3 차원 공간 객체들의 위상 관계

이성호, 김경호, 김성수, 김경옥
한국전자통신연구원 컴퓨터.소프트웨어연구소
공간정보기술센터
e-mail : sholee@etri.re.kr

Topological Relationships of Three-Dimensional Spatial Features

Seong-Ho Lee, Kyung-Ho Kim, Sung-Soo Kim, and Kyung-Ok Kim
Spatial Information Technology Center
ETRI-Computer & Software Research Laboratory

요 약

이 논문에서는 여러 가지 위상 관계 표현 방법을 바탕으로 3 차원 공간 객체들 간의 위상 관계를 여러 가지 방법으로 표현한다. 지리정보시스템 분야에서 공간 객체들 간의 위상 관계를 정의하는 것은 중요한 연구이다. 위상 관계를 표현하는 기존의 방법들은 2 차원 공간 객체를 대상으로 하고 있다. 좀 더 많은 공간 정보를 제공하기 위해, 3 차원 공간 데이터에 대한 위상 관계를 표현하고 정의한다. 또한, 4-intersection, 9-intersection, dimension extended, calculus-based 방법 등, 여러 연구에서 제시되었던 표현 방법을 사용하여 위상 관계를 정의한다.

1. 서론

'두 나라는 서로 국경을 접하고 있는가?' , ' 이 고속도로는 도시를 가로지르고 있는가?' 와 같은 질의는 가장 일반적이고, 지리정보시스템에서는 널리 사용되는 질의이다. 지리정보시스템에서 공간 객체들의 위상(topology)과 관련된 정보는 그 시스템들을 사용하는 사용자들이 다루고자 하는 기본적인 정보이다[8]. 즉, 공간 객체들의 위상 관계를 다루는 것은 다양한 공간 분석을 가능하게 하는 정보이다.

모든 공간 질의는 객체들의 관계를 결정하는, 올바른 알고리즘을 기술하기 위하여 정형화된 정의가 필요하다. 지리정보시스템이 발전하면서 많은 다양한 어플리케이션들은 자체적으로 공간 질의어를 정의하였다. 대부분의 공간 질의어들은 공간 연산자로 정의된 것들을 위상 연산자에 포함시키기도 하였다. 이 과정에서 위상 연산자의 표현에 대한 정의와 기술이 다루어지질 못하였다.

지금까지의 지리정보시스템에서 사용하였던 공간정보는 주로 평면에서의 데이터 모델, 즉 점(*point*), 선(*line*)과 영역(*area*)을 구축하고 사용하였다. 최근, 원격탐사, 컴퓨터그래픽스, 이미지프로세싱 등의 발달로 복잡한 공간 데이터 획득이 가능해졌다. 이에 따라, 공간 정보 사용자들은 2 차원은 물론 3 차원 공간 데이터를 활용하기를 원하고 있다. 이러한 요구는 공간정보의 수집에서부터, 가공, 분석, 서비스제공에 이르기까지 각 프로세스마다 3 차원 모델을 적용할 수 있도록 확장하고 재 정의하는 것을 필요로 한다.

이 논문에서는 공간 위상 관계에 대해 4-intersection method(4IM)[1], 9-intersection method(9IM)[5], dimension extended method(DEM)[4], calculus-based method(CBM)[4] 등의 다양한 표현 방법을 기술하고 비교한다. 기존의 2 차원 공간 객체에 대한 표현보다는 3 차원 공간 객체에 대해 위상 관계를 정의하고 기술한다. 같은 의미의 관계가 다양한 표현 방법에 의해 정의됨에 따라, 그 위상 관계를 명명하는데 차이가 있다. 따라서 OGC[7]에서 제안한 위상 관계 연산자를 적용하여 정의한다.

2 장에서는 다양한 위상 관계의 표현 방법들을 언급하고, 3 차원 위상 관계에 대한 정의는 3 장에서 기술한다. 끝으로 4 장에서 결론을 내린다.

2. 관련 연구

일반적인 GIS 에서 객체간의 위상 관계는 2 차원 추상 데이터 타입에 중점을 두고 있다. 추상 데이터 타입은 점, 선, 그리고 면을 포함하고 있다. 이 장에서 설명하는 위상 관계는 2 차원 공간($\Re^2$)에서의 관계임을 가정한다. 또한, 모든 종류의 객체들은 닫힌 집합(closed sets)이고 연결되어있다. 즉, 객체들은 두개로 나뉜 객체들의 결합이 아니다. 영역 객체(area feature)는 홀, 구멍이 뚫리지 않은 단지 연결된 면이고, 선 객체는 자기 자신이 교차하지 않는 선이며 순환하거나 두개의 끝점을 가진다. 또 점 객체는 단지 하나의 점만을 가지게 된다.

위상 관계를 정의하기 위해서, 다음과 같은 연산들을 사용한다. 이 연산들은 [1,5,6]에서 정의하고 있다 - *boundary*(∂), *interior*($^\circ$), *exterior*($^-$), *set intersection*($\cap$), *dimension*(*dim*). *dim* 함수는 점집합의 차원수를 반환하거나 공집합일 경우 *nil*(-) 값을 반환한다. 객체의 경계(*boundary*)과 내부(*interior*)는 위상 관계를 묘사하기위한 Egenhofer 의 방법[6]에서 정의하였다. 다음에 선언된 것들은 관계를 표현하기위한 일반적인 정의들이다.

1) ∂P: 점 객체 P 의 *boundary* 는 항상 빈 상태이다.
2) ∂L: 선 객체 L 의 *boundary* 는 선의 두 끝점으로 이루어진다.
3) ∂A: 영역 객체인 A 의 *boundary* 는 그 영역에 포함되는 모든 점으로 이루어진 순환선이다.
4) $\lambda^\circ = \lambda$ □ $\partial\lambda$ (λ: 모든 객체)
5) $\lambda^- = \Re^2$ □ λ

2.1 The 4-intersection method(4IM)

1 차원 공간($\Re^1$)에서의 위상 관계를 분류하기 위한 4-intersection method 은 [1]에 설명되어있고, [6]에서는 2 차원($\Re^2$) 영역 객체들 사이의 위상 관계를 구분하기 위해 같은 방법을 적용하였다. 점과 선 객체를 고려할 때, 이진 관계를 6 개의 그룹으로 나눌 수 있는데, 이 그룹에는 point/pint, point/line, point/area, line/line, line/area, area/area 이 포함된다. 이 방법에서, 위상 관계는 두 객체 과 의 내부와 외곽에 대한 교차를 기본으로 하고 있다. 각각의 교차는 공집합이거나 (empty: ϕ) 공집합이 아니다(non-empty: $\neg\phi$)이며 경우의 수는 2^4 의 조합이 된다. 이러한 관계를 행렬로 나타내면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M = \begin{pmatrix} \partial\lambda_1 \cap \partial\lambda_2 & \partial\lambda_1 \cap \lambda_2^\circ \\ \lambda_1^\circ \cap \partial\lambda_2 & \lambda_1^\circ \cap \lambda_2^\circ \end{pmatrix}$$

2.2 The 9-intersection method(9IM)

이 방법은 4IM 의 확장이다. 이 방법은 공간 객체의 경계, 내부와 외부를 기본으로 한다[5]. 2.1 과 같은 방법으로 여러 관계를 행렬로 나타낼 수 있다.

$$M = \begin{pmatrix} \partial\lambda_1 \cap \partial\lambda_2 & \partial\lambda_1 \cap \lambda_2^\circ & \partial\lambda_1 \cap \lambda_2^- \\ \lambda_1^\circ \cap \partial\lambda_2 & \lambda_1^\circ \cap \lambda_2^\circ & \lambda_1^\circ \cap \lambda_2^- \\ \lambda_1^- \cap \partial\lambda_2 & \lambda_1^- \cap \lambda_2^\circ & \lambda_1^- \cap \lambda_2^- \end{pmatrix}$$

이 방법으로 관계를 나타낼 경우, 공집합과 비공집합으로 결과를 얻는다면 이론적으로 발생 가능한 경우의 수는 2^9 이다. 그러나 몇몇 그룹에서는 예외상황이 발생하여 실제 관계의 수는 감소한다[1,5].

2.3 The dimension extended method(DEM)

이 방법은 공간 객체간의 관계를 2.1 의 4-intersection 를 통해서 얻어진 결과에 대한 차원을 계산하는 방법이다. 따라서 이 방법은 -, 0, 1, 2 의 결과 집합을 가지며 4IM 을 확장한 것이라고 할 수 있다. 이 방법은 [4]에 기술 되어있다. 이 방법 또한 행렬로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} dim(\partial\lambda_1 \cap \partial\lambda_2) & dim(\partial\lambda_1 \cap \lambda_2^\circ) \\ dim(\lambda_1^\circ \cap \partial\lambda_2) & dim(\lambda_1^\circ \cap \lambda_2^\circ) \end{pmatrix}$$

예를 들면, 선과 영역사이의 관계를 DEM 을 이용하여 표현하면 표 1 로 나타낼 수 있다. 예제에서처럼, 교차된 결과의 차원은 두 객체의 최소 차원보다는 높지 않다. 즉, $dim(\partial A) = 1$, $dim(A^\circ) = 2$, $dim(\partial L) = 0$, $dim(L^\circ) = 1$ 식을 성립한다.

표 1 DEM 의 예제

Features	Representing relationships
area/area	$\begin{pmatrix} dim(\partial A_1 \cap \partial A_2) & dim(\partial A_1 \cap A_2^\circ) \\ dim(A_1^\circ \cap \partial A_2) & dim(A_1^\circ \cap A_2^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{-,0,1\} & \{-,1\} \\ \{-,1\} & \{-,2\} \end{pmatrix}$
area/line	$\begin{pmatrix} dim(\partial A_1 \cap \partial L_2) & dim(\partial L_1 \cap L_2^\circ) \\ dim(A_1^\circ \cap \partial L_2) & dim(L_1^\circ \cap L_2^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{-,0\} & \{-,0,1\} \\ \{-,0\} & \{-,1\} \end{pmatrix}$
line/line	$\begin{pmatrix} dim(\partial L_1 \cap \partial L_2) & dim(\partial L_1 \cap L_2^\circ) \\ dim(L_1^\circ \cap \partial L_2) & dim(L_1^\circ \cap L_2^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{-,0\} & \{-,0\} \\ \{-,0\} & \{-,0,1\} \end{pmatrix}$

2.4 The calculus-based method(CBM)

CBM[4]는 5 가지의 관계와 경계 연산자에 대한 정형화된 정의를 이용하여 공간 객체들간의 위상 관계를 표현하였다. 다음에 설명된 정의에서, 등식의 오른쪽은 위상 관계를 포함하는 수식이고, 점집합(point-set) 표현형식은 등식의 오른쪽에 있다.

정의 1. *touch* - 이 관계는 점/점의 경우를 제외한 모든 경우에 적용가능하다.

$$\langle \lambda_1, touch, \lambda_2 \rangle \Leftrightarrow (\lambda_1^\circ \cap \lambda_2^\circ = \emptyset) \wedge (\lambda_1 \cap \lambda_2 \neq \emptyset)$$

정의 2. *in* - 모든 그룹에 적용가능하다.

$$\langle \lambda_1, in, \lambda_2 \rangle \Leftrightarrow (\lambda_1 \cap \lambda_2 = \lambda_1) \wedge (\lambda_1^\circ \cap \lambda_2^\circ \neq \emptyset)$$

정의 3. *cross* - 선/선, 선/영역의 경우 적용한다.

$$\langle \lambda_1, cross, \lambda_2 \rangle \Leftrightarrow dim(\lambda_1^{\circ} \cap \lambda_2^{\circ}) = (max(dim(\lambda_1^{\circ}), dim(\lambda_2^{\circ})) - 1)$$
$$\wedge (\lambda_1 \cap \lambda_2 \neq \lambda_1) \wedge (\lambda_1 \cap \lambda_2 \neq \lambda_2)$$

정의 4. *overlap* - 선/선, 영역/영역의 경우 적용한다.

$$\langle \lambda_1, overlap, \lambda_2 \rangle \Leftrightarrow (dim(\lambda_1^{\circ}) = dim(\lambda_2^{\circ}) = dim(\lambda_1^{\circ} \cap \lambda_2^{\circ})) \wedge$$
$$(\lambda_1 \cap \lambda_2 \neq \lambda_1) \wedge (\lambda_1 \cap \lambda_2 \neq \lambda_2)$$

정의 5. *disjoint* - 모든 그룹에 적용한다.

$$\langle \lambda_1, disjoint, \lambda_2 \rangle \Leftrightarrow \lambda_1 \cap \lambda_2 = \emptyset$$

선 객체 L 의 경계 ∂L은 별개의 두 점으로 구성된 집합이다. 0 차원 객체는 하나의 점에 국한되기 때문에, 각각의 끝점을 접근할 수 있는 연산자(각각 f 와 t 로 명명된)가 필요하다. 따라서 다음의 정의가 추가된다.

정의 6. 영역 객체 A 에 대한 경계(*boundary*) 연산자 b 순서쌍(A, b)은 순환 선 ∂A를 반환한다.

정의 7. 선 객체 L에 대한 경계 연산자 f, t
순서쌍 (L, f)와 (L, t)는 ∂L에 해당되는 두개의 점 객체를 반환한다.

2.5 The DEM + the 9IM

앞에서 정의된 여러 가지 위상 관계를 표현하는 방법 중에서 DEM 과 9IM 의 방법을 혼합한 표현 방법이다 [3]. 즉 이 새로운 방법은 두 객체들의 경계, 내부와 외부의 교차시의 차원을 고려하였다. 이 방법을 나타내는 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$M = \begin{pmatrix} dim(\partial\lambda_1 \cap \partial\lambda_2) & dim(\partial\lambda_1 \cap \lambda_2^{\circ}) & dim(\partial\lambda_1 \cap \lambda_2^{-}) \\ dim(\lambda_1^{\circ} \cap \partial\lambda_2) & dim(\lambda_1^{\circ} \cap \lambda_2^{\circ}) & dim(\lambda_1^{\circ} \cap \lambda_2^{-}) \\ dim(\lambda_1^{-} \cap \partial\lambda_2) & dim(\lambda_1^{-} \cap \lambda_2^{\circ}) & dim(\lambda_1^{-} \cap \lambda_2^{-}) \end{pmatrix}$$

2 차원 공간상에서 유효한 객체는 점, 선, 영역이기 때문에 9 intersection 집합의 차원은 {-, 0, 1, 2} 값으로 가정할 수 있다. 한 예로 선/선 그룹의 경우를 이 방법을 이용하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M = \begin{pmatrix} \{-,0\} & \{-,0\} & \{-,0\} \\ \{-,0\} & \{-,0,1\} & \{-,1\} \\ \{-,0\} & \{-,1\} & 2 \end{pmatrix}$$

3. 3 차원 공간 객체의 위상 관계

OGC 는 Geometry 클래스의 위상 관계를 위한 연산자를 *Equal, Disjoint, Intersect, Touch, Cross, Within, Contain, Overlap* 과 같이 명명했다. 이들 위상 관계는 2 차원 상황에 맞도록 정의되었다. 이장에서는 3 차원 공간 객체들의 위상 관계를 여러 가지 예를 들어 표현하고 정의한다.

3 차원 선과 육면체가 가질 수 있는 위상 관계는 그림 1 과 같이 나열할 수 있다. 이 그림에서, 모든 경우의 위상 관계는 OGC 에서 제안한 위상 관계로 분류할 수 있다. 점, 선, 면과 입방체의 관계를 표현하면 다음 위상 관계들과 같다.

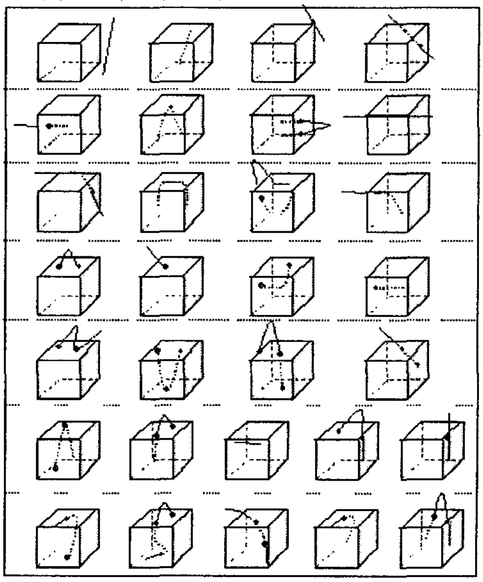
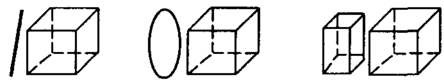


그림 1 *line/solid* 의 위상 관계들

3.1 *Disjoint*

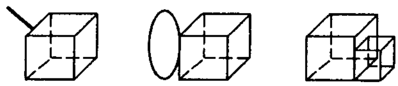
이 위상관계는 두 객체가 서로 *disjoint* 되는지 여부를 조사한다.



4IM	9IM	DEM	DE+9IM
$\begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \emptyset & \emptyset & \neg\emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \neg\emptyset \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & - \\ - & - \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & - & (0,1,2) \\ - & - & (1,2,3) \end{pmatrix}$
$\langle \lambda, disjoint, s \rangle \Leftrightarrow \lambda \cap s = \phi, \lambda \in P, L, A, S$			

3.2 *Touch*

그림에서처럼, 이 관계는 두 객체의 접점은 점, 선과 면이 될 수 있다. *touch* 위상관계에서는 점/점 그룹은 예외이다.

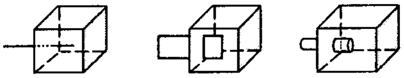


4IM	9IM	DEM	DE+9IM
$\begin{pmatrix} \neg\emptyset & \emptyset \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \neg\emptyset & \emptyset & \neg\emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \neg\emptyset \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (0,1,2) & - \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} (0,1,2) & - & (0,1,2) \\ - & - & (-,2,3) \end{pmatrix}$

$\langle \lambda, touch, s \rangle \Leftrightarrow (\lambda^\circ \cap s^\circ = \phi) \wedge (\lambda \cap s \neq \phi), \lambda \in P, L, A, S$

3.3 *Cross*

이 관계는 두 객체가 서로 *cross* 되는지를 계산하는 관계이다.



4IM	9IM	DEM	DE+9IM
$\begin{pmatrix} \emptyset & \neg\emptyset \\ \neg\emptyset & \neg\emptyset \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \emptyset & \neg\emptyset & \neg\emptyset \\ \neg\emptyset & \neg\emptyset & \neg\emptyset \\ \neg\emptyset & \neg\emptyset & \neg\emptyset \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & (0,1,2) \\ (0,1,2) & (,1,2,3) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & (0,1,2) & (0,1,2) \\ (0,1,2) & (1,2,3) & (1,2,3) \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Case $\lambda \in L$,or S, $\lambda \in S$

$\langle \lambda, cross, s \rangle \Leftrightarrow (dim(\lambda^\circ \cap s^\circ) < max(dim(\lambda^\circ), dim(s^\circ))) \wedge$

$(\lambda \cap s \neq \lambda) \wedge (\lambda \cap s \neq s)$

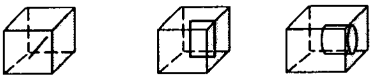
Case λ, s$\in S$

$\langle \lambda, cross, s \rangle \Leftrightarrow (dim(\lambda^\circ \cap s^\circ) = 3) \wedge (\lambda \cap s \neq \lambda) \wedge$

$(\lambda \cap s \neq s)$

3.4 *Within(in)*

이 위상관계는 주어진 지오메트리가 다른 지오메트리에 *within(in)*되는지를 계산한다.

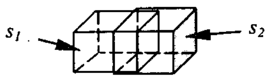


4IM	9IM	DEM	DE+9IM
$\begin{pmatrix} \emptyset & \neg\emptyset \\ \emptyset & \neg\emptyset \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \emptyset & \neg\emptyset & \emptyset \\ \emptyset & \neg\emptyset & \emptyset \\ \neg\emptyset & \neg\emptyset & \neg\emptyset \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & (0,1,2) \\ - & (,1,2,3) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} - & (0,1,2) & - \\ - & (1,2,3) & - \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\langle \lambda, in, s \rangle \Leftrightarrow (\lambda \cap s = \lambda) \wedge (\lambda^\circ \cap s^\circ \neq \phi), \lambda \in P, L, A, S$

3.5 *Overlap*

이 관계는 두 객체가 *overlap* 되는지를 조사한다.



4IM	9IM	DEM	DE+9IM
$\begin{pmatrix} \neg\emptyset & \neg\emptyset \\ [illegible] & [illegible] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \neg\emptyset & \neg\emptyset & \neg\emptyset \\ \neg\emptyset & \neg\emptyset & \neg\emptyset \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ [illegible] & [illegible] \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ [illegible] & [illegible] & [illegible] \end{pmatrix}$

Case s_1, s_2 $\in S$

$\langle s_1, overlap, s_2 \rangle \Leftrightarrow (dim(s_1^\circ) = dim(s_2^\circ) = dim(s_1^\circ \cap s_2^\circ)) \wedge$

$(s_1 \cap s_2 \neq s_1) \wedge (s_1 \cap s_2 \neq s_2)$

3.6 *Contain*

이것은 주어진 객체가 다른 객체를 *contain* 하는지를 조사하는 관계로, *within* 과 역관계이다.

$$\langle \lambda_1, contains, \lambda_2 \rangle \Leftrightarrow \langle \lambda_2, within, \lambda_1 \rangle$$

3.7 *Intersect*

이 관계는 *disjoint* 의 반대인 관계로, 객체들이 *intersect* 되는 지를 조사한다.

$$\langle \lambda_1, intersect, \lambda_2 \rangle \Leftrightarrow! \langle \lambda_1, disjoint, \lambda_2 \rangle$$

4. 결론

공간 질의에서 공간 위상 관계를 표현하는 방법은 다양하다. 기존의 방법들은 2 차원 공간 객체들을 대상으로 위상 관계를 나타내는 방법들이 전부였다. 사용자들은 다차원 공간상에서의 표현 방법, 정의와 분석을 요구하고 있기 때문에, 이 논문에서 3 차원 공간 객체들간의 위상 관계를 보였다. 또한 4IM, 9IM, DEM, CBM, DE+9IM 과 점-집합 표현 등의 기존의 여러 방법들을 통하여 3 차원 공간 객체들의 위상 관계를 정의하였다.

참고문헌

[1] David V. Pullar and Max J. Engenhofer, Toward formal definitions of topological relations among spatial objets. *In Proceeding of the 3rd International Symposium on Spatial Data Handling, Sydney*, Australia, pages 225-241, Columbus, OH, August 1988. International Geographical Union IGU.

[2] Eliseo Clementini, and Paolino Di Felice, "Spatial Operators", *ACM SIGMOD Record*, Vol.29, Sep., 2000.

[3] Eliseo Clementini, Paolino Di Felice, and Peter van Oosterom, A Comparison of methods for representing topological relationships, Information Sciences, 3:149-178, 1995.

[4] Eliseo Clementini, Paolino Di Felice, and Peter van Oosterom. A small set of formal topological relationships suitable for end-user interaction. In D. Abel and B. C. Ooi, editors, *Third International Symposium on Large Spatial Databases*, Lecture Notes in Computer Science no.692, pages 277-295, Singapore, June 1993. Springer-Verlag.

[5] Max J. Egenhofer and John R. Herring. Categorizing binary topological relationships between regions, lines, and points in geographic databases. Technical report, Department of Surveying Engineering, University of Maine, Orono, Me, 1991.

[6] Max J. Egenhofer and Robert D. Franzosa. Point-set topological spatial relations. *International Journal of Geographical Information Systems*, 5(2):161-174, 1991.

[7] Open GIS Consortium, OpenGIS Simple Features Specification for SQL, URL:http://www.opengis.org/public/abstract.html, 1998.

[8] Rober Laurini and Derek Thompson. Fundamentals of Spatial Systems. Academic Press, San Diego, CA, 1992.