

## 와도-속도 정식화에서 Lagrangian 보오텍스법과 유한체적법의 비교

A Comparison of a Lagrangian Vortex Method with a Finite Volume Method  
for the Vorticity-Velocity Formulation.

\*김광수<sup>1)</sup>, 이승재<sup>1)</sup> 서정천<sup>1)</sup>

Kim Kwang-Soo, Lee Seung-Jae, Suh Jung-Chun

We present an improved Lagrangian vortex method in 2-D incompressible unsteady viscous flows, which is based on a mesh-free integral approach of the velocity-vorticity formulation. Vorticity fields are represented by discrete vortex blobs that are updated by the Lagrangian vorticity transport with the particle strength exchange scheme. Velocity fields are expressed in a form of the Helmholtz decomposition, which are calculated by a fast algorithm of the Biot-Savart integration with a smoothed kernel and by a well-established panel method. No-slip condition is enforced through viscous diffusion of vorticity from a solid body into field. The vorticity flux is determined in such a way that spurious slip velocity vanishes. Through the comparison with the existing finite volume scheme for the transient vortical flows around an impulsively started cylinder at Reynolds number  $Re=550$ , we would obtain a more accurate scheme for vortex methods in complicated flows.

### 1. 서론

전산유체역학분야에서, Navier-Stokes 방정식을 푸는 방법으로 primitive 변수(속도, 압력)를 다루는 방법이 가장 널리 사용되고 있다. 그런데, Wu와 Wu[1], Lighthill[2], Batchelor[3] 등의 오랜 연구에 의하면, 유체와 고체면 사이의 동력학적 관계를 해석하는데 있어서, 이러한 primitive 변수와 더불어 와도를 고려하는 것이 필요하다[4]. 와도를 기본 주요 변수로 다루는 수치해석 방법의 하나인 보오텍스 방법에 대하여 공학자들의 관심이 늘어나고 있다.

최근 컴퓨터 성능의 발전과 더불어 전산유체역학의 눈부신 발전에도 불구하고 높은 레이놀즈수(Reynolds number)를 가지는 유동의 해석에는 공학적인 응용이라는 관점에서, 활용되는 상용 난류 모델은 비정상 유동에 적용하기에는 아직 연구가 더 필요하고, Eulerian

관점의 LES (Large Eddy Simulation)는 높은 레이놀즈 수의 유동에 적용함에 있어서, 많은 격자체를 요구하므로 계산시간에 있어서 어려움을 겪고 있다.

반면, 보오텍스 방법(Vortex particle method)은 유동의 물리현상에 기초한 비교적 간단한 알고리즘으로 구성되어 있기 때문에, 복잡한 비정상 유동의 적용에 용이할 것으로 판단된다. Chorin[5], Leonard[6], Greengard, Rohklin[7], Koumoutsakos[8], Winckelmans, Ploumhans[9] 등의 많은 학자들의 다양한 연구 결과로 인하여 보오텍스 방법은 그 완성도를 갖추어 가고 있으며, 현재 여러 학자들이 다양한 관련 연구를 진행하고 있다.

2차원 비정상, 비압축성 유동장으로 가정된 보오텍스 방법을 간단히 살펴보면, 이산화된 와

1) 서울대학교 공과대학 조선해양공학과

(151-741 서울시 관악구 신림동 산 56-1 해양시스템 공학연구소 Te: : 02-880-8379)

도장과 Lagrangian으로 표현된 와도이송방정식을 기본으로 한다. 보오텍스 방법은 와도값을 가지는 영역만을 대상으로 계산하기 때문에, 계산 영역 전체에 대해서 격자를 따로 생성할 필요가 없으므로, 격자를 만들기 힘든 복잡한 형상에 대해서 매력적이다. 예를 들어 보오텍스 블랍(blob)이 계산의 기본요소가 되고, 블랍이 생성되어 발달되어 가는 과정을 추적하는 Lagrangian 방법을 이용하므로, 고속선용 추진기의 가장 큰 문제점인 캐비테이션 현상 중에서 팁 보오텍스(tip vortex) 문제에 대한 접근이 용이하리라 예상된다.

본 저자에 의하여 이전에 수행된 연구에서는, 와도-속도-압력 정식화에 포텐셜 유동해석에 널리 활용되고 있는 패널 방법을 접목하여, 물체경계에서의 고착조건이 만족되도록 반복수렴과정을 거쳐 와도플럭스를 결정하는 Eulerian 관점의 유한체적법을 제안한 바 있다[10][11][12].

본 연구는 이전 연구에서 택한 유한체적법을 이용하여 와도이송방정식을 푸는 과정을 대체하여 격자계가 필요없는 Lagrangian 보오텍스 입자를 이용하는 방법을 택하고 있다. 또한 최근에 여러 학자들이 제안하고 있는 기존의 보오텍스 방법을 개선하여, 순간적으로 출발하는 2차원 실린더 주위의 점성유동해석을 통해 그 결과를 비교/검증함으로써 정확도를 높이는 기법을 개발하고자 한다.

## 2. 정식화

### 2.1 지배방정식

2차원 비압축성, 비정상 점성유동에 대한 Navier-Stokes 방정식을 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \underline{u} \quad (1)$$

식(1)에 컬(curl)을 취하면, 압력항이 사라진 와도이송방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{w} = \nu \nabla^2 \underline{w} \quad (2)$$

여기서  $w \underline{k} = \underline{w} = \nabla \times \underline{u}$ 는 와도,  $\nu$ 는 동점성계수, 속도  $\underline{u} = \underline{U}_\infty + \underline{u}_w + \nabla \phi$ 는 Helmholtz 분해 방식처럼 유입 속도, 회전성 성분, 포텐셜 성분의 합으로 표시한다. 초기조건, 경계조건, 속도-와도 관계식에 대한 식을 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \underline{w}(\underline{x}, 0) &= \nabla \times \underline{u}_0(\underline{x}) && \text{in } D \\ \underline{u} &= \underline{U}_b(t) && \text{on } \partial D \\ \underline{u} &\rightarrow \underline{U}_\infty && \text{at } \infty \\ \nabla^2 \underline{u} &= -\nabla \times \underline{w} && \text{in } D \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $\underline{U}_b$ 는 물체의 속도,  $\underline{U}_\infty$ 는 무한경계에서의 속도,  $D$ 는 계산영역을 나타낸다.

위와 같은 속도-와도 정식화는 압력항을 제거하는 데에 도움이 되지만, 경계부분에서 부가적인 운동학적 경계조건과 고착조건을 만족시키기 위해 와도 형태로 주어져야하는 경계조건이 필요하다.

### 2.2 대류항과 확산항의 분리

식 (2)는 다음과 같이 Lagrangian 형태로 표시할 수 있다.

$$\frac{d\underline{w}}{dt} = \nu \nabla^2 \underline{w} \quad (4)$$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{u}$$

$N$ 개의 보오텍스 blob 입자의 세기( $\Gamma = wh^2$ )에 대한 Gaussian 순정함수( $\eta_\sigma$ )로 표현되는 와도장,

$$\underline{w}(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i(t) \eta_\sigma(\underline{x} - \underline{x}_i) \quad (5)$$

에 대하여, 속도중 회전성 성분은 Biot-Savart 적분식을 이용하여 계산한다.

$$\underline{u}_w = -\frac{1}{2\pi} \int \underline{K}_\epsilon(\underline{x} - \underline{y}) \times \underline{w} d\underline{y} \quad (6)$$

여기서, kernel  $\underline{K}_\epsilon$ 과 같은 형태의 Gaussian 순정함수를 사용하여 다음과 같이 이산화한다.

$$\begin{aligned} \underline{u}_k(\underline{x}, t) &= \\ &- \sum_{j=1}^N \frac{q(|\underline{x} - \underline{x}_j|/\sigma)}{|\underline{x} - \underline{x}_j|^2} (\underline{x} - \underline{x}_j) \times (\Gamma_j \underline{k}) \end{aligned}$$

여기서,  $\sigma$ 는 순정함수의 순정범위를 대표하는 반경이며,  $q(s) = 1/2\pi(1 - \exp(-s^2/2))$ 이다. 식(6)에 의하여 회전성 속도성분이 얻어지고 물체면에서의 비침투조건이 만족되도록 패널 방법을 적용하여 포텐셜 성분을 계산한 후, 식(4)에 의하여 입자들의 위치는 Adam-Bashforth기법(경우에 따라 2차 Runge-Kutta기법)을 사용하여 갱신한다[9].

식(4)에서 점성 확산항은 다음과 같이 적분 형태의 이산화식으로 바꾸어 계산한다[13].

$$\nabla^2 w(x) \approx \frac{2}{\sigma^2} \int \eta_\sigma(x-y) (w(x) - w(y)) dy \quad (7)$$

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} = \frac{2\nu}{\sigma^2} \sum_{j=1}^N (S_i \Gamma_j - S_j \Gamma_i) \eta_\sigma(x_i - x_j) \quad (8)$$

여기서, S는 보우텍스 블랍의 면적(=  $h^2$ ),  $\Gamma$ 는 순환강도이다. 식(7)로부터 유도된 식(8)은 N개의 Lagrangian 입자들에 대하여 서로의 순환강도를 서로 교환하며 갱신하는 입자강도교환(Particle Strength Exchange, PSE)기법에 해당된다[13]. 실제로 식(8)을 사용할 때, 자유장 영역에서는 수치 안정성과 효율을 감안하여 계산 입자로부터 일정거리(보통  $5\sigma$ ) 내에 위치한 입자에 한하여 합산한다. 특히 계산 입자가 경계면 근처에 위치한 경우에는 주변 입자를 경계면에 관한 정상점(image)에 가상 입자를 추가시켜 그 영향을 포함시킨다.

### 2.3 경계면에서의 와도플럭스 생성과 확산

물체표면에서의 고착조건은 와도플럭스의 관계를 고려하여 만족시킨다. 국부대류속도에 의하여 위치가 이동되고 입자강도교환(PSE) 방법에 의하여 입자들의 강도가 갱신된 후에, 정해진 와도장에 대해서 유기되는 속도를 포함시킨 속도의 비침투조건을 적용한다. 이후 접선속도성분을 구하고, 그 속도와 실제 물체의 속도는 서로 일치해야 물리적으로 타당하다. 그러나, 경계면에서 계산된 접선속도와 물체 속도의 차이가 생기게 되고, 가상(spurious) slip속도에 해당하는 vortex sheet( $\Delta\gamma$ )가 발생한다고 생각할 수 있다. 이는 물체경계면에서 와도플럭스를 발생시키고, 이 양만큼 경계면에서 와도가 유동장으로 확산되며, 결국 이는 slip속도를 줄이게 되므로 고착조건을 만족시킬 수 있다[1][10]. 반복계산과정에서 갱신되는  $(k+1)$ 번째 와도플럭스는

$$\left( \nu \frac{\partial w}{\partial n} \right)^{(k+1)} = \left( \nu \frac{\partial w}{\partial n} \right)^{(k)} - \left( \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \right)^{(k)} \quad (9)$$

으로 표현되며, 경계조건 식(9)에 의하여 경계면으로부터 식(4)의 확산항에 해당하는 수치적 해를 Koumoutsakos, Leonard & Pepin[8],

Ploumhans, Wickelmans & Salmon[9] 등이 제시하였는 바, 와도입자가 받는 순환의 변화량은 다음과 같이 산정된다.

$$\frac{d\Gamma_i}{dt} = \frac{\Delta\gamma}{\Delta t} \left[ \text{erfc}(s) \Big|_{\frac{x-h/2}{\sqrt{4\nu t}}}^{\frac{x-h/2}{\sqrt{4\nu t}}} \right] \left( \sqrt{4\nu t} \frac{1}{2} \times \left[ \text{ierfc}(s) \Big|_{\frac{y-b/2+h/2}{\sqrt{4\nu t}}}^{\frac{y-b/2-h/2}{\sqrt{4\nu t}}} - \text{ierfc}(s) \Big|_{\frac{y+b/2-h/2}{\sqrt{4\nu t}}}^{\frac{y+b/2+h/2}{\sqrt{4\nu t}}} \right] \right) \quad (10)$$

여기서,  $b$ 는 물체면을 이산화한 패널의 크기를 나타내고,  $0 \leq x_i < h$  이면  $h/2 = x_i$  이고, 그렇지 않은 경우는  $h/2 = h/2$  이다.

## 3. 수치적 처리

### 3.1 반복계산과정과 포텐셜유동

앞서 언급한 바와 같이, 점성유동장은 다음식과 같이 비회전성 속도항( $u_{im}$ )과 회전성(점성) 속도항( $u_{vis}$ )의 합으로 표현할 수 있다.

$$u = u_{im} + u_{vis} + U_\infty \quad (11)$$

식(11)은 와도이송방정식의 대류항을 계산할 때, 식(6)의 속도-와도관계식으로 표현되는 점성이 고려된 속도장 이외에 포텐셜 유동의 속도장이 함께 계산되어야 함을 의미한다. 이는 격자없는 N개의 입자가 위치를 이동할 때, 물체 경계면을 침투할 수 없는 운동학적 경계조건과 관련되어 있다. 이때, 포텐셜 유동을 계산하는 부분은 기존의 패널 방법을 도입한다.

물체표면에서 식(6)을 통하여 얻어진 속도에는 접선방향성분과 함께 법선방향성분이 존재하고, 고착조건과 비침투조건을 만족시키기 위해 적합한 와도플럭스를 단번에 정하지 못한다. 따라서, 식(10)으로 갱신된 각 입자의 순환으로 재차 경계면에서의 유기속도를 구하고 비침투조건이 만족되는 속도포텐셜을 구한 후 전체 slip 속도에 해당하는 와도플럭스를 더하여 경계면에서 slip속도가 허용범위내(보통 0.001~0.01)로 사라질 때까지 반복계산을 수행해야 한다. 이 방법은 본 연구진이 수행한 이전 연구인 Eulerian관점의 방법에서 그 물리적 타당성과 수치적 가능성을 검증한 바, 본 Lagrangian 보우텍스 방법에도 그대로 적용하였다[10][11][12].

### 3.2 수치해석순서

<Fig.1>은 본 연구의 해석기법을 적용한 계

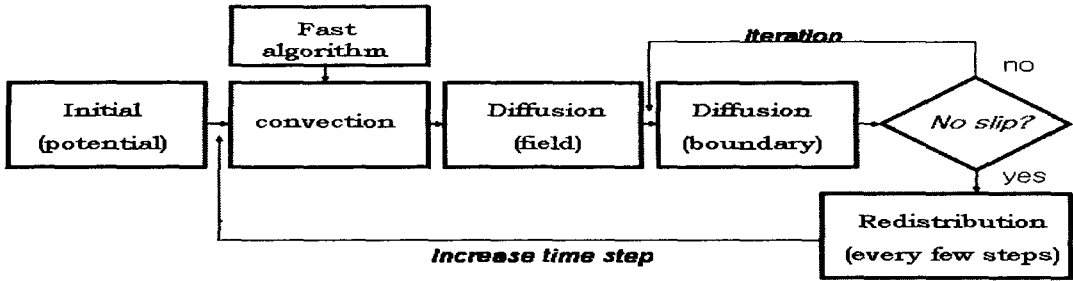


Fig.1 Flow-chart of simulation of present numerical method

산과정을 개략적으로 보인 순서도이다. 계산초기에 물체주위의 유동은 순간적으로 포텐셜 유동으로 가정한다. 물체 표면에서 계산된 slip속도로부터 고착조건이 만족되도록 반복계산(iteration)을 통해 와도플럭스를 생성시킨다(식(9)-(10)). 생성된 와도플럭스와 주어진 속도장으로부터, 와도이송방정식(2)의 대류항과 확산항의 계산(식(4)-(8))을 거쳐 와도장을 구한다. 대류항의 속도장은 바로 이전시간단계에서 계산되어진다. 이때 Biot-Savart관계식 (6)의 계산시간을 줄이기 위하여 multipole 전개에 의한 fast algorithm[14]을 이용한다.

보우텍스 블랍은 유동장내에서 그 위치가 Lagrangian 개념으로 갱신되며, 물체표면에서 계속해서 와도 확산이 일어난다. 이때, 수렴성과 계산의 편리성을 위하여 보우텍스 세기와 블랍 위치를 삼각법을 이용하여 단순정규격자에 분포하는 재분포(redistribution)과정을 거친다[15]. 일정 시간단계에서 재분포 과정을 거치기 위하여 생성된 단순 정규격자의 예를 <Fig.2>에 보이고 있다. 시간단계를 증가시키고 위의 과정을 반복하여 시간전진(time marching) 방식을 택한다.

#### 4. 유동해석결과

본 수치해석 기법을 순간적으로 출발하는 2차원 실린더 주위의 점성유동해석문제에 적용해보았다. 이 문제는 단순하고 독특한 형상이면서도 복잡한 유동 특성을 포함하고 있기 때문에, 수치기법 개발시 검증용 기준 문제로서 적합하다. Koumoutsakos & Leonard[16], Winckelmans[9]

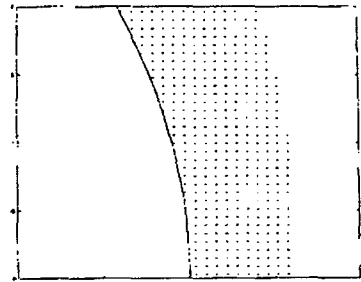


Fig.2 Redistribution technique

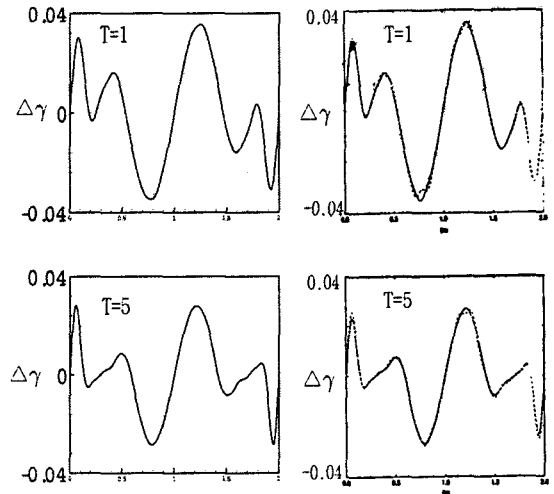


Fig.3 Comparison of the vortex sheet strength ; (left) present scheme, (right) Ploumhans & Winckelmans(2000)

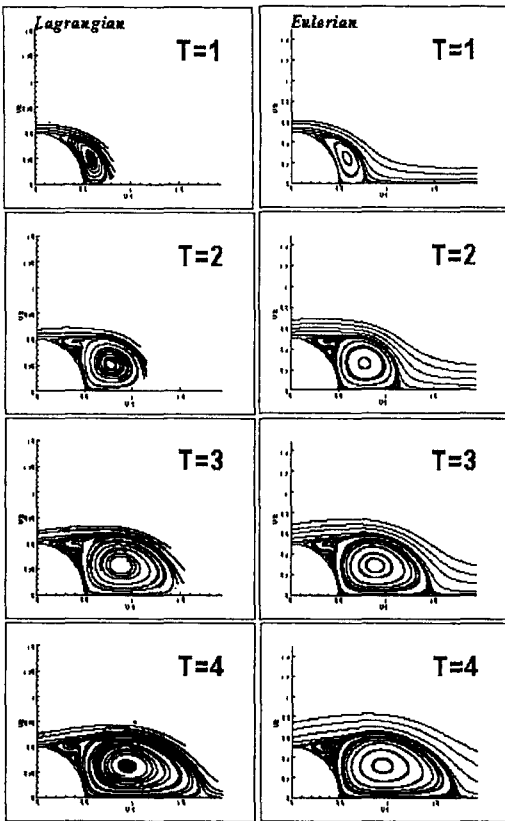


Fig.4 Comparisons of instantaneous streamlines for  $Re=550, T=1,2,3,4$ ; (left) Present method, (right) Suh & Kim (1999)

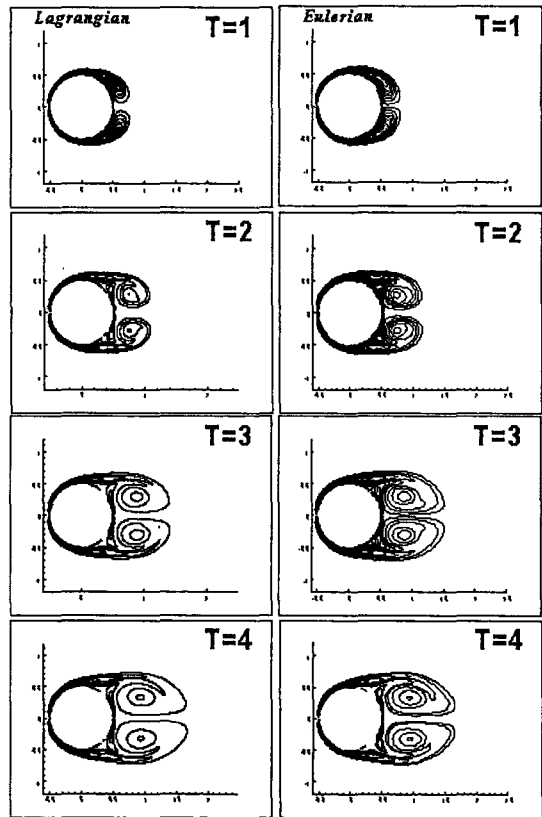


Fig.5 Comparisons of iso contours of vorticity for  $T=1,2,3,4$  at  $Re=550$ ; (left) Present method, (right) Suh & Kim (1999)

등이 보우텍스 방법을 이용하여 많은 결과를 이미 제시한 바 있다. 또한 본 연구진에 의하여 수행된 이전의 연구에서 격자계가 있는 Eulerian 관점의 와도-속도 정식화를 기저로 한 유한체적법으로도 동일한 문제를 다루었기 때문에 격자계가 없는 Lagrangian 기법과 격자계를 가지고 있는 수치해석 기법간의 결과를 서로 비교할 수 있다.

유동해석을 위한 입력변수로서, 레이놀즈 수  $Re (\equiv U_\infty D / \nu) = 550$ , 시간  $T (= tU_\infty / D)$ 에 대한 시간간격  $\Delta t$  는 0.01, 보우텍스 블랍입자의 크기는  $h = 0.005$ , 물체표면의 패널수는 총 600개이다. 패널 길이는 블랍입자의 크기와 비슷한  $b = \pi / 600 \approx 0.0052$ 이다. 이 경우에 확산항의

정확성을 보장하는 조건  $\nu \Delta t / h^2 = O(1)$  을 만족하며, 대류항을 계산할 때 필요한 2차 Runge-Kutta 식과 Adam-Bashforth 식, 그리고 단순 시간 변분항에 사용되는 Euler explicit 기법의 안정성 요구조건에도 만족한다. 많은 수의 입자를 다루는 'N-body 문제'가 야기되므로, 계산시간의 절감을 위해 fast algorithm을 도입하였다[14].

<Fig.3>은 앞절에서 언급한 바와 같이, 반복수렴계산과정에서 물체표면에서 생기는 spurious slip 속도(보우텍스 sheet의 세기( $\Delta \gamma$ )에 해당)의 누적량(수렴된 와도 플릭스와 비례하는 값)을 비교한 그림이다. 본 수치해석 기법에서는 이러한  $\Delta \gamma$ 를 식(6)의 Biot-Savart 적분식과 포텐셜

기저 패널방법을 이용하여 물체표면상의 slip 속도를 구하고 고착조건을 만족시킬 수 있을 때까지 반복계산하여 와도플럭스를 구한다. 기존의 방법에서는 vortex 특이점만을 표면에 분포시키고, 비침투조건과 등가인 물체경계면의 내부면에서의 고착조건을 부여하는 방식을 취하고 있다. 공회스 $\gamma$  분포는 일부 부근점에서의 극값을 제외하고는 거의 일치함을 확인할 수 있다. 이는 유한체적법을 사용하여 얻은 결과에서 이미 그 타당성을 검증받은 바 있는 물체 경계면에서의 와도플럭스의 발생에 대한 반복계산 방법을 Lagrangian 보우텍스 기법에서도 훌륭하게 적용할 수 있음을 의미한다.

<Fig.4>는 시간에 따른 유선과 wake 형성의 모습을 나타낸 그림이다. 격자계를 가지고 있는 유한체적법의 Eulerian 해석과 비교해 보면, T=2에서 실린더 뒤쪽의 wake가 직경의 1/2만큼 형성되고, T=4에서는 wake가 거의 실린더 직경만큼의 크기로 형성되는 모습이 서로 잘 일치함을 확인할 수 있다. 실린더 후류에서 반시계 방향으로 약 70도 가량의 지점에서 2차 와류가 형성되는 것도 확인할 수 있다. <Fig.5>는 시간에 따른 와도contour형상이 발달하는 모습을 나타낸 그림으로서, Eulerian 해석방법의 결과와도 contour형상이 서로 거의 유사함을 확인할 수 있다.

## 5. 결론

와도를 기본 변수로 하는 Lagrangian 보우텍스 방법에 대하여, 2차원 점성유동문제를 해석할 수 있는 수치 기법을 정립하고, 실린더 문제에 적용하여 그 타당성을 검증해 보았다. 격자계를 가지고 있는 와도-속도 정식화를 기저로 한 수치기법 중, 이미 검증한 바 있는, 물체 경계면에서 와도플럭스 발생에 대한 반복계산기법을 본 Lagrangian 보우텍스 방법에 확장 적용하여 유효함을 확인함으로써, 이전 Eulerian 관점의 수치해석 기법에 대한 연구 내용과 연속성을 확보할 수 있게 되었다. 또한, 포텐셜 유동 계산에서 이미 잘 정립되어 있는 패널방법을 도입하여 본 기법에 혼용함으로써 3차원으로 확장할 때, 별도로 개발된 기존의 3차원 포텐셜 유동해석용 수치기법을 그대로 활용할 수 있으므로, 전산프로그램 개발의 효율성을 높일 수 있게 되었다.

향후, 3차원 입자강도교환(PSE) 기법, 와도

이송방정식의 난류 모델링, 보우텍스 입자의 병합과 분리에 대한 기법에 대한 연구가 필요하며, 많은 수의 입자들을 빠르게 처리할 수 있는 'N-body 문제' 대한 연구가 컴퓨터 병렬 처리 기법과 연계하여 병행되어야 한다. 이 논문은 2002년도 한국과학재단이 지원하는 우수공학연구센터과제와 연관하여 연구되었음.

## 참고문헌

- [1] Wu, J. Z. and Wu, J. M., *J. Fluid Mech.*, 254, (1993) pp 183-211
- [2] Rosenhead, L. (ed.), M. J., *Laminar boundary layers*, Oxford Univ. Press, NewYork, (1963)
- [3] Batchelor, G. K., *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge Univ. Press, (1967)
- [4] Speziale, C. G., *J. Comp. Phy.*, 73, (1987) pp 476-480,
- [5] Chorin, A. J., *J. Fluid Mech.* 57, (1973) pp 785-796
- [6] Leonard, A. J., *J. Comp. Phy.*, 37, (1980) pp 289-335
- [7] Greengard, L and Rokhlin, V., *J. Comp. Phy.*, 73, (1987), pp 325-348
- [8] Koumoutsakos, P., Leonard, A. and Pepin, F., *J. Comp. Phy.*, 113, (1994) pp 52-56
- [9] Ploumhans, P. and Winckelmans, G. S., *J. Comp. Phy.*, 165, (2000) pp 354-406
- [10] Jung-Chun Suh, Kwang-Soo Kim, *Fluid Dyn. Res.*, 25, (1999) pp 195-216
- [11] 서정천, 한국전산유체공학회지, 제3권 제1호, (1998) pp 11-21
- [12] 김광수, 서정천, 대한조선학회논문집, 제35권 제4호 (1998) pp 1-10
- [13] Degond, P. and Mas-Gallic, S., *Math of Comput.* 53. (1989) pp 485-507
- [14] Draghicescu, C. I. and Draghicescu, M., *J. Comp. Phy.* 116, (1995) pp 69-78
- [15] Cottet, G-H., and Koumoutsakos, P., *Vortex Methods: Theory and Practice*, Cambridge Univ. Press, (2000)
- [16] Koumoutsakos, P. and Leonard, A., *J. Fluid Mech.*, 296, (1995) pp 1-38