2002 Proceedings of the Spring Conference, Korean Statistical Society

Diallel Crosses Block Designs for Control versus Test Inbred Lines Comparisons

Young Nam Son,[1] Jung Hwa Lee, Seok Woo Lee[2]

Abstract

In this paper, diallel crosses block designs for control versus test comparisons among the lines are proposed. These designs are constructed by using partially balanced incomplete block designs with C-properties. Also, the efficiencies of the diallel crosses block designs obtained through this method are tabulated for number of lines 24 or less.

Keywords : diallel crosses, general combining ability, control inbred line, test inbred line, partially balanced incomplete block designs C-designs.

1. 서론

이면교배(diallel cross)계획은 식물의 육종실험에서 근교계통(inbred line)의 유전적 특성을 연구하는데 이용되는 짝짓기 계획(mating design)이다. 서로 다른 유전적인 특징을 갖는 p종의 근교계통에서 i번째 근교계통과 j번째 근교계통의 교배를 (i,j)로 나타내고 n_c를 실험에 이용되는 서로 다른 교배의 수라 하면 Griffing(1956)은 n_c에 따라 4가지 형태의 완전이면교배(Complete Diallel Cross: CDC)계획을 정의하였다.

지금까지의 이면교배계획에 관한 연구는 p개의 근교계통의 일반조합능력(general combining ability: gca)을 비교하기 위한 연구였다. 그러나 이면교배 실험의 목적이 통제 근교계통(control inbred line) 또는 표준 근교계통(standard inbred line)과 시험 근교계통(test inbred line)간의 gca를 비교하는데 있다면 기존의 방법으로는 정도(precision)가 높게 gca효과를 비교할 수 없다. 최근에 Choi와 Gupta 그리고 Kageyama(2002)는 통제 근교계통과 시험 근교계통의 gca효과를 비교하기 위해서 Pearce(1960)의 타입-S(type-S) 계획 개념을 이용하여 완전확률화 계획과 불완비 블록계획을 제시하였다. 이들이 제시한 계획들은 $n_c=p(p-1)/2$인 완전이면교배 계획인데, 근교계통의 수 p가 커지게 되면 교배의 수가 급격히 증가되어 모든 교배를 실험하는 완전이면교배 계획이 현실적이지 못한 경우가 발생된다. 이러한 상황에서 보다 적은 수의 교배 횟수로 통제 근교계통과 시험 근교계통의 gca 효과를 비교할 수 있다면 이는 효과적인 블록계획이 된다.

따라서 본 연구에서는 m개의 동반분류를 갖는 부분균형 불완비(partially balanced incomplete block : PBIB)블록 계획 중에서 C-계획(C-Design)이 되는 PBIB 계획을 이용하여 통제 근교계통과 시험 근교계통의 gca효과의 비교를 위한 블록계획을 구성하는 방법과 이들 계획의 효율성을 제시한다.

---

1) Researcher, The Research Institute of Statistics Chosun University, Gwangju 501-759.
2) Graduate, Department of Computer Science and Statistics, Chosun University, Gwangju 501-759.

2. 모형과 계획의 구성방법

p개의 근교계통을 갖는 이면교배에서 통제 근교계통 0, 시험 근교계통을 $1,2,\dots,p-1$로 나타내자. 이면교배 실험에 이용되는 교배의 총 수를 n이라 할 때 모형(Singh과 Hinkelmann, 1995)은 아래와 같이 정의된다.

$$Y=\mu 1_n+\Delta_1 g+\Delta_2\beta+\varepsilon \tag{2.1}$$

여기서 Y는 $n\times 1$ 관찰 값 벡터이고 μ는 전체평균, 1_n은 모든 요소가 1인 $n\times 1$ 벡터를 나타낸다. 또한, $g=(g_0,g_1,g_2,\dots,g_{p-1})'$와 $\beta=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_b)'$는 각각 gca 효과벡터와 블록효과 벡터를 나타내며 Δ_1,Δ_2는 각각 p개의 gca과 b개의 블록에 대응하는 계획행렬이고 ε는 평균이 0, 분산이 σ^2인 $n\times 1$ 오차항 벡터이다.

모형 (2.1)에서 gca 효과벡터 g를 추정하기 위한 정보행렬 C는 다음과 같이 정의된다(Gupta와 Kageyama,1994).

$$C=(c_{ij})=G-\frac{1}{k}\Gamma\Gamma' \tag{2.2}$$

여기서 s_i를 $i(i=0,1,2,\dots,p-1)$번째 근교계통의 반복 수, s_{ij}, $i<j=0,1,\dots,p-1$를 교배 (i,j)의 반복 수라 할 때 $G=(g_{ij})$는 대칭행렬로서 $g_{ii}=s_i,g_{ij}=s_{ij}$ 이고 $\Gamma=\Delta_1'\Delta_2$는 $p\times b$ 근교계통 - 블록 빈도행렬을 나타낸다.

m개의 동반분류를 갖는 PBIB 계획을 이용하여 통제 근교계통과 시험 근교계통의 gca를 비교하기 위한 블록계획을 구성하는 방법을 살펴보면 아래와 같다. 먼저 (2.3)과 같은 모수를 갖으면서 C-계획이 되는 PBIB(m) 계획을 D_1이라 하자.

$$v_1=p-1,\ b_1,r_1,k_1,\lambda_s\neq 0,\lambda_l=0\quad l(\neq s)=1,2,\dots,m. \tag{2.3}$$

계획 D_1의 각 블록에 0으로 표현되는 통제 근교계통을 포함시킨 계획을 D_2라 하면 계획 D_1이 $C-$계획이므로 D_2 역시 $C-$계획(Saha, 1976)이 되고 아래와 같은 모수를 갖는다.

$$v_2=p,\ b_2=b_1,k_2=k_1+1,r_{20}=b_1,r_{21}=r_1,\lambda_0=r_1,\lambda_l=0,\lambda_s\neq 0$$

여기서 r_{20},r_{21}은 각각 통제 근교계통과 시험 근교계통의 반복 수이고 λ_0는 통제 근교계통이 각각의 시험 근교계통과 함께 나타나는 블록 수이다.

그런 다음, 계획 D_2의 각 블록에 속한 k_1+1개의 근교계통을 이용하여 $k_1(k_1+1)/2$개의 교배를 형성하면 다음과 같은 모수를 갖는 블록 이면교배계획이 구성된다.

$$p,b=b_1,k=k_1(k_1+1)/2,r_c=r_1,r_t=\lambda_s,s_0=(p-1)r_1,s_i=k_1r_1,n_{tc}=\frac{(k_1-1)s_0}{2\lambda_s} \tag{2.4}$$

여기서 r_c는 교배 $(0,i)(i=1,2,\dots,p-1)$의 반복 수이고 r_t는 두 개의 시험근교계통 i,j가 l번째 동반관계에 있을 때 교배 $(i,j),0<i<j=1,2,\dots,p-1$의 반복 수이다. n_{tc}는 시험근교계통만으로 이루어진 서로 다른 교배의 총 수이다.

보조정리 1. 계획 D의 정보행렬 C는 아래와 같다.

$$C=(k_1-1)C_2$$

여기서 C_2는 계획 D_2의 블록-내(intra-block)행렬을 나타낸다.

이제 (2.4)와 같은 모수를 갖는 계획 D에서 두 근교계통간의 gca효과 차이의 분산을 유도하기 위해서 계획 D_1과 D_2에서 정의되는 $M_0^{(1)}$과 $M_0^{(2)}$행렬을 아래와 같다고 하자.

$$M_0^{(1)} = \frac{1}{r_1 k_1} N_1 N_1' - \frac{r_1}{b_1 k_1} J_{p-1}, \quad M_0^{(2)} = \frac{k_1}{k_1+1} \begin{bmatrix} 0 & 0'_{p-1} \\ 0_{p-1} & M_0^{(1)} \end{bmatrix}$$

또한 μ_1과 μ_2를 $M_0^{(1)}$과 $M_0^{(2)}$ 행렬의 0이 아닌 고유값이라 하면 계획 D_1과 D_2는 C-계획이므로 $M_0^{(2)}$의 0이 아닌 고유값 $\mu_2 = \frac{b_1 k_1}{b_1(k_1+1)} \mu_1 = \left(\frac{k_1}{k_1+1}\right)\mu_1$이다.

정리 1. 계획 D에서 $Var(\hat{g}_i - \hat{g}_j)$는 아래와 같다.

$$\sigma_0^2 = Var(\hat{g}_0 - \hat{g}_j) = \frac{k_1(b_1+r_1)+v_0(b_1-r_1)}{(k_1-1)k_1 b_1 r_1}\sigma^2, \quad j=1,2,\ldots,p-1$$

$$\sigma_1^2 = Var(\hat{g}_i - \hat{g}_j) \tag{2.5}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2(k_1+v_0)\sigma^2}{(k_1-1)k_1 r_1}, & i,j(i<j=1,2,\ldots,p-1)\text{가 } l(l\neq s)\text{번째 동반관계에 있는 경우} \\[2ex] \dfrac{2[k_1 r_1 + v_0(r_1-\lambda_s)]\sigma^2}{(k_1-1)k_1 r_1^2}, & i,j(i<j=1,2,\ldots,p-1)\text{가 } s\text{번째 동반관계에 있는 경우.} \end{cases}$$

여기서 $v_0 = \left(\frac{1}{1-\mu_2}\right)\frac{k}{k_1+1}$ 이다.

3. 계획의 효율성 및 예제

통제 근교계통과 시험 근교계통의 gca를 비교하기 위한 완전확률화(completely randomized) 계획을 D_c라 할 때 정보행렬 C_c는 아래와 같다.

$$C_c = G - \frac{1}{n} ss' \tag{3.1}$$

여기서 $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{p-1})' = (k_1 b_1, k_1 r_1, k_1 r_1, \ldots, k_1 r_1)'$이고 $n = b_1 k_1(k_1+1)/2$이다. 완전확률화 계획 D_c에 대한 블록계획 D의 효율성을 eff$(\hat{g}_i - \hat{g}_j)$라 하면

$$\text{eff}(\hat{g}_i - \hat{g}_j) = \begin{cases} e_0, & i=0, j=1,2,\ldots,p-1 \\ e_1, & i,j(i<j=1,2,\ldots,p-1)\text{가 } l(l\neq s)\text{번째 동반관계 일 때} \\ e_2, & i,j(i<j=1,2,\ldots,p-1)\text{가 } s\text{번째 동반관계 일 때} \end{cases} \tag{3.2}$$

C_c의 일반화 역행렬 $C_{c(g)} = (c_{c(g)}^{ij})$에서 $i,j(i<j=1,2,\ldots,p-1)$가 $l(l\neq s)$ 번째와 s번째 동반관계에 있을 때 $c_{c(g)}^{ij}$를 각각 c_1^*, c_2^*라 하면 (3.2)의 e_0, e_1 그리고 e_2는 아래와 같다.

$$e_0 = \frac{(k_1-1)k_1 b_1 r_1}{\{k_1(b_1+r_1)+v_0(b_1-r_1)\}v_c^0}, \quad e_1 = \frac{(k_1-1)k_1 r_1}{2(k_1+v_0)v_c^1}, \quad e_2 = \frac{(k_1-1)k_1 r_1^2}{2\{k_1 r_1 + v_0(r_1-\lambda_s)\}v_c^2}.$$

여기서 $v_c^0 = c_{c(g)}^{00} + c_{c(g)}^{jj} - 2c_{c(g)}^{0j}$, $v_c^1 = c_{c(g)}^{ii} + c_{c(g)}^{jj} - 2c_1^*$, $v_c^2 = c_{c(g)}^{ii} + c_{c(g)}^{jj} - 2c_2^*$ 이다.

예제. 모수가 $v_1 = mn = 4 \cdot 2 = 8, b_1 = 12, k_1 = 4, r_1 = 6, \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$인 semi-regular GD PBIB 계획 D_1과 $p=9, b=12, k=10, r_c=6, r_t=3, s_0=48, s_1=24, n_{tc}=24$인 블록계획 D는 아래와 같은 블록을 갖는다.

블록 번호	D_1	D
1	{1,4,6,7}	{(0,1),(0,4),(0,6),(0,7),(1,4),(1,6),(1,7),(4,6),(4,7),(6,7)}
2	{3,5,6,8}	{(0,3),(0,5),(0,6),(0,8),(3,5),(3,6),(3,8),(5,6),(5,8),(6,8)}
3	{2,5,7,8}	{(0,2),(0,5),(0,7),(0,8),(2,5),(2,7),(2,8),(5,7),(5,8),(7,8)}
4	{1,3,6,8}	{(0,1),(0,3),(0,6),(0,8),(1,3),(1,6),(1,8),(3,6),(3,8),(6,8)}
5	{1,2,4,7}	{(0,1),(0,2),(0,4),(0,7),(1,2),(1,4),(1,7),(2,4),(2,7),(4,7)}
6	{2,3,4,5}	{(0,2),(0,3),(0,4),(0,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)}
7	{1,2,3,4}	{(0,1),(0,2),(0,3),(0,4),(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)}
8	{1,2,3,8}	{(0,1),(0,2),(0,3),(0,8),(1,2),(1,3),(1,8),(2,3),(2,8),(3,8)}
9	{3,4,5,6}	{(0,3),(0,4),(0,5),(0,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)}
10	{4,5,6,7}	{(0,4),(0,5),(0,6),(0,7),(4,5),(4,6),(4,7),(5,6),(5,7),(6,7)}
11	{1,6,7,8}	{(0,1),(0,6),(0,7),(0,8),(1,6),(1,7),(1,8),(6,7),(6,8),(7,8)}
12	{2,5,7,8}	{(0,2),(0,5),(0,7),(0,8),(2,5),(2,7),(2,8),(5,7),(5,8),(7,8)}

참고문헌

[1]Choi, K.C., Gupta, S. and Kageyama, S.(2002). Type S designs for diallel cross experiments. *Utilitas Mathematics*. to appear.

[2] Dey, A.(1986). *Theory of Block Designs,* Johne Wiley & Sons.

[3] Griffing, B.(1956). Concepts of general and specific combining ability in relation to diallel crossing systems. *Australian Journal of Biological Sciences* 9, 463-493.

[4] Pearce, S.C.(1960). Supplemented balance, *Biometrika* 47 263-271.

[5] Raghavarao, D.(1971). *Constructions and Combinatorial Problems in Design of Experiments,* Dover publications.

[6] Saha,G.M.(1976). On Calinski's Patterns in Block Designs, *Sankhya* 38, 383-392.

[7] Singh, M. and Hinkelmann, K. (1995). Partial Diallel Crosses in Incomplete Blocks. *Biometrics* 51, 1302-1314.

[8] Singh, M. and Hinkelmann, K.(1998). Analysis of partial diallel crosses in incomplete blocks. *Biometrical Journal* 40, 165-181.