

무한차원최적화의 추진기에의 응용과 그의 수학적유일성고찰

장택수* · 홍사영*

*한국해양연구원 해양개발시스템안전연구소

Application of the Infinite Dimensional Optimization to Marine Propellers and Its Mathematical Uniqueness

TAEK S. JANG* AND SA Y. HONG*

*Korea Research Institute of Ships and Ocean Engineering, Jang-dong 171, Youseung-ku, Deajeon 305-343, Korea

KEY WORDS: infinite dimensional optimization무한차원최적화, Hilbert space theory힐버트공간이론, mathematical uniqueness 수학적유일성

ABSTRACT: By using the infinite dimensional optimization[Jang and Kinoshita(2000)], which is based on the Hilbert space theory, optimal marine propellers are studied. The mathematical uniqueness for the optimized propeller is shown in this study. As a numerical example, the MAU type propeller is considered and used as the initial guess for the optimization method. The numerical results for an optimal marine propeller is illustrated for the pitch distribution.

1. 서 론

일반적으로 추진기의 tip 에서의 유기속도(induced velocity)의한 3차원효과는 추진기의 복잡한 기하학적 형상 때문에 무척 복잡하다고 알려져 있다. 이러한 3차원효과를 최적설계차원의 효과적인 고려를 위해 본 연구에서는 추진기의 피치분포를 설계변수로 하여 힐버트공간이론(Hilbert Space theory)에 근거한 무한차원의 최적화기법의 이론을 도입한다. 그리고 최적피치분포에 관한 유일성의 수학적증명을 힐버트공간이론을 통하여 수행하였다.

계산모델유동은 비압축성 포텐셜유동, 그리고 공동현상(cavitation)은 없다고 가정하여 최적 피치분포를 수치계산

을 수행 하였고 본 연구의 수치결과로부터 프로펠러 단독 효율곡선(open-water characteristic curve)성능이 우수한 최적 피치분포를 구할 수 있었다. 그리고 서로다른 두 개의 피치분포를 최적화를 통해 수치적으로 서로근사한 분포를 확인하였다.

2. 수학적 정식화

직경 d 그리고 회전수 n 의 프로펠러가 일정한 전진속도 U 로 전진하고 있다. 그리고 전진비 $J = U/nd$ 가 일정하다고 가정하면 추력 T 와 토크 Q 는 프로펠러형상의 범함수(functional) 가 된다. 즉, 피치분포를 $p(r)$ 라고하면, 추력 T 와 토크 Q 는

저자 장택수 연락처: 대전시 유성구 장동 한국해양연구원
042-868-7589 tsjang3@kriso.re.kr

$$T = T(p) \quad (1) \quad \text{용하여 다음으로 표현할 수 있다.}$$

$$Q = Q(p) \quad (2) \quad h^k(r) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle h^k, e_i \rangle e_i(r) \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

(1)과(2)에 의해서 프로펠러효율 또한 범함수로 표현가능하게 된다.

$$\text{여기서 } \langle h^k, e_i \rangle = \int_{RB}^{RO} h^k(r) e_i(r) dr$$

$$G(r) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i e_i(r) \quad (9)$$

$$\eta_p = \frac{JK_T(p)}{2\pi K_Q(p)} = \eta_p(p) \quad (3) \quad (8) \text{을 (7)에 대입하면 다음의 대수방정식을 구할 수 있다.}$$

여기서 K_T, K_Q 는 각각 추력,토크계수이다.

$$\eta_p^k = \sum_{i=1}^{\infty} A_{k,i} g_i \quad (10)$$

$h = h(r)$ 를 피치분포의 미소변분(small variation) 이라고 하고 작은 크기(norm)을 갖는다고 가정하자.

여기서

$$\eta_p^k = \eta_p(p + h^k) - \eta_p(p)$$

$$\|h\|_X = \left(\int_{RB}^{RO} |h(r)|^2 dr \right)^{1/2} = O(\varepsilon) \quad (4)$$

$$A_{k,i} = \langle h^k, e_i \rangle = \int_{RB}^{RO} h^k(r) e_i(r) dr$$

여기서 $\varepsilon \ll 1$ 그리고 $\|\cdot\|_X$ 는 힐버트공간 X에서의 크기이다.(Roman, P., 1975) 즉 임의의 함수에 대해

(9)를 통해서 G를 찾으면 최적피치분포는 다음의 점화식(iterated equation)으로 주어진다.

$$p_{new}(r) = p_0(r) + h_{max}(r) \quad (11)$$

$$\|w\|_X = \left(\int_{RB}^{RO} |w(r)|^2 dr \right)^{1/2}$$

여기서

으로 정의된다.

$$h_{max}(r) = aG(r) \quad (12)$$

(4)에서 RB 와 RO 는 프로펠러축(radius of boss)과 끝(radius of propeller)을 각각나타내고 있다. 그러면 프로펠러효율의 변화(perturbation)는 다음과 같이 표현된다.(Jang, T.S. and Kinoshita, T., 2000)

a는 양의 실수이고 $p_0(r)$ 는 초기피치분포이다. 점화식(11)의 반복수행을 통하여 최적의 피치분포를 구할수있다.

$$\eta_p(p + h) - \eta_p(p) = A(h) + E(h) \quad (5)$$

본연구에서의 제약조건(constraint)으로 다음의 부등식을 도입한다.

여기서 E 는 비선형연산자(nonlinear operator)이고 A 는 선형연산자(linear operator)로서 다음과 같이 표현할수있다.

$$\left| \frac{p_{opt}(r)}{p_0(r)} \right| < 1.2, \quad RB < r < RO \quad (13)$$

$$A(h) = \langle h, G \rangle = \int_{RB}^{RO} h(r) G(r) dr \quad (6)$$

(4)에서 변분 h 가 작은 크기와 정규성(regularity)을 가지면 (5)를 다음으로 가정할 수 있다.

$$\eta_p(p + h) \approx \eta_p(p) + \langle h, G \rangle \quad (7)$$

변분과 G 는 단위직교함수(orthonormal functions) e_i 를 이

해석의 편의상 유체를 비점성, 비압축성에 비회전유동을 가정하여 속도포텐셜을 도입한다. 날개단면은 얇다고 가정하여 날개의 평균단면을 보오텍스 면(vortex sheet)으로 생각한다. 본연구에서는 날개면의 유체력을 구하기위해 Kernel function 전개방법과 Koyama 의 code를 사용하였다. 그리고 초기모델 프로펠러를 Fig.1 의 MAU 타입의 프로펠러를 도입한다.

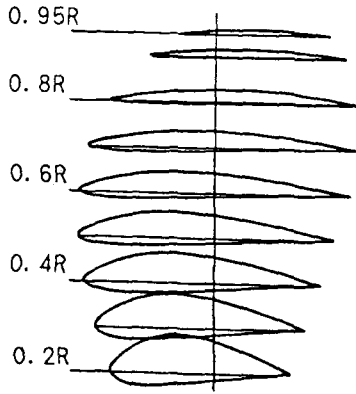


Fig.1 MAU type propeller

Fig.2 에 Fig.1의 MAU프로펠러의 단독효율곡선 (open water characteristic)이 나타나있다. 여기서의 프로펠러는 다음의 일정한 피치분포를 가진다.

$p_0 = 171.44(mm)$ (14) 그리고 다음의 전진비(advance ratio)에서 추진효율 0.6635 의 피크를 가진다.

$J_{max} = 0.7494$ (15)

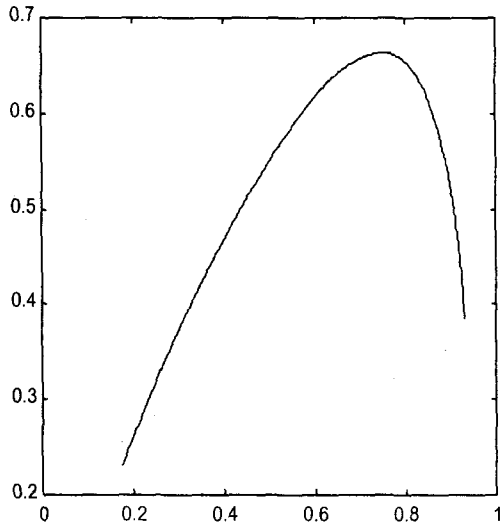


Fig.2 Propeller open-water characteristic curve for the MAU type in Equation (36)

(14)로 주어진 일정피치분포의 MAU 타입의 프로펠러를 (15)의 전진비에서 최적화를한다. 본연구에서 날개의 변분을 일반화함수이론(theory of generalized functions, Gelfand, M. and Shilov, G.E., 1964) 의 시험함수(test

function, Stakgold, I., 1967)을 도입하여 발생한다. 다음의 함수는 대표적인 무한번 미분가능한 시험함수이다.

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| < 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases} \quad (16)$$

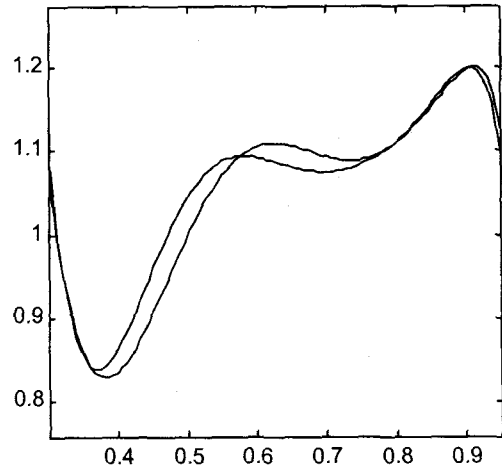


Fig.3 The comparison of the two optimized pitch distributions

Fig.3 의 실선이 (13)의 제약조건을 만족하면서 구해진 최적피치분포를 나타낸다.

다음을 만족하는 피치분포에 대한 최적화를 생각한다.

$$\inf_{p_1 \in X} d(p_{opt}, p_1) = \inf_{p_1 \in X} \langle p_{opt}, p_1 \rangle^{1/2} \quad (17)$$

즉 Fig.3 의 실선의 피치를 p_{opt} 라고하면 (17)의 p_1 의 피치분포는 p_{opt} 에 가장 가까운 일정피치임을 알 수 있다. 계산을 하면

$$p_1 = 182.315(mm) \quad (18)$$

Fig.3의 점선은 (18)의 일정피치프로펠러의 최적 피치분포를 나타내고 있다.

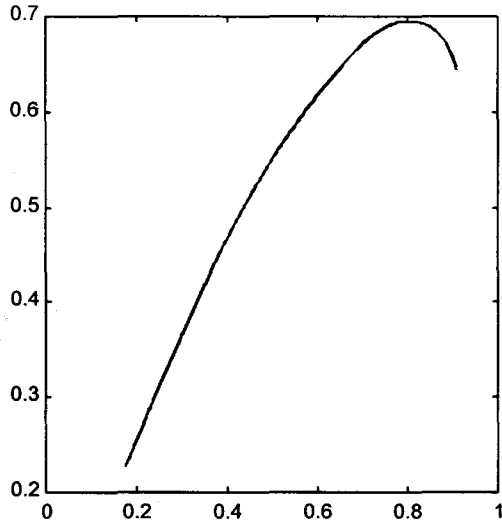


Fig.5 The comparison of propeller open-water characteristics for two different optimized propellers

Fig.3에서 보는바와같이 두 개의 최적피치분포는 거의 일치하고 있다. 두 개의 최적피치분포의 단독효율곡선(open water characteristic)을 조사하면 Fig.5에도시한것과같이 일치하는 효율곡선을 얻을수있다. 본연구에 의한 최적피치분포를 가진 프로펠러의 효율증가를 조사하여보자. 먼저 Fig.5에서의 단독효율곡선(open water characteristic)을 $\eta_{p_{new}}(J)$ 라고 정의하면 효율개선(gain of efficiency)은 다음으로 표시된다.

$$\eta_{p_{new}}(J) - \eta_p(J) \quad (19)$$

여기서 $\eta_p(J)$ 는 Fig.2의 단독효율이다. Fig.6에 보인바와같이 전진비가 1/2이상일 때 높은 효율개선을 볼수있다.

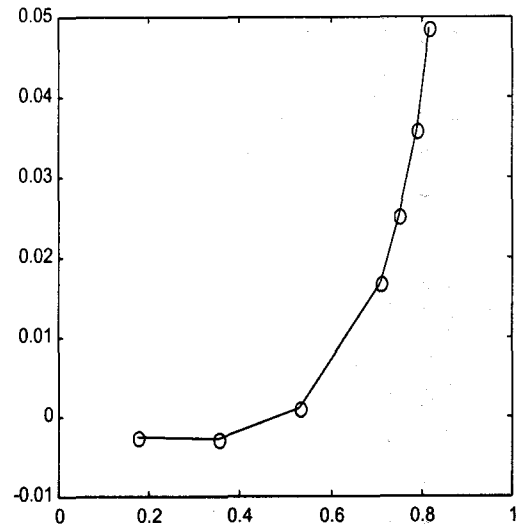


Fig.6 The gain of the propeller efficiency

4. 해의 유일성

앞에서의 수치결과에서 본것과같이 두 개의 다른 프로펠러의 최적화결과 거의 일치하는 수치결과를 얻을수있었다. 4장에서는 그의 수학적 유일성에 대해 살펴보겠다.

먼저 두 개의 다른 (11)점화식을 만족하는 수렴 함수열(convergent function sequence)을 생각하자. 즉 서로다른 초기치를 만족하는 두 개의 피치분포를 생각한다.

$$f_n(r) \rightarrow f(r) \quad (20)$$

$$g_n(r) \rightarrow g(r) \quad (21)$$

그러면 그들의 차(difference)는

$$f_n(r) - g_n(r) \rightarrow f(r) - g(r) \quad (22)$$

(7)로부터 두 개의 함수열(function sequence)은 다음을 만족한다.

$$\eta_p(f_n + \delta f_n) = \eta_p(f_n) + \langle \delta f_n, F_n \rangle \quad (23)$$

$$\eta_p(g_n + \delta g_n) = \eta_p(g_n) + \langle \delta g_n, G_n \rangle \quad (24)$$

그러면 (12) 로부터

$$\delta f_n = aF_n, \delta g_n = aG_n \quad (25)$$

따라서 함수열의 차는

$$f_{n+1} - f_n = aF_n \quad (26)$$

$$g_{n+1} - g_n = aG_n \quad (27)$$

(26)에 (27)을 빼면

$$(f_{n+1} - g_{n+1}) - (f_n - g_n) = a(F_n - G_n) \quad (28)$$

삼각부등식(triangle inequality, Rudin, W., 1991)을 (28)에 적용하고 $\|f_n - g_n\|_X$ 로 양변을 나누면

$$\frac{\|f_{n+1} - g_{n+1}\|_X}{\|f_n - g_n\|_X} + 1 \geq \frac{\|a(F_n - G_n)\|_X}{\|f_n - g_n\|_X} \quad (29)$$

가정에 의해 (20) 과 (21)은 수렴하기 때문에 (26)(27)은 0 (zero) 함수로 수렴해야한다.

$$\|F_n\|_X \rightarrow 0 \quad \|G_n\|_X \rightarrow 0 \quad (30)$$

그런데, 삼각부등식(triangle inequality, Rudin, W., 1991)에 의해

$$\|F_n\|_X + \|G_n\|_X \geq \|F_n - G_n\|_X \quad (31)$$

(30) (31)로부터

$$\|F_n\|_X + \|G_n\|_X \geq \|F_n - G_n\|_X \rightarrow 0 \quad (32)$$

(32)에 의해 (28)의 $(f_n - g_n)$ 는 Cauchy sequence(Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., 1970)가 되어

$$\frac{\|f_{n+1} - g_{n+1}\|_X}{\|f_n - g_n\|_X} \rightarrow 1$$

그러면 (29)는 다음과같이 간단히된다.

$$2 \geq \frac{\|a(F_n - G_n)\|_X}{\|f_n - g_n\|_X} \quad (33)$$

함수의 크기(norm)는 항상 영(sero)이거나 양수이므로

$$2/a \geq \frac{\|F_n - G_n\|_X}{\|f_n - g_n\|_X} \geq 0 \quad (34)$$

(32)에 의해

$$\frac{\|F_n - G_n\|_X}{\|f_n - g_n\|_X}$$

이 존재하기 위해서는

$$\|f_n - g_n\|_X \rightarrow 0 \quad (35)$$

따라서

$$f(r) = g(r) \quad (36)$$

(36)에 의해 서로다른 초기조건에서 출발한 최적화는 하나의 최적피치분포를 준다.

5. 결론

MAU 타입의 프로펠러를 무한차원최적화기법을 이용하여 최적피치분포를 구하였다. 구해진 최적분포를 통해 우수한 단독효율곡선을 얻을수있었고 두 개의 다른 프로펠러의 유일한 최적분포를 수치적으로 확인하였다. 동시에 그의 유일성을 수학적으로 증명하였다.

참 고 문 헌

- Rudin, W., (1991). *Functional analysis*, McGraw-Hill, New York
- Koyama, K., (1980). On application of the lifting surface theory to marine propellers, Proceedings of 13th Symposium on naval hydrodynamics, Tokyo, pp. 13-40.
- Roman, P., (1975). *Some Modern Mathematics For Physicists and Other Outsiders*, Vol.1, 2, Pergamon Press Inc.
- Zeidler, E. , (1984). *Nonlinear functional analysis and its application*, Springer-Verlag, Berlin.
- Stakgold, I., (1967). Boundary problems for mathematical physics, The Macmillan Company, Vol.1, < test functions, pp.29 >, New York
- Gelfand, M. and Shilov, G.E., (1964). *Generalized functions*, Vol.1, Academic Press, New York.
- Jang, T.S. and Kinoshita, T., (2000). A minimization theory in a Hilbert space and its application to two dimensional cavity flow with a numerical study, *Journal of Marine Science and Technology* Vol.5 No.4 pp.176-180
- Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., (1970). *Introductory Real Analysis*, Dover publications, New York.
- Janich, K., 1980, *Topology*, Springer-Verlag, Berlin.