기체 흐름에 고체입자가 섞인 파이프 내의 이상유동에 대한 수치해석

Numerical Simulation for an Air-Solid Two-Phase Flow in a Vertical Pipe

박 순 일*1, 장 근 식*2
S. I. Pak and K. S. Chang

A numerical simulation was made to determine the motion of particles in the fluid. The simulation is based on the Eulerian-Lagrangian method. The fluid motion was solved using a PISO-based finite-element method and a k-ε model of turbulence. In the Lagrangian method for the solid phase, the trajectories of particles are calculated by integrating the equations of motion of a single particle, and the collision between particles are taken into account. The influence of particles on the fluid phase is taken into account by introducing source terms in the Eulerian equations govering the fluid flow. It is known as the particle-source-in-cell (PSIC) method. Also, the turbulent effect in the particles and fluid motion is considered. The numerical results were compared with the experiment for a two-phase flow in a vertical pipe.

Key Words: Two-phase flow, Eulerian-Lagrangian method, PSIC method, Turbulent effect, Collision between paricles

1. 서 론

공학적으로 다양한 분야에서 기체 흐름 속에 고체입자가 섞인 유동이 일어난다. 그러한 유동의 예로는 고체분말의 공기 이송장치, 미분탄 연소기, 산업분야의 공장 내에서 발생하는 분진을 제거하는 집진 장치, 고체연료를 사용하는 로켓 추진 노즐, 대기내의 먼지 유동 등을 들 수 있다. 이러한 이상유동을 해석방법은 크게 두 가지로 나눌 수 있다. 입자의 운동을 기체유동과 같이 연속체로 가정하고 오일러(Eulerian)적인 방법으로 해석하는 Eulerian-Eulerian Method와 다른 하나는 개개의 입자를 추적하는 라그란지(Lagrange)적인 방법인 Eulerian-Lagrangian Method이다. 두가지 해석방법은 서로 다른 장단점를 가지고 비슷한 결과[1]를 보여주고 있지만 Eulerian-Eulerian Method는 수치적 불안정하며 입자의 크기가 다양할 경우에는 적용에 어려움이 있다. 그러므로 본 연구에서는 다양한 분야의 다상 유동해석에 확장하여 적용하기 쉬운 Eulerian-Lagrangian Method를 이용하여 해석하였다.

Eulerian-Lagrangian Method는 입자의 운동방정식을 풀어 입자를 추적하면서 질량, 모멘텀, 에너지의 변화를 구하고 그 변화에 따른 영향을 연속상인 기체의 질량, 모멘텀, 에너지방정식의

*1 학생회원, 한국과학기술원 대학원 항공우주공학과
*2 정회원, 한국과학기술원 대학원 항공우주공학과

생성항으로 넣어줌으로써 해석하는 방식이다. 이러한 Two-way coupling을 PSIC (Particle-Source-in Cell) Model이라고 하며 Crowe[2]가 제안하였다. 본 연구에서 입자는 고체이므로 질량의 변화는 없으며 유동장 전체를 등온장으로 가정하였으므로 에너지교환에 대해서도 고려하지 않고 단지 모멘텀의 전달현상에 대해서만 고려하였다.

입자가 유동장내를 흘러가면서 기체의 난류 난동항의 영향을 받게 되며 또한 입자는 기체의 난류 구조, 운동에너지와 그 소산율에 영향을 주게 된다. 입자의 난류 확산 모델은 Dukowicz[3]와 Gosman & Ioannides[4] 등이 개발한 통계적인 모델(stochastic model)를 사용하였다. 난류 유동장은 벽함수를 사용한 Launder & Spalding[5]의 standard k-ε 방정식을 사용하였다.

기체에 대한 입자의 질량비(loading ratio)가 1이상으로 증가하게 되면 입자의 수밀도가 높아져서 입자의 충돌도 고려하여야한다. 입자의 충돌 여부를 결정하는 방법은 직접적으로 계산하는 방법(deterministic procedure)[6]과 Monte-Carlo Method의 개념을 이용한 stochastic model[7]이 있는데 직접적인 방법은 계산 시간이 지나치게 많이 소요되는 단점이 있어 일반적으로 stochastic model를 이용하여 충돌를 모사한다.

본 연구에서는 수직 파이프 내의 기체흐름 속에 입자가 섞인 이상유동에 대해 연구하였다. 수직 파이프내의 기체흐름은 유동장의 형상 등 다른 영향인자들이 거의 없는 유동으로 이러한 유동에 입자의 유동에 대한 수치해석을 수행하여 입자유동이 추가됨으로 해서 생기는 현상들을 파악하기가 쉽다. Tsuji[8]가 이에 대한 실험적 연구를 하였는데 그 결과들과 비교하여 본 이상유동 수치해석 프로그램의 성능을 파악하고 나아가 더욱 복잡한 문제에 적용성을 알아보고자 한다.

2. 수치해석

2.1 지배 방적식

2.1.1 기체 지배 방정식

수직 파이프내의 유동은 정상, 비압축성, 그리고 축대칭이며 지배 방정식은 시간평균 Navier-Stokes 방정식에 기초를 두고 유도하면 질량과 모멘텀에 대한 보존 방정식은 식(1)과 같다.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\bar{v}}{r}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}=0$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\vec{\bar{u}}\cdot\nabla\bar{u}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+(\mu+\mu_t)\nabla^2\bar{u}+\overline{S_{up}} \quad (1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\vec{\bar{u}}\cdot\nabla\bar{v}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial r}+(\mu+\mu_t)\left(\nabla^2\bar{v}-\frac{\bar{v}}{r^2}\right)+\overline{S_{vp}}$$

위의 식에서 μ_t는 난류 점성항으로 난류모델링을 사용하여 결정한다. k-ε 난류 모델링에서 난류 점성항은 다음과 같다.

$$\mu_t=\rho C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2)$$

여기서 k과 ε 은 난류 운동에너지와 소산율이며 C_μ(=0.09)는 상수이다.

또한 S_{up}와 S_{vp}는 입자유동으로 인해 생기는 생성항으로써 이에 대해서는 다음 절에서 설명하겠다.

난류 지배방정식으로 벽함수(wall function)를 사용한 k-ε model를 선택하였으며 k와 ε 의 방정식은 다음과 같다.

$$\rho\left(\frac{\partial k}{\partial t}+\vec{\bar{u}}\cdot\nabla k\right)=\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_k}\right)\nabla^2 k+\mu_t\Phi-\rho\varepsilon+S_{kp}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\vec{\bar{u}}\cdot\nabla\varepsilon\right)=\left(\mu+\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon}\right)\nabla^2\varepsilon+C_1\frac{\varepsilon}{k}\mu_t\Phi-\rho C_2\frac{\varepsilon^2}{k}+S_{\varepsilon p} \quad (3)$$

여기서 σ_k, σ_ε, C_1, C_2는 상수로써 각각 1.0, 1.3, 1.44, 1.92 이며 Φ는 아래의 식과 같다.

$$\Phi=\mu_t\left\{2\left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\bar{v}}{r}\right)^2\right]+\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\right)^2\right\} \quad (4)$$

식(3)에서 S_{kp}, $S_{\varepsilon p}$는 입자에 의해 생성되는 원천항으로 다음 절에서 설명하도록 하겠다.

수치해석 기법으로는 속도와 압력에 대해 등차(equal order)의 일차원 내삽함수(interpolation function)를 사용한 유한 요소법을 사용하였고

속도에 대한 한번의 내연적 예측(implicit predictor)와 두 번의 외연적 보정(explicit corrector)을 하는 PISO(Pressure-Implicit Operator-Splitting) 알고라즘을 사용하였다.

2.1.2 입자 지배 방정식

유체 내에서 입자 운동 방정식은 Basset, Boussinesq, & Oseen이 유동한 B-B-O 방정식을 사용한다. 본연구에서는 기체와 고체의 압력차가 10^{-3}배 이상차이가 나므로 B-B-O 방정식에서 virtual mass force, Basset force, pressure gradient force에 관련된 항은 무시하고 공기역학적 항력과 중력만을 고려하였고 입자는 구형이라고 가정하였다. 그 결과식을 표현하면 다음과 같다.

$$m_p\frac{d\vec{v_p}}{dt}=\frac{1}{2}C_D\rho A_p(\vec{u}-\vec{v_p})|\vec{u}-\vec{v_p}|+m_p\vec{g} \quad (5)$$

여기서 $\vec{v_p}$는 입자의 속도, $\vec{u}$는 현재 입자가 위치한 지점에서의 기체 속도이고 C_D는 항력계수이다. 구형에 대한 입자의 항력계수 C_D는 Clift et al.[9]이 제시한 다음의 식을 사용하였다.

$$C_D=\begin{cases}\frac{24}{Re_p}(1+0.15Re_p^{0.687}) & \text{if } Re_p\le 1000\\ 0.424 & \text{if } Re_p>1000\end{cases} \quad (6)$$

그리고 Reynolds number는 다음과 같이 정의된다.

$$Re_p=\frac{\rho d_p|\vec{u}-\vec{v_p}|}{\mu} \quad (7)$$

위 식(5)를 해석적으로 직접 풀면 입자 추적에 소요되는 계산 시간을 줄일 수 있다. (5)식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\frac{d\vec{v_p}}{dt}=\frac{\vec{u}-\vec{v_p}}{\tau}+\vec{g} \quad (8)$$

여기서 $\tau=\rho_p d_p^2/18\mu f$ 로써 입자이완시간(particle relaxation time)이라고 하며, $f=C_DRe/24$ ρ_p는 입자의 밀도이고 d_p는 입자의 지름이다.

적분 시간동안 기체의 속도가 일정하다고 하고 식(8)을 적분하면 다음과 같다.

$$\vec{v_p}=\vec{u}-(\vec{u}-\vec{v_{p0}})\exp\left(\frac{-\Delta t}{\tau}\right)+\vec{g}\tau\left[1-\exp\left(\frac{-\Delta t}{\tau}\right)\right] \quad (9)$$

여기서 vp0는 입자의 초기속도이고 Δt는 시간간격이다. 식(9)에 의해서 Δt후의 입자속도를 구하고 난 후에 다음 식을 통해서 입자의 위치를 결정하게 된다.

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=\vec{v_p} \quad (10)$$

2.1.3 입자의 난류 확산

기체 난류장이 입자의 확산에 미치는 영향을 고려하기 위해서 Dukowicz, Gosman and Ioannides등이 개발한 모델을 적용하였다. 식(8)에서 기체의 속도 $\vec{v_p}$는 아래식과 같이 평균속도 성분과 난동 성분으로 나눌 수 있다.

$$\begin{aligned}u&=\bar{u}+u'\\ v&=\bar{v}+v'\end{aligned} \quad (11)$$

위 식에서 속도 난동 성분은 난류유동장에 대한 DNS(Direct Numerical Simulation)해석을 통해서 구해야하나 실질적으로 이것은 불가능하므로 난류가 등방성(isotropic)하다고 가정하고 아래 식의 표준편차 σ인 Gaussian 분포로부터 난류 속도 성분을 구한다.

$$\sigma=(2k/3)^{1/2} \quad (12)$$

입자는 난류 유동장의 turbulent eddy를 만날 때마다 새로운 난동 성분의 영향을 받는다고 볼 수 있으므로 입자 운동방정식 (8)을 풀기 위한 시간 간격은 입자가 turbulent eddy를 지나는데 걸리는 시간으로 다음의 식으로 제한한다.

$$t_{int}=\min(t_e,t_{tr}) \quad (13)$$

여기서 t_e는 eddy life time으로 $t_e = l_e/(2k/3)^{1/2}$ 이고 turbulent length scale $l_e = C_\mu^{3/4} k^{3/2}/\varepsilon$이다. 입자가 eddy를 지나가는 데 걸리는 시간 t_{tr}은 선형화된 입자의 운동방정식으로부터 구할 수 있고[6] 다음 식과 같다.

$$t_{tr} = -\tau \ln\left(1 - \frac{l_e}{|\vec{u} - \vec{v}_p|}\right) \tag{14}$$

2.2 입자가 유동장에 미치는 영향

입자는 유동장을 지나면서 모멘텀을 전달한다. 실제 계산상의 입자(parcel)는 같은 크기, 밀도를 가지는 입자들의 그룹이다. 이런 입자들이 유동장의 제어체적을 지날 때 그 전달되는 모멘텀을 모두 합해서 기체 지배방정식의 생성항으로 계산된다. 그 생성항을 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$S_{uip} = \frac{1}{dV} \sum_{p=1}^{NP} \left[-m_p N_p \left(\frac{\vec{u} - \vec{v}_p}{\tau} \right) + \vec{g} \right] \tag{15}$$

여기서 dV는 제어체적의 부피, N_p는 대표입자가 포함하는 입자들의 개수이며 NP는 제어체적을 통과하는 모든 대표입자들의 갯수이다.

또한 입자에 의한 난류 생성항은 모멘텀 생성항이 추가된 기체의 모멘텀방정식으로부터 Shuen[10]이 유도하였으며 아래의 식과 같다.

$$S_{kp} = \overline{u_i S_{uip}} - \overline{u_i}\,\overline{S_{uip}} \tag{16}$$

$$S_{\varepsilon p} = 2\mu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial S_{up}'}{\partial x_j}} \tag{17}$$

이 식들을 Mostafa & Mongia[11]가 제안한 방식으로 모델링하면 다음과 같다.

$$S_{kp} = \frac{1}{dV} \sum_{p=1}^{NP} \left[-m_p N_p \frac{\overline{u_i'(u_i' - v_i')}}{\tau} \right] \tag{18}$$

$$S_{\varepsilon p} = \frac{\varepsilon}{k} S_{kp} \tag{19}$$

여기서

$$\overline{u_i'(u_i' - v_i')} = 2k f(t_l, t_d) \tag{20}$$

$$f(t_l, t_d) = 1 - \frac{t_l}{t_l + t_d}$$

이고, $t_l = 0.35\ k/\varepsilon$ 이고 t_d는 입자 이완 시간 τ 와 같다.

2.3 입자 추적 기법

Eulerian-Lagrangian Method을 적용하는데 있어서 입자 추적하는 방법은 필연적이며 수치적으로 매우 안정하고 정확하며 효율적인 알고리즘을 요구한다. 본 연구에서는 Chorda et al [12]이 제안한 방법을 사용하였다.

이 방법은 입자가 제어체적 내를 벗어날 때 입자궤적과 교차하는 제어체적의 변을 찾아 추적하는 방법으로 Fig.1에 그 개념을 나타내었다. 벡터 $X(t)P_i$와 $X(t)X(t+\triangle t)$를 외적한 z성분은 꼭지점 i 에 대해 표현하면 다음과 같다.

$$L_i = (x_i - x(t))(y(t+\triangle t)) - (x(t+\triangle t) - x(t))(y_i - y(t)) \tag{21}$$

그림에서 보는 것처럼 입자궤적이 주어진 꼭지점의 왼쪽에 있으면 L>0이며 그렇지 않으면 L<0이다. 그러므로 연속하는 두 꼭지점에서 L 값이 서로 반대 부호가 되면 그 두 꼭지점으로 이루어진 변이 입자가 통과하는 제어체적의 변이 된다.

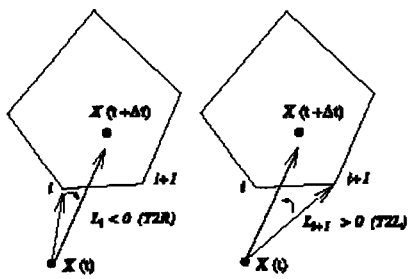

Fig. 1 Illustration for the particle trajectory

3. 유동해석 결과

수직 파이프 내에서 기체가 상승하는 흐름속에 고체입자가 섞인 유동을 해석하였다. 파이프의 지름은 30.5mm이고 구형 고체입자의 밀도는

1020 kg/m^{3}이다.

계산 영역 내에 띄울 대표 입자(parcel)의 총 수는 통계적인 정확성을 줄 정도의 많은 입자가 필요하다. 유입 입자의 질량비가 커 입자와 기체 상호간의 영향이 중요한 경우에는 입구로 흘러 들어가는 입자의 수가 1500 cps (computational parcels per second)이상일 때 입자에 대한 통계적으로 비교적 정확한 결과를 보여준다는 연구가 있었다. 본 연구에서는 입구에서 입자를 하나씩 유입시켜 유동장을 빠져나간 후에 다음 입자를 흘려보내는 방법을 사용하지 않고 유동장 전체에 입자를 분포시켜서 한번의 시간 간격에 모든 입자들이 움직이는 방법을 채택하였다. 그러므로 입자의 초기 분포를 위해 입자의 생성항이 없이 기체 유동을 해석한 후 기체의 유량에 대한 입자의 유량이 일정할 때까지 입자를 계속 유입시켜서 입자의 초기분포를 얻었다. 입자 유입 시간 간격을 0.01로 하고 입자의 유입수는 15개로 하여 결과적으로 초당 1500개의 입자가 유입되도록 하였다.

입자가 벽면에 충돌할 때 실제적으로는 마찰계수와 반발계수를 고려하여야 하나 그 영향이 크지 않을 것으로 보고 완전 탄성 충돌한다고 가정하였다.

Fig. 2는 지름이 200μm인 입자를 Re=30,000의 기체 유동장에 띄운 수치해석 결과이다. 이때의 loading ratio z=1.0이다. 그림에서 보는 바와 같이 파이프 중심에서 r/D=0.4인 지점까지는 기체와 입자의 속도가 모두 실험치에 근사한

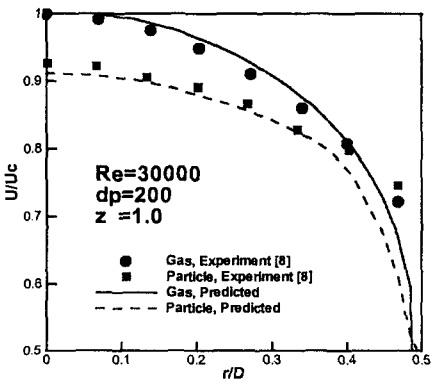

Fig. 2 Radial profiles of axial velocity(z=1.0)

결과를 보여주지만 벽 근처에서는 잘 맞지 않는다. 특히 실험치는 r/D=0.4 지점부터 벽면까지는 입자가 기체의 속도를 앞서는 것을 볼 수 있는데 수치해석 결과는 거의 벽면에 가까워졌을 때야 비로소 입자의 속도가 기체 속도를 앞서는 것을 볼 수 있다.

Fig. 3 은 Re=33000인 기체 유동장을 지름이 200μm인 입자가 loading ratio z=2.1로 유입하는 문제에 대해서 푼 것이다. 이 경우에는 입자

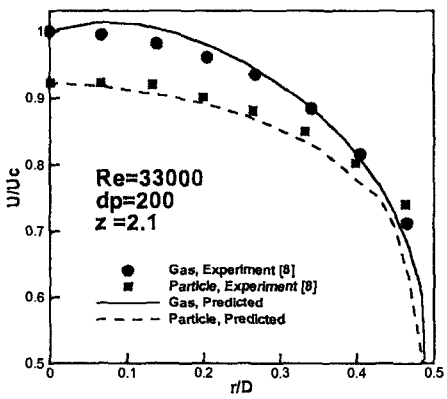

Fig. 3 Radial profiles of axial velocity(z=2.1)

에 대해서 비교적 정확한 결과를 보여지만 역시 벽면 근처에서 5%정도의 오차를 보여주고 있다. 기체 속도는 파이프 중심에서 잘 맞지 않으나 벽면으로 가면서 실험치를 잘 따라 가는 것을 볼 수 있다.

위의 두 결과를 보면 수치해석 결과가 비교적 실험치를 잘 따라 가지만 좀 더 정확한 해석이 필요한 것을 볼 수 있다.

4. 결 론

기체 흐름 속에 고체입자가 섞인 2상 유동을 Eulerian-Lagrangian Method를 사용하여 해석하였다. 기체 유동은 벽법칙을 사용한 k-ε 방정식으로 난류를 모델링하여 PSIC 알고리즘을 사용한 유한요소법으로 해석하였고 입자 유동은 통계적 방법으로 기체의 난류 난동 속도성분을 모델링하여 입자 운동방정식을 품으로써 추적하

였다. 입자 궤적을 따라 PSIC 모델을 적용하여 기체 유동에 영향을 주는 생성항을 계산하여 입자와 기체간의 상호영향을 고려함으로써 two-coupling을 하였다. 파이프 내의 이상유동을 해석하여 얻은 결과는 실험 결과와 비교적 정확하고 비슷한 경향을 보여주지만 공학적으로 유용한 결과를 얻기위해 좀 더 개선할 필요가 있다.

참고문헌

[1] Adenini-Fashola, A.,Chen, C. P., "Modeling of confined turbulent fluid-particle flows using Eulerian and Lagrangian schemes", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 33, No. 4, pp. 691.

[2] Crowe, C. T., Sharma, M. P., Stock, D. E., "The Particle-Source-in Cell (PSI-CELL) model for gas-droplet flows", Trans. ASME J. Fluids Eng., June 1977, pp. 325.

[3] Dukowicz, J. K., "A particle-fluid Numerical model for liquid sprays", J. Computational Physics, Vol. 35, pp. 229.

[4] Gosman, A. D., Ioannides, E., "Aspects of computer simulation of liquid fueled combustors", AIAA Paper 81-0323.

[5] Launder, B. E., Spalding, D. B., "The numerical computation of turbulent flows", Computer Methods in Applied Mech. and Eng., Vol. 3, pp. 269.

[6] Tsuji, Y., et al., "Numerical simulation of gas-solid two-phase flow in a two-dimensional horizontal channel", Int. J. Multiphase Flow, Vol. 13, No. 5, pp. 671.

[7] Wassen, E., Frank, Th., "Simulation of cluster formation in gas-solid flow induced by particle-particle collisions", Int. J. Multiphase Flow, Vol. 27, pp. 437.

[8] Tsuji, Y., Morikawa, Y., Shiomi, H., "LDV measurements of an air-solid two-phase flow in a vertical pipe", J. Fluid Mech., Vol. 139, pp. 417.

[9] Clift, R., et al., *Bubbles, Drops and Particles*, Academic Press, New York, 1973.

[10] Shuen, J. S., "A theoretical and experimental investigation of dilute particle laden turbulent gas jet", Ph. D. Dissertation, Pennsylvania State University, May, 1984.

[11] Mostafa, A. A., Mongia, H. C., "On the modeling of turbulent evaporating sprays: Eulerian versus Lagrangian approach", Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, pp. 2583.

[12] Chorda, R., et al., "An efficient particle-locating algorithm for application in arbitrary 2D and 3D grids", Int. J. Multiphase Flow, Vol. 28, pp. 1565.