

실험계획의 직교성의 정도를 평가하기 위한 그래픽 방법

장대홍¹⁾

요약

직교성은 실험계획에서 중요한 성질이다. 직교계획을 이용할 수 없는 경우 우리는 이러한 근사직교배열에 대하여 직교성의 정도를 평가할 수 있는 측도가 필요하다. 본 논문에서는 근사직교배열에 대하여 직교성의 정도를 평가할 수 있는 그래픽방법들을 제안하고자 한다.

주요용어: 근사직교배열, 비직교화평가그래프, 직교화평가그래프, 직교화평가산포도행렬

1. 서론

Plackett와 Burman(1946)이 포화계획(saturated design)인 Plackett-Burman design을 제안한 이후 직교배열이 실험계획분야에서 다양하게 쓰이고 있다. 직교배열은 Taguchi(1986)에 의하여 다구찌방법의 중요한 수단으로 쓰이고 있다. 우리는 강도(strength) 2인 직교배열을 직교계획(orthogonal design)이라 부른다. r 제약을 갖으며 강도가 t 이고, 크기가 N 인 직교배열이란 각 열이 2개 이상의 수준을 갖는 $N \times r$ 행렬 O 로 주어지는 데 O 의 $N \times t$ 부분행렬 각각이 모든 가능한 $1 \times t$ 행벡터들을 같은 빈도로 갖는다. $L_N(q_1^{m_1} \times q_2^{m_2} \times \dots \times q_k^{m_k})$, $\sum_{i=1}^k m_i = r$ 를 q_i 개의 수준을 갖는 열들이 m_i 개인 직교계획이라 하자. 직교계획의 정의는 다음과 같다.

1. 각 열에서 각 수준은 같은 빈도수로 나타난다.
2. 임의의 두 개의 열들에서 수준의 조합이 같은 빈도수로 나타난다.

종종 조건 1을 만족하는 계획을 U -형 계획이라 칭한다.

요인배치법(full factorial design)을 사용할 수 없을 때 포화계획이나 초포화계획(supersaturated design)을 사용하게 된다. Booth와 Cox(1962), Lin(1993, 1995), Li와 Wu(1997), Fang, Lin과 Ma(2000)는 이러한 포화계획이나 초포화계획에 대하여 연구를 하였다. 직교계획을 쓰지 못할 때 우리는 근사직교배열(nearly orthogonal arrays)을 이용하게 되는 데 Wang과 Wu(1992)는 이러한 근사직교배열을 제안하였다. Ma, Fang과 Liski(2000)는 이러한 근사직교배열의 직교성의 정도를 평가하기 위한 기준을 제시하였다. Jang(2002)은 이 기준을 기반으로 하여 근사직교배열의 직교성의 정도를 평가하기 위한 측도들을 제안하였다. 본 논문에서는 근사직교배열의 직교성의 정도를 평가하기 위한 그래픽 방법들을 제시하고자 한다.

2. 직교성의 정도를 평가하기 위한 그래픽 방법

근사직교배열 A 의 직교성의 정도를 평가하기 위한 측도들의 하나로서, Jang(2002)은 다음과 같은 측도를 제시하였다.

$$f_{\phi_1}(c_i) = \frac{1}{q_i} \sum_{k=1}^{q_i} \phi_1(|N_{c_i}(k) - \frac{N}{q_i}|)$$

$$D_{\phi_1, \theta_1}(A) = \frac{1}{r} \sum_{1 \leq i \leq r} \theta_1(f_{\phi_1}(c_i))$$

1) (608-737) 부산광역시 남구 대연3동 599-1 부경대학교 자연과학대학 수리과학부 통계학전공 교수

실험계획의 직교성의 정도를 평가하기 위한 그래픽 방법

$$f_{\phi_2}(c_i, c_j) = \frac{1}{q_i q_j} \sum_{k=1}^{q_i} \sum_{l=1}^{q_j} \phi_2(|N_{c_i, c_j}(k, l) - \frac{N}{q_i q_j}|) \quad (1)$$

$$D_{\phi_2, \theta_2}(A) = \frac{1}{\binom{r}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq r} \theta_2(f_{\phi_2}(c_i, c_j))$$

$$D_{\phi, \theta}(A) = \frac{1}{N} (D_{\phi_1, \theta_1}(A) + D_{\phi_2, \theta_2}(A))$$

여기서, $\phi = (\phi_1, \phi_2)'$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)'$ 이다. $\phi_1(\cdot), \phi_2(\cdot), \theta_1(\cdot), \theta_2(\cdot)$ 는 $[0, \infty)$ 에서 단조증가함수이고, $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \theta_1(0) = \theta_2(0) = 0$ 이다. c_i, c_j 는 A 의 임의의 두 개의 열이고, $N_{c_i}(k)$ 는 i 번째 열에서 k 번째 수준의 빈도수이고, $\frac{N}{q_i}$ 는 i 번째 열에서 각 수준들의 평균빈도수이다. $N_{c_i, c_j}(k, l)$ 은 i 번째 열과 j 번째 열에서 (k, l) -수준쌍의 빈도수이고, $\frac{N}{q_i q_j}$ 는 i 번째 열과 j 번째 열에서 각 수준조합들의 평균빈도수이다. Jang(2002)는 이 측도 $D_{\phi, \theta}(A)$ 를 비직교화값(non-orthogonality value)이라 칭하였다. 또한, Jang(2002)는 $\theta_1(f_{\phi_1}(c_i))$ 를 i 번째 대각선 원소 d_{ii} 로 하고, $\theta_2(f_{\phi_2}(c_i, c_j))$ 를 비대각선원소 d_{ij} 로 하는 $r \times r$ 행렬 $D = (d_{ij})$ 를 정의하고, 이 행렬을 비직교화행렬(non-orthogonality matrix)이라 하였다.

$D_1(A) = \frac{1}{N} D_{\phi_1, \theta_1}(A)$, $D_2(A) = \frac{1}{N} D_{\phi_2, \theta_2}(A)$ 라 하자. 그러면, 임의의 계획 A 에 대하여 2차원 좌표점 $(D_1(A), D_2(A))$ 로 대응시켜 나타내는 그래프를 우리는 그릴 수 있다. 이러한 그래프를 비직교화평가그래프(non-orthogonality evaluation graph)라 하자. 이러한 2차원 좌표점에서 x -좌표 $D_1(A)$ 는 직교계획의 정의 중 조건 1을 측정하는 값이다. 이 값이 0이면 계획 A 는 U -형 계획이 된다. y -좌표 $D_2(A)$ 는 직교계획의 정의 중 조건 2를 측정하는 값이다. 이 값이 0이면 계획 A 는 조건 2를 만족하게 된다. $(D_1(A), D_2(A)) = (0, 0)$ 이면 계획 A 는 직교계획이 된다. $(D_1(A), D_2(A))$ 이 원점에서 멀어질수록 계획 A 는 점점 더 비직교계획이 된다.

우리는 균일화지수(evenness index)를 다음과 같이 정의할 수 있다(Pielou(1966)).

$$J = \frac{H}{H_{\max}} \quad (2)$$

여기서, $H = \frac{N \log N - \sum_{i=1}^q f_i \log f_i}{N}$, $H_{\max} = \log q$, q 는 범주의 개수이고, f_i 는 범주 i 에 속하는 빈도수이다. 이 균일화지수를 이용하여 근사직교배열 A 에 대하여 직교성의 정도를 평가하기 위한 측도를 다음과 같이 제시할 수 있다.

$$E_1(A) = \frac{1}{r} \sum_{1 \leq i \leq r} J_i, E_2(A) = \frac{1}{\binom{r}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq r} J_{ij} \quad (3)$$

여기서, J_i 는 계획 A 의 i 번째 열에 대한 균일화지수이고, J_{ij} 는 계획 A 의 i 번째 열과 j 번째 열들에 대한 균일화지수이다. 그러면, 임의의 계획 A 에 대하여 2차원 좌표점 $(E_1(A), E_2(A))$ 로 대응시켜 나타내는 그래프를 우리는 그릴 수 있다. 이러한 그래프를 직교

화평가그래프(orthogonality evaluation graph)라 하자. 이러한 2차원 좌표점에서 x -좌표 $E_1(A)$ 는 직교계획의 정의 중 조건 1을 측정하는 값이다. 이 값이 1이면 계획 A 는 U -형 계획이 된다. y -좌표 $E_2(A)$ 는 직교계획의 정의 중 조건 2를 측정하는 값이다. 이 값이 1이면 계획 A 는 조건 2를 만족하게 된다. $(E_1(A), E_2(A)) = (1, 1)$ 이면 계획 A 는 직교계획이 된다. $(E_1(A), E_2(A))$ 이 $(1, 1)$ 에서 멀어질수록 계획 A 는 점점 비직교계획이 된다.

근사직교배열의 직교성의 정도를 평가하기 위한 세 번째 그래픽 방법으로서, 산포도행렬을 이용하는 방법이 있다. 임의의 계획 A 에 대하여 히스토그램을 포함하는 산포도행렬을 그리고 이러한 산포도행렬을 직교화평가산포도행렬(orthogonality evaluation scatter matrix)이라 하자. 이 직교화평가산포도행렬에서 각 열에 대응되는 히스토그램은 직교계획의 정의 중 조건 1을 측정하는 수단이 되고, 임의의 두 열에 대응되는 직교화평가산포도행렬의 원소는 직교계획의 정의 중 조건 2를 측정하는 수단이 된다. 즉, 각 열에 대응되는 히스토그램을 봄으로써 이 열이 조건 1을 얼마나 만족하는 지 알 수 있고, 임의의 두 열에 대응되는 직교화평가산포도행렬의 원소를 관찰함으로써 이 두 열이 조건 2를 얼마나 만족하는 지 평가할 수 있게 된다. 근사직교배열의 직교성의 정도를 평가하기 위한 네 번째 그래픽 방법으로서, 비직교화행렬을 Maple 명령어 matrixplot 등을 이용하여 그림으로 나타내는 방법이 있다.

3. 수치예

다음과 같은 5개의 계획들에 대하여 직교성의 정도를 평가하기 위한 그래픽 방법들을 적용하여 볼 수 있다. 계획 A_1 은 $L_{16}(4^5)$ 인 직교배열이고, 계획 A_2 와 계획 A_3 는 두 개의 균등 계획(uniform design, Fang, Lin, Winker와 Zhang(2000)) $U_{16}(4^5)$ 이고, 계획 A_4 은 $L'_6(3^1 \times 2^3)$ 인 혼합배열이고, 계획 A_5 는 크기가 6인 조합계획(combinatorial design)이다.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

이러한 5개의 계획들에 대하여 직교화평가그래프를 그리면 다음 그림 1과 같다. 그림 1로부터 5개의 계획 모두 U -형 계획임을 알 수 있고, 직교성의 정도가 $A_1 = A_3 > A_4 > A_5 > A_2$ 임을 알 수 있다. 계획 A_2 와 계획 A_3 에 대한 직교화평가산포도행렬을 그려 보면 각각 그림 2와 그림 3과 같다. 그림 2와 그림 3를 통하여 알 수 있는 사실은 두 계획 모두 U -형 계획이고, 계

실험계획의 직교성의 정도를 평가하기 위한 그래픽 방법

획 A_3 는 직교계획이나, 계획 A_2 는 직교계획이 아님을 알 수 있다. 또한, 계획 A_2 의 임의의 두 열에서 어떤 수준 조합이 결여되어 있는지를 알 수 있다.

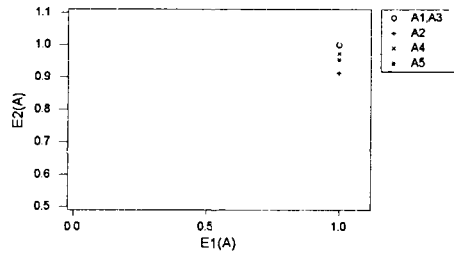


그림 1. 직교화평가그래프

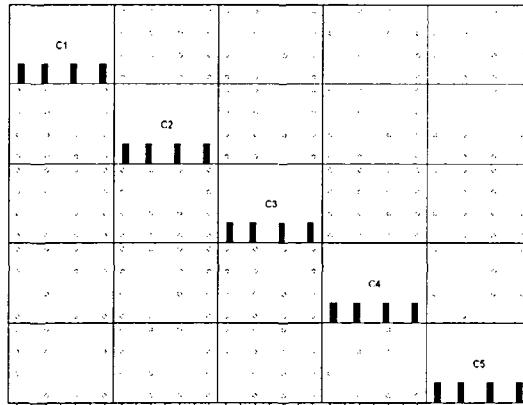


그림 2. 계획 A_2 에 대한 직교화평가산포도행렬

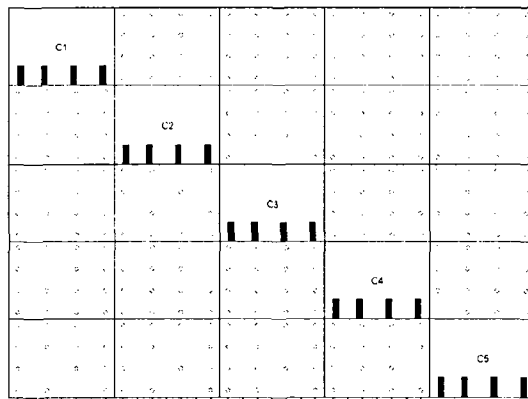


그림 3. 계획 A_3 에 대한 직교화평가산포도행렬

4. 결론

근사직교배열의 직교성의 정도를 평가하기 위한 그래픽 방법들(비직교화평가그래프, 직교화평가그래프, 직교화평가산포도행렬)을 통하여 우리는 근사직교배열들의 직교 정도를 비교할 수 있다.

참고문헌

- [1] Booth, K. H. V. and Cox, D. R.(1962), "Some Systematic Supersaturated Designs", *Technometrics*, 4, 489-495.
- [2] Fang, K., Lin, D. K. J., Ma, C.(2000), "On The Construction of Multi-level Supersaturated Designs", *Journal of Statistical Planning and Inference*, 86, 239-252.
- [3] Fang, K., Lin, D. K. J., Winker, P., and Zhang, Y.(2000), "Uniform Design: Theory and Application", *Technometrics*, 42, 237-248.
- [4] Jang, D. H.(2002), "Measures for Evaluating Non-orthogonality of Experimental Designs", *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 31, 249-260.
- [5] Li, W. W. and Wu, C. F. J.(1997), "Columnwise-pairwise Algorithms with Applications to The Construction of Supersaturated Designs", *Technometrics*, 39, 171-179.
- [6] Lin, D. K. J.(1993), "A New Class of Supersaturated Designs", *Technometrics*, 35, 28-31.
- [7] Lin, D. K. J.(1995), "Generating Systematic Supersaturated Designs", *Technometrics*, 37, 213-225.
- [8] Ma, C., Fang, K., and Liski, E.(2000), "A New Approach in Constructing Orthogonal and Nearly Orthogonal Arrays", *Metrika*, 50, 255-268.
- [9] *Maple 7*, Waterloo Maple, Inc., Waterloo., 2001.
- [10] Pielou, E. C.(1966), "The Measurement of Diversity in Different Types of Biological Collections", *Journal of Theoretical Biology*, 13, 131-144.
- [11] Plackett, R. L. and Burman, J. P.(1946), "The Design of Optimum Multifactorial Experiments", *Biometrika*, 33, 305-325.
- [12] Taguchi, G.(1986), *Introduction to Quality Engineering: Designing Quality into Products and Processes*, White Plains, New York.
- [13] Wang, J. C. and Wu, C. F. J.(1992), "Nearly Orthogonal Arrays with Mixed Levels and Small Runs", *Technometrics*, 34, 409-422.