 극점의 위치를 고정하는 조건으로(감쇠비  $\zeta$  고정) 개루프 극점과 영점의 상대적 위치 이동으로(즉 각  $\alpha$ 의 변경) 변화됨을 알 수 있다.

이러한 관찰을 이용하여 이 논문에서는 이미 설계된

이산 제어기에, 임의의 정상상태 응답을 얻으며 동시에 최대 오버슈트가 최소화되게 하는 보상기를 추가하는 방법을 제안하고자 한다. 이를 위하여 먼저 이차 이산 시스템의 개루프 극점, 영점, 그리고 전향이득의 상대적 변화에 따른 폐루프 극점의 위치 이동, 즉 근궤적 곡선을 구하고, 그 폐루프 근궤적과 상수 감쇠비  $\zeta$  궤적과의 교점을 수치해석적으로 구한다[4].

### III. 임의의 정상상태 응답을 위한 보상기

#### 3.1 최대 오버슈트를 최소화하는 $\alpha$ 각과 영점의 결정

폐루프 시스템의 극점이 고정되어 있다면 각  $\alpha$ 는 유일하게 시스템의 영점만의 함수가 된다. 즉 영점의 위치가 실수 축을 따라 변한다면(물론 폐루프 시스템의 극점  $p/\phi$ 의 고정을 위하여 개루프 극점의 위치와 전향이득도 따라서 변하여야 함), 각  $\alpha$ 는 (7)에 따라 변하게 되며 결과적으로 최대 오버슈트도 변할 것이다. 최대 오버슈트를 나타내는 (14)에서, 감쇠비  $\zeta$ 를 상수로 간주하고  $\alpha$ 에 대하여 미분하여 이 미분식을 0으로 하는 각  $\alpha$ 의 값을 구하면 다음과 같다.

$$\alpha_m = \text{atan}2(-\zeta, \sqrt{1-\zeta^2}) = -\text{atan}2(\zeta, \sqrt{1-\zeta^2}) \quad (15)$$

식 (15)의 각  $\alpha = \alpha_m$ 을 (14)에 대입하면, 최소가 되는 최대 오버슈트의 값은 다음과 같이 주어진다.

$$POS_m = POS(\alpha = \alpha_m) = e^{-\frac{k_p}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (16)$$

고정된 폐루프 극점  $p/\phi$ 에 대하여 위상각이 (15)의  $\alpha_m$ 으로 주어지도록 하는 영점을  $z_{1m}$ 으로 하고 이를 구하면 다음과 같다[4].

$$z_{1m} = \frac{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} + \frac{y_p}{1-x_p}\right)y_p}{1 - \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \frac{y_p}{1-x_p}} + x_p \quad (17)$$

#### 3.2 임의의 정상상태 응답을 위한 이산 보상기 설계

정해진 폐루프 극점의 위치를 변경하지 않을 경우의 최대 오버슈트를 최소화하기 위한 위상각  $\alpha_m$ 과 새로운 영점  $z_{1m}$ 의 값은 (15)와 (17)로 각각 주어진다. 개루프의 영점이 바로 폐루프의 영점이 되므로,  $z_{1m}$ 이 시스템의 영점이 되도록 하기 위하여는 보상기를 삽입하여 기존의 영점의 항을 소거하고 새로운 영점을 삽입

하여야 한다. 또한 영점이 변하면서도 폐루프 극점의 위치를 고정하려면 영점의 변경에 따른 개루프 극점과 전향이득을 상대적으로 조정하여야 한다. 따라서 이 논문에서 설계하고자 하는 이산 보상기(discrete compensator)의 형태는 아래와 같다.

$$D_m(z) = \frac{K_m(z-z_{1m})}{(z-p_{1m})(z-p_{2m})} \frac{(z-p_1)(z-p_2)}{K(z-z_1)} \quad (18)$$

이 때 최종 개루프 전달함수는 다음과 같이 된다.

$$G_m(z) = D_m(z) G(z) = \frac{K_m(z-z_{1m})}{(z-p_{1m})(z-p_{2m})} \quad (19)$$

여기서  $p_{1m}$ 과  $p_{2m}$ 은 새로운 시스템의 개루프 극점인데, 새로운 균제적이 원래의 극점  $p/\pm\phi = x_p \pm jy_p$ 을 지나도록 결정되어야 하고, 상용하는 전향이득  $K_m$ 도 결정하여야 한다. 이 때 원주상의 극점을 직교좌표로 표현할 경우  $K$ 값은 아래와 같이  $x$ 좌표의 선형식으로 표현할 수 있음이 밝혀졌다[4]:

$$K = p_1 + p_2 - 2x_p \quad (20)$$

식 (18)로 보상된 개루프 시스템의 균제적이 고정된 폐루프 극점을 지나야 하므로 균제적인 원의 방정식으로부터 다음의 관계가 성립한다.

$$(x_p - z_{1m})^2 + y_p^2 = (p_{1m} - z_{1m})(p_{2m} - z_{1m}) \quad (21)$$

보상된 시스템의 임의의 얻고자 하는 정상상태 응답은 (5)로부터 다음과 같이 표현된다.

$$c_{ssm} = \frac{K_m(1-z_{1m})}{1-2p\cos\phi+p^2} \quad (22)$$

식 (5)와 (22)로부터,

$$K_m = K \frac{1-z_1}{1-z_{1m}} \frac{c_{ssm}}{c_{ss}} \quad (23)$$

식 (20)을 이용하여 두 시스템의 이득  $K$ ,  $K_m$ , 을 (23)에 대입하면,

$$p_{1m} + p_{2m} = (p_1 + p_2 - 2x_p) \frac{1-z_1}{10z_{1m}} \frac{c_{ssm}}{c_{ss}} + 2x_p = B \quad (24)$$

식 (24)를 (21)에 대입하면,

$$p_{1m}p_{2m} = (x_p^2 - 2z_{1m}x_p + y_p^2) + Bz_{1m} = C \quad (25)$$

그러므로,

$$p_{1m}, p_{2m} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4C}}{2} \quad (26)$$

시스템의 응답 모드, 감쇠비를 그대로 유지하면서, 원하는 임의의 정상상태의 응답  $c_{ssm}$ 을 얻으며 최대 오버슈트를 최소화 할 수 있는 보상기는 (18)과 같이 주어진다. 여기서 새로운 영점은 (17)로, 새로운 개루

프 극점은 (26)으로, 그리고 전향이득은 (26)으로 얻어진 값을 (20)에 대입하여 구하여 진다.

### 3.3 이산 보상기 설계 예

다음과 같은 이차 개루프 시스템을 통해 이 논문에서 제안한 임의의 정상상태 응답을 얻으면서 최대 오버슈트를 최소화하는 보상기를 설계하여 보자.

$$G(z) = \frac{K(z-0.1)}{(z-0.6)(z-0.8)} \quad (27)$$

감쇠비  $\zeta=0.3$ 의 균제과 균제적 곡선의 교점, 즉 폐루프 극점은 다음과 같다.

$$p/\phi = 0.553259 / \pm 107.84 \quad (28)$$

$$x_p \pm jy_p = -0.169524 \pm j0.526647 \quad (29)$$

극점이 (29)로 주어지는 좌표에 고정되기 위한 전향이득은 (20)으로부터 구해진다.

$$K = 0.6 + 0.8 - 2 \cdot (-0.169524) = 1.739048 \quad (30)$$

식 (28)에 나타난 것과 같이 폐루프 극점이 단위원 안에 있으므로 시스템은 안정되고, 따라서 단위계단 입력에 대한 정상상태의 응답은 (5)로 주어진다.

$$c_{ss} = \frac{K(1-z_1)}{1-2p\cos\phi+p^2} = 0.951372 \quad (31)$$

위상각  $\alpha$ 는 (7)로부터 구한다.

$$\alpha = 51.34 \quad (32)$$

식 (12)으로부터 최대 오버슈트가 나타나는 시간  $k_p$ 는 1.031107이 되고 이 때의 퍼센트 최대 오버슈트는 (14)로부터 82.95% 가 됨을 알 수 있다.

어떤 필요에 의해, 주어진 시스템의 정상상태 응답치  $c_{ssm}=1.200000$ 로 조정하고자 한다고 하자. 주어진 조건을 만족하는 시스템의 개루프 극점  $p_{1m}$ 과  $p_{2m}$ 은 (24), (25)를 계산하여 그 결과를 (26)에 대입하여 계산하면 각각  $-0.373859$ 와  $1.239492$ 가 된다. 또한 보상된 시스템의 전향이득은 (20)에 의하여 계산하면 다음과 같다.

$$K_m = 1.204682 \quad (33)$$

동시에 최소의 POS를 만들어내는 위상각  $\alpha_m$ 과 그 때의 영점  $z_{1m}$ 은 각각 (15)와 (17)로부터 구해진다.

$$\alpha_m = -17.457603 \quad (34)$$

$$z_{1m} = -0.638750 \quad (35)$$

기존의 영점과 극점을 소거하고 새로운 영점과 극점을 도입하는 이산 보상기는 다음과 같이 표현된다.

$$D_m(z) = \frac{1.204682(z+0.638750)}{(z+0.373859)(z-1.239492)} \times \frac{(z-0.6)(z-0.8)}{1.739048(z-0.1)} \quad (36)$$

그리고 이 때의 개루프 전달함수는 다음과 같이 된다.

$$G_m(z) = D_m(z) G(z) = \frac{1.204682(z+0.638750)}{(z+0.373859)(z-1.239492)} \quad (37)$$

보상된 시스템의 최대 오버슈트는 (12)로부터  $k_{p_m} = 1.669092$  일 때이며 이때의 최대 오버슈트는 (14)로부터 37.23%가 되어 원래의 82.95%에서 현격히 줄어 든 것을 알 수 있다.

그림 2에 나타난 두 개의 원 중, 왼쪽의 원은 보상된 시스템의 균제적의 일부이다. 보상시스템의 균제적 중의 원은 중심이  $(z_{1m}, 0)$ , 즉  $(-0.638750, 0)$ 이다. 두 시스템의 균제적 곡선은 그림에 나타난 것과 같이 모두 폐루프 극점 ( $-0.169524 \pm j0.526647$ )을 지난다.

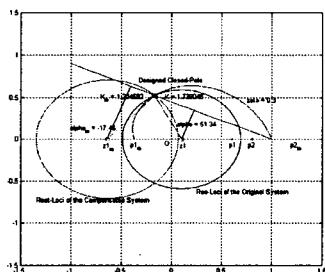


그림 2. 원시스템과 보상된 시스템의 균제적과 상수  $\zeta$  궤적. 왼쪽의 원이 보상된 시스템의 균제적.

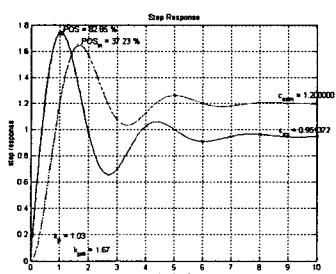


그림 3. 원시스템과 보상된 시스템의 계단 응답

그림 3에서는 새로운 시스템의 정상상태 응답이 원하는 대로 1.200000임을 볼 수 있으며, 더불어 새로운 시스템의 최대 오버슈트는 82.95%에서 37.23%로 현저히 감소하였음을 볼 수 있다. 즉 새로운 시스템은 주어진 정상상태 응답을 만족하면서 동시에 최대 오버슈트가 최소화되었다. 두 시스템의 폐루프 극점이 같으므로 감쇠비도 같으며, 감쇠 정현파의 진동 주기도 같음을 알 수 있다. 그러나 위상각  $\alpha$ 의 변화로 인한 두 시스템의 응답의 위상이 변화하였음을 알 수 있다. 이 위상의 변화가 보상된 시스템의 최대 오버슈트를 최소화한다. 그러나 이로 인하여 응답의 상승시간이 증가하는 문제점도 관찰됨을 알 수 있다.

#### IV. 결 론

이 논문에서는 이차 이산 시스템의 성능에 미치는 영점의 영향을 연구하고 이를 이용하여 개루프 영점과 극점이 주어지고 감쇠비  $\zeta$ 도 주어졌을 때, 정상상태 응답을 임의의 원하는 값으로 만족시켜 주는 동시에 그것의 최대 오버슈트를 가장 작게 만드는 보상기를 설계하는 방법을 제안하였다.

원래의 주어진 시스템의 설정된 폐루프 극점을 지나게 하는 보상된 시스템은 무수히 많다. 따라서 이러한 사실은 보다 효율적인 시스템 성능을 얻기 위해 다른 조건을 적용하여 최적의 보상시스템을 구할 수 있음을 보여 준다. 그러므로 추가의 연구가 요구된다.

#### 참 고 문 헌

- [1] Benjamin C. Kuo, Digital Control Systems, 2nd ed., Saunders College Publishing, New York, 1992.
- [2] Benjamin C. Kuo, Automatic Control Systems, 7th ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1995.
- [3] Katsuhiko Ogata, Discrete-Time Control Systems, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1987.
- [4] T. S. Chung, Digital Control Lecture Notes, 1999.
- [5] Laurene V. Fausett, Applied Numerical Analysis Using MATLAB, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1999.
- [6] Shoichiro Nakamura, Numerical Analysis and Graphic Visualization with MATLAB, Prentice-Hall, Upper Saddle River, N.J., 1996.