

완제품에 대한 수요가 Compound Poisson 과정에 따라 발생하는 CONWIP System의 성능분석

(Performance Evaluation of a CONWIP System with Compound Poisson Demands)

박찬우, 신경화, 이효성

Chan-Woo Park, Kyung-Hwa Shin, Hyo-Seong Lee

경희대학교 기계·산업시스템공학부

Department of Industrial Engineering, Kyung Hee University

Abstract

In this study we consider a flow-line CONWIP System with Compound Poisson Demands. The processing times of each workstation follow a Coxian-2 distribution. The demands that are not satisfied instantaneously are either backordered or lost according to the number of backordered demands that exist at their arrival instants. For this system we develop an approximation method to obtain the performance measures such as steady state probabilities of the number of parts at each station, the average number of backordered demands and the proportion of the lost demands. Comparisons with simulation have shown that the approximate method provides fairly good results.

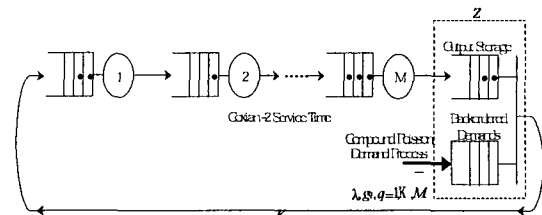
1. 서론

CONWIP 제어방식은 견인 제어방식(pull control mechanism)과 밀어내기 제어방식(push control mechanism)의 혼합(hybrid) 시스템으로 제어방식이 용이하면서도 고객만족도 측면에서의 성능이 우수한 것으로 판명되어 Spearman, Duenyas, Hopp 등 많은 학자들에 의해 연구되었다[2,3]. 최근 이정은과 이효성[4]는 완제품에 대한 수요가 복합 포아송 과정에 따라 발생하는 직렬형 CONWIP 시스템을 분석하였다. 이 연구에서는 각 기계에서의 가공시간은 지수분포를 따르며, 완제품에 대한 수요가 발생했을 때 재고가 존재하지 않으면 수요는 추후납품(backorder)이 가능하다고 가정하였다. 이와 같은 가정 하에서 이들은 재공품 수의 안정상태확률, 추후납품되는 수요의 비율, 대기중인 미충족수요의 평균대기

시간 등 시스템의 중요한 성능척도를 구하는 근사적 알고리즘을 개발하였다.

본 연구에서는 이정은과 이효성[4]의 연구를 확장하여 각 기계에서의 가공시간이 Coxian 분포를 따르며, 수요가 도착하였을 때 재고가 존재하지 않으면 추후납품과 유실이 모두 가능한 경우의 CONWIP 시스템에 대한 분석을 시도하고자 한다.

2. 연구 내용 및 범위



[그림 1] Compound Poisson 수요를 가지는 CONWIP 시스템

본 연구에서 분석하고자 하는 시스템은 M개의 작업장과 완제품 재고창고로 구성된 흐름식 생산라인(flow line system)으로 각 작업장에는 1대의 기계가 존재한다. 작업장 1에서 최초의 가공을 받은 부품은 작업장 2, 3, ...에서 후속 가공을 거친 후 작업장 M에서 최종 가공을 받게되며, 가공을 마친 부품은 완제품으로 출하되어 완제품 재고창고에 저장된다. 본 시스템에서는 재공품 재고(완제품 포함)의 수를 일정하게 유지하기 위하여 K개의 간판을 사용하고 있으며, 수요가 발생하여 완제품이 창고에서 인출되면 완제품에 부착되어 있던 간판은 즉시 작업장 1로 이동해 작업지시서(production authorization card)의 역할을 한다. 완제품에 대한 수요는 복합 포아송 과정

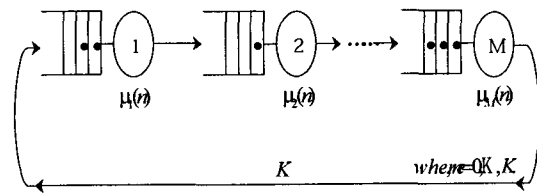
한국과학기술원(KAIST) 2002년 5월 3일~4일에 따라 발생하고 완제품에 대한 수요가 생겼을 때 재고가 존재하면, 제품의 수요는 즉시 충족될 수 있으나, 수요를 충족할 완제품 재고가 존재하지 않고 대기 중인 미충족수요의 수가 B미만이면 새로 도착한 수요는 추후납품을 위해 대기상태에 들어가게 된다. 그러나 이미 대기 중인 미충족수요의 수가 B를 초과하면, 새로 도착한 수요는 유실되는 것으로 가정한다. 따라서 B의 값이 무한히 크면 본 모형은 미충족수요의 추후납품이 가능한 모형으로 귀착되고 B의 값이 0이면 미충족수요가 모두 유실되는 모형으로 귀착된다.

본 연구에서는 작업장 i 의 가공시간은 Coxian-2 분포를 따르며, 각 작업장에서의 기계고장은 발생하지 않고, 각 작업장 및 완제품 저장창고의 크기는 칸반의 수보다 커 봉쇄가 발생하지 않음을 가정한다. 또한 수요의 단위 시간당 평균 도착율은 λ 이고, 일회 수요의 크기는 확률변수 G 로 표시되며, 수요의 최대크기는 \bar{M} 이고, 수요의 크기가 q 일 확률은 g_q 로 표기한다. ($q=1,2,\dots, \bar{M}$)

3. CONWIP 시스템의 분석

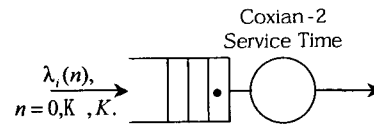
본 연구에서 분석하고자 하는 CONWIP 시스템에서는 시스템 내에 존재하는 칸반 수가 K 로 고정되어 있으므로 칸반을 고객으로 간주하면 폐쇄형 대기 네트워크로 모델링이 가능하며, 완제품이 저장된 장소를 작업장 Z 라 하면, 폐쇄형 대기네트워크는 $M+1$ 개의 작업장으로 구성됨을 알 수 있다. 본 연구에서는 이와같은 폐쇄형 대기네트워크의 분석을 위하여 승법형 근사법(product-form approximation method)을 사용하고자 한다[1,5]. 승법형 근사법은 폐쇄형 대기 네트워크를 몇 개의 하부네트워크로 분해한 후, 각각의 하부네트워크를 상태의존적 서비스율을 갖는 지수형 서버로 치환하여 폐쇄형 대기네트워크를 승법형 대기네트워크로 근사화시키는 기법이다. 승법형 근사법에서는 이와 같이 근사화된 승법형 네트워크를 동등 승법형 대기네트워크라 한다. 승법형 근사법이 성공적으로 적용되기 위해서는 하부네트워크 간에 고객의 이동이 집단으로 이루어져서는 안됨이 잘 알려져 있다. 본 연구 모형에서는 수요의 도착과정이 복합 포아송 과정을 따르므로, 작업장 Z 와 작업장 1 간에는 한 순간에 2개 이상의 칸반이 이동할 수 있으므로 작업장 Z 와 작업장 1을 하나의 하부네트워크에 포함시켜야만 한다. 본 연구에서는 작업장 Z 와 작업장 1을 하부네트워크 R^1 로, 나머지 각각의 작업장을 독립적인 하부네트워크 R^i 라 정의함으로써($i=2,3,\dots,M$) 분석하고자 하는 폐쇄형 대기 네트워크를 M 개의 하부

네트워크로 분해하고자 한다. 하부 네트워크 R^i 를 상태 종속 서비스율이 $\mu_i(n)$ 인 지수형 서버로 치환하면, 동등 승법형 대기네트워크는 그림 2와 같이 표현된다.



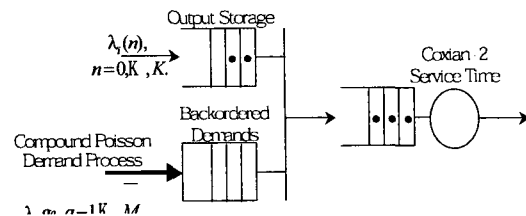
[그림2] 동등 승법형 대기네트워크

승법형 네트워크의 상태 종속 서비스율 $\mu_i(n)$ 을 구하기 위하여는 하부네트워크 R^i 를 상태종속 도착율이 $\lambda_i(n)$ 이고, 도착간격이 지수분포를 따르는 개방형 대기 네트워크라 간주하여 분석한다. 본 연구에서는 R^i 를 제외한 각 하부네트워크는 그림[2]와 같이 개방형 대기행렬 시스템으로 표현되며, 이는 $M/C_2/1/K$ 대기행렬 시스템의 분석기법을 이용하여 안정 상태확률 $P_i(n)$ 를 계산할 수 있다.



[그림3] 하부네트워크 R^i , $i=2,3,\dots,M$

하부네트워크 R^1 은 [그림 4]과 같이 2개의 대기행렬 시스템으로 구성되어 있으므로 상태의 수가 유한한 연속시간 마코프체인(continuous time Markov Chain)으로 모델링이 가능하다.

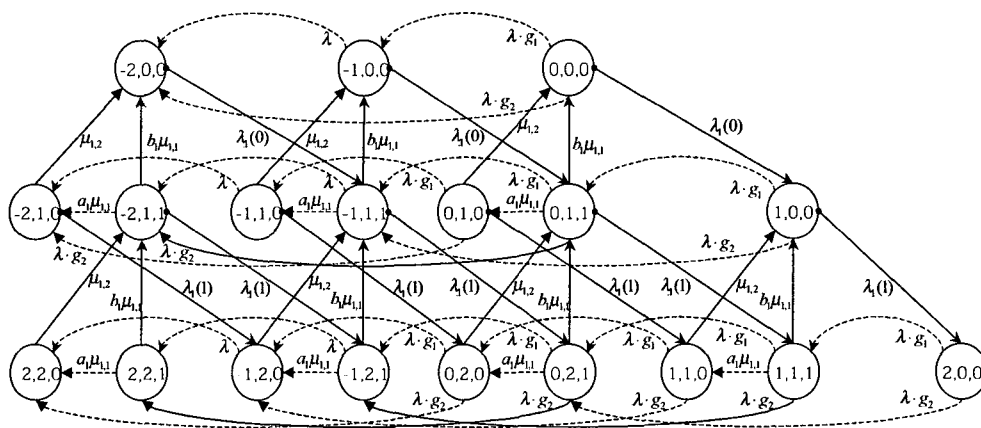


[그림4] 하부네트워크 R^1

하부네트워크 R^1 의 상태를 정의하기 위하여 n_1 을 작업장 Z 의 간판 수, n_2 을 작업장 1의 간판 수, 그리고 n_3 을 Coxian-2 분포의 1단계에서 가공 중에 있는 작업장 1의 기계를 나타낸다고 하면, 하부네트워크 R^1 의 상태는 $(n_1,$

n_2, n_3)로 표현되므로 하부네트워크 R^i 은 3차원 마코프체인으로 분석 가능하다. 이와 같이 상태가 정의되었을 때, $K=2, B=2, \bar{M}=2$ 일 경우의 하부네트워크 R^i 의 상태 전이를 다 이어그램은 [그림 5]와 같이 나타내어진다.

동등 승법형 대기네트워크의 서비스율 $\mu_i(n)$ 이 구해지면 승법형 대기네트워크의 분석에 사용될 수 있는 임의의 알고리즘을 이용하여 서버 i 의 상태종속 산출을 $X_i(n)$ 을 구할 수 있다. Convolution 알고리즘을 이용하면



[그림5] 전이올다이어그램 ($K=2, B=2, \bar{M}=2$)

3차원 마코프체인의 안정상태확률은 시스템 평형방정식을 풀면 구할 수 있으나, 일반적으로 평형방정식의 형태는 매우 복잡하여 K 와 B 의 값이 커지면 풀기가 쉽지 않다. 본 연구에서는 시스템 평형방정식을 효율적으로 풀기 위하여 순환적 기법을 이용하였다. 하부네트워크 R^i 을 분석하기 위한 순환적기법의 적용과정은 복잡하므로 지면관계상 본 연구에서는 생략한다.

하부네트워크 R^i 의 안정상태확률 $P_i(n)$ 이 구해지면, 하부네트워크에 존재하는 간판의 수가 n 일 경우의 상태종속 산출율은 다음과 같은 방법으로 계산할 수 있다.

$$v_i(n) = \begin{cases} 0, & \text{if } n=0, \\ \lambda_i(n-1) \frac{P_i(n-1)}{P_i(n)}, & \text{if } n=1,2,\dots,K. \end{cases} \quad (1)$$

하부네트워크 R^i 의 상태종속 산출율 $v_i(n)$ 이 구해지면 동등 승법형 대기네트워크를 구성하는 서버 i 의 상태종속 서비스율 $\mu_i(n)$ 은 다음과 같이 구해진다.

$$\mu_i(n) = v_i(n), \quad n=0,1,\dots,K, \quad i=1,2,\dots,M. \quad (2)$$

서버 i 의 상태종속 산출율은 다음식에 의해 구할 수 있다.

$$X_i(n) = \begin{cases} e_i \frac{G_{M/i}(K-n-1)}{G_{M/i}(K-n)} & n=0,1,\dots,K-1 \\ 0 & n=K \end{cases} \quad (3)$$

여기서 e_i 는 서버 i 의 상대적 방문율이고, $G_{M/i}$ 는 M 개의 서버중 서버 i 를 제외하고 계산한 정규화 상수이다.

동등 승법형 대기네트워크를 구성하는 서버 i 의 상태종속 산출율이 구해지면 하부네트워크 i 의 상태종속 도착율은 다음과 같이 구해진다.

$$\lambda_i(n) = X_i(n), \quad n=0,1,\dots,K, \quad i=1,2,\dots,M \quad (4)$$

이상과 같이 하부네트워크의 안정상태확률이 구하여지면, 하부네트워크의 상태종속 산출율을 식(1)로부터 계산할 수 있고, 이 값은 식(2)로부터 동등 대기네트워크의 상태종속 서비스율로 사용된다. 또한 동등 대기네트워크의 상태종속 서비스율이 구해지면 식(3)으로부터 동등 대기네트워크의 상태종속 산출율이 계산되어 질 수 있고, 이 값은 식(4)로부터 하부네트워크의 상태종속 도착율로 사

한국과학기술원(KAIST) 2002년 5월 3일~4일
용될 수 있다. 승법형근사법에서는 이와 같은
과정을 $\mu_i(n)$ 의 값이 수렴할 때까지 반복 수
행한다.

3. 시스템 성능척도

본 논문에서는 작업장 Z와 작업장 1의 안
정상태확률 $P_z(n)$ 과 $P^m(n)$, 재고창고의 평균 재
고량 \overline{FP} 와 평균 미 충족 수요의 수 \overline{BP} 를
계산하였다. 이외에도 제품의 수요가 즉시 만
족될 확률(F), 제품의 수요가 수용될 확률
(SL), 제품의 수요가 대기할 확률(P_b)을 계산
하였으며, 시스템내의 평균 대기시간과 미 충
족수요의 평균 대기시간, 작업장에서의 평균
재공품의 수, 기계의 이용율(U_i)등을 계산하
였다.

고객 집단에 대한 시스템 성능척도로써는 도
착한 고객의 집단이 수용될 확률을 계산한 다
음, 고객집단이 수용되었다는 가정 하에 도착
한 고객 집단의 전체 수요가 즉시 만족될 확
률을 계산하였다. 각각의 시스템 성능척도를
구하는 과정은 지면관계상 생략한다.

4. 연구결과

본 연구에서 개발한 근사적 기법의 정확도
를 실험하기 위하여 여러 예제에 대하여 시뮬
레이션 결과와 비교하여 보았다. 시뮬레이션
의 종료조건으로 시뮬레이션 시간을 10^6 로 설
정하여 10번 반복하였고, 알고리즘의 종료조
건은 10^6 이하로 설정하였다. 본 연구에서 실
험한 예제에서 알고리즘은 10번 이내의 반복
에서 수렴함을 관측할 수 있었고, 모든 예제
에서 수렴함을 볼 수 있었다. 본 연구에서는
대표적인 4개의 파라미터를 변화시키면서 실
험해 보았는데, 첫째 λ 의 값을 변화시켜 보
았고, 둘째로 K의 값, 세 번째로 B의 값을 변
화시켜보았다. 마지막 네 번째 실험에서는 \overline{M}
의 값을 변화시키면서, 시뮬레이션과의 성능
치를 비교 분석하였다.

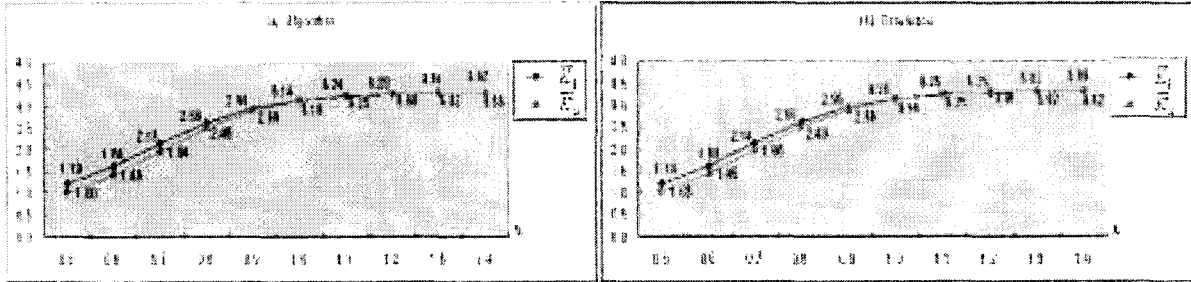
아래의 그림에서 볼 수 있듯이 본 연구에서
제안된 알고리즘은 수치가 매우 작은 경우를
제외하고는 상대 오차율 5%이내의 정확한 값
을 산출하였다. 먼저 λ 의 값을 변화시켜 보았
을 때, 시스템의 성능 치는 시뮬레이션과 알
고리즘에서 거의 유사하게 나타남을 확인할
수 있다. 또한 중요한 몇 개의 성능척도를 나
타내 보면 <표 1>, <표 2>와 같다. K의 값을
변화시킨 경우에도 성능 치가 [그림 7]에 나
타나 있으며 다른 2개의 예제 군 역시 위의
결과와 같이 오차율이 5%로 정확도가 상당히
좋음을 볼 수 있으나 지면 관계상 생략하기로

한다.

본 연구에서 제안된 근사적 기법은 일반적으
로 만족할만한 수준의 정확한 해를 산출해 줌
을 볼 수 있었다. 수요가 집단으로 발생하는
경우의 CONWIP 시스템을 분석할 수 있는 특
별한 대안이 존재하지 않는 상황에서 본 연구
에서 제안한 분석기법은 상대 오차율이 상당
히 적은 수치에 지나지 않으므로 시뮬레이션
을 대신할 유효한 수리적 기법이 될 수 있을
것으로 판단한다.

[참고 문헌]

- [1] Baynat, B. and Y. Dallery, "A Unified View of Product-form Approximation Techniques for General Closed Queueing Networks," *Performance Evaluation* vol.18(1993), pp.205-224.
- [2] Duenyas, I. and W. J. Hopp, "CONWIP Assembly System with Deterministic Processing and Random Outages," *IIE Transactions*, vol. 24. No.4(1992), p.97-111.
- [3] Duenyas, I., W.J.Hopp and M.L. Spearman, "Characterizing the Output Process of a CONWIP Line with Deterministic Processing and Random Outages," *Mgmt. Sci.*, vol.39(1993), pp.975-988.
- [4] Lee, J. E. and Lee, H. S. (1998), Approximate Analysis of a CONWIP system with Compound Poisson Demands, *Journal of the Korean Operations Research and Management Science*, 23(3), 153-168.
- [5] Marie, R.A. "An Approximate Analytical Method for General Queueing Networks," *IEEE Trans. Soft. Eng.* SE-5(1979), pp. 530-538.



[그림 6] 작업장의 평균 재공품 수(예제 가 군)

$M = 3, K = 10, B = 10, \bar{M} = 2, g_1 = g_2 = 1/2, \mu_{i,1} = \mu_{i,2} = 2, a_i = 0.3, i = 1, K, M.$

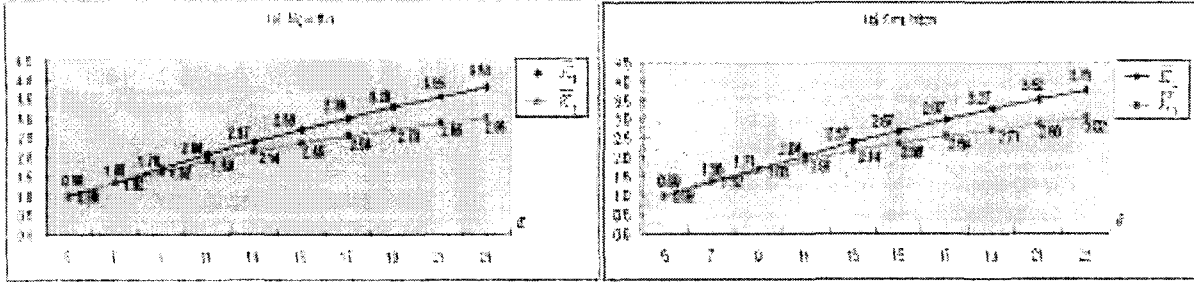
λ	Algorithm (Relative Error (%))							Simulation (95% Confidence Interval)						
	\overline{FP}	\overline{BP}	F	SL	P_s	\overline{W}	\overline{W}_s	\overline{FP}	\overline{BP}	F	SL	P_s	\overline{W}	\overline{W}_s
0.5	6.7860 (0.2596)	0.0758 -2.5707	0.9518 (0.1789)	0.9997 (0.0000)	0.0479 -3.2323	0.1011 -2.5072	2.1089 (0.7308)	6.7804 ($\nu - 0.0028$)	0.0778 ($\nu - 0.0004$)	0.9501 ($\nu - 0.0002$)	0.9997 ($\nu - 0.0000$)	0.0495 ($\nu - 0.0002$)	0.1037 ($\nu - 0.0000$)	2.0936 ($\nu - 0.0034$)
0.6	5.5116 -0.0345	0.3066 (1.5905)	0.8658 -0.0231	0.9975 -0.0200	0.1318 (0.0759)	0.3415 (1.0067)	2.9853 (1.5755)	5.5135 ($\nu - 0.0023$)	0.3018 ($\nu - 0.0005$)	0.8660 ($\nu - 0.0002$)	0.9977 ($\nu - 0.0000$)	0.1317 ($\nu - 0.0002$)	0.3361 ($\nu - 0.0000$)	2.5452 ($\nu - 0.0018$)
0.7	3.9839 (0.1056)	0.9272 (0.2704)	0.7009 (0.3834)	0.9879 (0.0709)	0.2839 -1.2307	0.8940 (0.3592)	3.1437 (1.5046)	3.9767 ($\nu - 0.0020$)	0.9247 ($\nu - 0.0012$)	0.7042 ($\nu - 0.0009$)	0.9886 ($\nu - 0.0000$)	0.2844 ($\nu - 0.0003$)	0.8908 ($\nu - 0.0011$)	3.0371 ($\nu - 0.0021$)
0.8	2.4550 (0.6560)	2.0356 (0.4065)	0.4930 (0.8187)	0.9302 -0.2079	0.4672 -1.2680	1.8221 (0.6074)	3.7451 (1.6929)	2.4300 ($\nu - 0.0018$)	2.0911 ($\nu - 0.0014$)	0.4800 ($\nu - 0.0002$)	0.9522 ($\nu - 0.0000$)	0.4732 ($\nu - 0.0002$)	1.8111 ($\nu - 0.0013$)	3.6825 ($\nu - 0.0010$)
0.9	1.2853 (1.0765)	3.6235 (0.0580)	0.2936 (1.5374)	0.9098 -0.3723	0.6192 -1.2598	2.9504 (0.4420)	4.2350 (1.3395)	1.2726 ($\nu - 0.0015$)	3.6214 ($\nu - 0.0021$)	0.2862 ($\nu - 0.0009$)	0.9132 ($\nu - 0.0001$)	0.6271 ($\nu - 0.0002$)	2.9374 ($\nu - 0.0019$)	4.2777 ($\nu - 0.0013$)
1.0	0.6000 (4.3660)	5.0569 (0.3265)	0.1512 (3.2082)	0.8450 (0.4477)	0.6009 -1.2101	3.9956 (0.1202)	4.8673 (0.8934)	0.5749 ($\nu - 0.0007$)	5.0825 ($\nu - 0.0018$)	0.1465 ($\nu - 0.0001$)	0.8488 ($\nu - 0.0001$)	0.7024 ($\nu - 0.0001$)	3.9918 ($\nu - 0.0019$)	4.8242 ($\nu - 0.0015$)
1.1	0.2658 (7.5678)	6.1836 (0.5304)	0.0739 (7.2509)	0.7786 -0.4857	0.7047 -1.2195	4.8133 (0.6587)	5.3182 (0.6587)	0.2471 ($\nu - 0.0004$)	6.2184 ($\nu - 0.0011$)	0.0689 ($\nu - 0.0001$)	0.7824 ($\nu - 0.0001$)	0.7134 ($\nu - 0.0001$)	4.8170 ($\nu - 0.0013$)	5.2834 ($\nu - 0.0014$)
1.2	0.1173 14.5509	6.9778 (0.7284)	0.0356 (13.0159)	0.7175 (0.4026)	0.6818 (1.0006)	5.4030 (0.3247)	5.6854 (0.2989)	0.1024 ($\nu - 0.0004$)	7.0290 ($\nu - 0.0021$)	0.0315 ($\nu - 0.0001$)	0.7204 ($\nu - 0.0001$)	0.6889 ($\nu - 0.0001$)	5.4206 ($\nu - 0.0023$)	5.6684 ($\nu - 0.0019$)
1.3	0.0531 22.6329	7.5337 (0.6947)	0.0174 (20.0000)	0.6537 (0.2855)	0.6462 (0.7526)	5.8215 (0.4039)	5.9785 (0.0619)	0.0433 ($\nu - 0.0002$)	7.5864 ($\nu - 0.0009$)	0.0145 ($\nu - 0.0000$)	0.6656 ($\nu - 0.0001$)	0.6511 ($\nu - 0.0001$)	5.8451 ($\nu - 0.0012$)	5.9748 ($\nu - 0.0011$)
1.4	0.0249 27.0923	7.9303 (0.4394)	0.0087 (22.5362)	0.6167 (0.3877)	0.6080 -0.6539	6.1231 (0.0559)	6.2111 (0.2178)	0.0195 ($\nu - 0.0002$)	7.9653 ($\nu - 0.0000$)	0.0071 ($\nu - 0.0000$)	0.6191 ($\nu - 0.0001$)	0.6120 ($\nu - 0.0001$)	6.1265 ($\nu - 0.0014$)	6.1978 ($\nu - 0.0015$)

<표 1> 예제 가 군의 제품 및 개인별 고객에 대한 시스템 성능척도

$M = 3, K = 10, B = 10, \bar{M} = 2, g_1 = g_2 = 1/2, \mu_{i,1} = \mu_{i,2} = 2, a_i = 0.3, i = 1, K, M.$

λ	Algorithm (Relative Error (%))						Simulation (95% Confidence Interval)					
	BP^s	F^s	SL^s	P_s^s	\overline{W}^s	\overline{W}_s^s	BP^s	F^s	SL^s	P_s^s	\overline{W}^s	\overline{W}_s^s
0.5	0.0549 -2.4867	0.9484 (0.1902)	0.9998 (0.0000)	0.0514 -3.3835	0.1098 -2.4000	2.1336 (0.8079)	0.9563 ($\nu - 0.0003$)	0.9466 ($\nu - 0.0002$)	0.9998 ($\nu - 0.0000$)	0.0532 ($\nu - 0.0002$)	0.1125 ($\nu - 0.0007$)	2.1165 ($\nu - 0.0035$)
0.6	0.2199 (1.6644)	0.8592 -0.0233	0.9983 -0.0100	0.1391 (0.0719)	0.3672 (1.7175)	2.6345 (1.5965)	0.2163 ($\nu - 0.0004$)	0.8594 ($\nu - 0.0002$)	0.9984 ($\nu - 0.0000$)	0.1390 ($\nu - 0.0002$)	0.3610 ($\nu - 0.0006$)	2.5931 ($\nu - 0.0019$)
0.7	0.6647 (0.4686)	0.6974 (0.3742)	0.9913 -0.0706	0.2939 (1.1104)	0.9579 (0.5458)	3.2306 (1.5944)	0.6616 ($\nu - 0.0008$)	0.6948 ($\nu - 0.0003$)	0.9920 ($\nu - 0.0000$)	0.2972 ($\nu - 0.0003$)	0.9527 ($\nu - 0.0012$)	3.1799 ($\nu - 0.0022$)
0.8	1.5140 (0.5112)	0.4828 (0.8565)	0.9709 -0.1851	0.4881 -1.1943	1.9493 (0.6974)	3.8775 (1.7310)	1.5033 ($\nu - 0.0011$)	0.4787 ($\nu - 0.0002$)	0.9727 ($\nu - 0.0000$)	0.4940 ($\nu - 0.0002$)	1.9358 ($\nu - 0.0014$)	3.8115 ($\nu - 0.0012$)
0.9	2.6398 (0.1290)	0.2822 (1.5839)	0.9324 -0.3953	0.6502 -1.2304	3.1458 (0.5241)	4.5110 (1.3685)	2.6364 ($\nu - 0.0016$)	0.2778 ($\nu - 0.0003$)	0.9361 ($\nu - 0.0001$)	0.6583 ($\nu - 0.0002$)	3.1294 ($\nu - 0.0020$)	4.4501 ($\nu - 0.0014$)
1.0	3.7367 -0.1843	0.1455 (3.4115)	0.8815 (0.4517)	0.7361 -1.1681	4.2388 (0.2673)	5.0765 (1.0008)	3.7436 ($\nu - 0.0015$)	0.1407 ($\nu - 0.0002$)	0.8855 ($\nu - 0.0001$)	0.7448 ($\nu - 0.0001$)	4.2275 ($\nu - 0.0020$)	5.0262 ($\nu - 0.0016$)
1.1	4.6214 -0.4309	0.0705 (7.4695)	0.8278 -0.5640	0.7573 -1.2647	5.0754 (0.1421)	5.5476 (0.8301)	4.6414 ($\nu - 0.0010$)	0.0656 ($\nu - 0.0001$)	0.8325 ($\nu - 0.0001$)	0.7670 ($\nu - 0.0001$)	5.0682 ($\nu - 0.0013$)	5.5016 ($\nu - 0.0014$)
1.2	5.2883 (0.5678)	0.0337 (13.4680)	0.7769 -0.5886	0.7432 -1.1439	5.6672 (0.0705)	5.9239 (0.4800)	5.3185 ($\nu - 0.0018$)	0.0297 ($\nu - 0.0001$)	0.7815 ($\nu - 0.0001$)	0.7518 ($\nu - 0.0001$)	5.6712 ($\nu - 0.0024$)	5.8956 ($\nu - 0.0020$)
1.3	5.7757 -0.6980	0.0163 (20.7407)	0.7308 (0.5714)	0.7145 -0.9702	6.0794 (0.1331)	6.2181 (0.2693)	5.8163 ($\nu - 0.0006$)	0.0135 ($\nu - 0.0000$)	0.7350 ($\nu - 0.0001$)	0.7215 ($\nu - 0.0001$)	6.0875 ($\nu - 0.0012$)	6.2014 ($\nu - 0.0012$)
1.4	6.1511 -0.4499	0.0081 (22.7273)	0.6896 -0.6620	0.6815 -0.8871	6.3712 (0.2092)	6.4470 (0.4440)	6.1789 ($\nu - 0.0007$)	0.0066 ($\nu - 0.0000$)	0.6942 ($\nu - 0.0001$)	0.6876 ($\nu - 0.0001$)	6.3579 ($\nu - 0.0014$)	6.4185 ($\nu - 0.0015$)

<표 2> 예제 가 군의 고객 집단에 대한 시스템 성능척도



[그림 7] 작업장의 평균 제공품 수(예제 나 군)

$M = 5, B = 10, \lambda = 0.6, \bar{M} = 3, g_1 = g_2 = g_3 = 1/3, \mu_{1,1} = \mu_{1,2} = 2, a_i = 0.3, i = 1, K, M.$

K	Algorithm (Relative Error (%))							Simulation (95% Confidence Interval)						
	FP	BP	F	SL	P _b	W	W _b	FP	BP	F	SL	P _b	W	W _b
5	0.1133 (29.9312)	6.5573 (-1.2453)	0.0387 (29.4314)	0.7101 (-1.3613)	0.6714 (-2.0957)	7.6949 (0.1184)	8.1389 (1.4905)	0.0272 (√ - 0.0002)	6.0400 (√ - 0.0010)	0.0299 (√ - 0.0001)	0.7199 (√ - 0.0001)	0.6900 (√ - 0.0001)	7.6858 (√ - 0.0023)	8.0189 (√ - 0.0022)
7	0.3758 (0.6500)	5.3328 (-0.4480)	0.1069 (11.8201)	0.7979 (-1.1154)	0.6910 (-2.8530)	6.6910 (0.0761)	5.5694 (2.4795)	0.3396 (√ - 0.0005)	5.3668 (√ - 0.0019)	0.0856 (√ - 0.0001)	0.8069 (√ - 0.0001)	0.7113 (√ - 0.0001)	5.5320 (√ - 0.0023)	6.2755 (√ - 0.0018)
9	0.8028 (5.3267)	4.3626 (0.0206)	0.1928 (5.6436)	0.8514 (1.0000)	0.6586 (2.7897)	4.2700 (1.0268)	5.5201 (2.8948)	0.7622 (√ - 0.0004)	4.3617 (√ - 0.0013)	0.1825 (√ - 0.0001)	0.8900 (√ - 0.0001)	0.6775 (√ - 0.0001)	4.2266 (√ - 0.0016)	5.3648 (√ - 0.0013)
11	1.3791 (2.0799)	3.5067 (0.4188)	0.2832 (2.9070)	0.8835 (-0.7056)	0.6334 (-2.2902)	3.3808 (1.1307)	4.9575 (2.7851)	1.3510 (√ - 0.0012)	3.5817 (√ - 0.0013)	0.2762 (√ - 0.0002)	0.8928 (√ - 0.0002)	0.6176 (√ - 0.0003)	3.3430 (√ - 0.0016)	4.8329 (√ - 0.0025)
13	2.0890 (3.9471)	2.9841 (0.0303)	0.3707 (1.5805)	0.9111 (-0.2959)	0.5404 (-1.5780)	2.7294 (0.3450)	4.6019 (1.6231)	2.0694 (√ - 0.0017)	2.9826 (√ - 0.0017)	0.3649 (√ - 0.0003)	0.9138 (√ - 0.0001)	0.5489 (√ - 0.0002)	2.7200 (√ - 0.0018)	4.5284 (√ - 0.0013)
15	2.9198 (3.1544)	2.4809 (-0.1205)	0.4521 (1.3677)	0.9201 (0.2576)	0.4770 (-1.7305)	2.2306 (0.1347)	4.3444 (1.6424)	2.9153 (√ - 0.0048)	2.4899 (√ - 0.0033)	0.4460 (√ - 0.0005)	0.9315 (√ - 0.0001)	0.4854 (√ - 0.0004)	2.2276 (√ - 0.0032)	4.2742 (√ - 0.0013)
17	3.8612 (3.6150)	2.0782 (-0.1208)	0.5259 (1.0181)	0.9428 (-0.2117)	0.4169 (-1.7440)	1.8370 (0.0920)	4.1541 (1.6343)	3.8376 (√ - 0.0050)	2.0809 (√ - 0.0020)	0.5236 (√ - 0.0003)	0.9448 (√ - 0.0001)	0.4243 (√ - 0.0002)	1.8353 (√ - 0.0022)	4.0873 (√ - 0.0026)
19	4.9049 (3.2657)	1.7391 (0.5717)	0.5918 (0.7319)	0.9534 (-0.1362)	0.3616 (-1.5251)	1.5201 (0.4388)	4.0080 (0.9826)	4.8919 (√ - 0.0045)	1.7491 (√ - 0.0024)	0.5875 (√ - 0.0004)	0.9547 (√ - 0.0001)	0.3672 (√ - 0.0003)	1.5268 (√ - 0.0022)	3.9600 (√ - 0.0020)
21	6.0436 (3.9887)	1.4558 (-1.3351)	0.6502 (0.8844)	0.9619 (0.0727)	0.3117 (-2.0427)	1.2612 (-1.2605)	3.8924 (0.7272)	6.0201 (√ - 0.0085)	1.4755 (√ - 0.0017)	0.6145 (√ - 0.0004)	0.9626 (√ - 0.0001)	0.3182 (√ - 0.0003)	1.2773 (√ - 0.0015)	3.8643 (√ - 0.0015)
23	7.2689 (2.7638)	1.2189 (-2.3317)	0.7014 (1.0663)	0.9687 (-0.0105)	0.2573 (-2.7203)	1.0486 (-2.3101)	3.8004 (0.4201)	7.2138 (√ - 0.0051)	1.2480 (√ - 0.0011)	0.6940 (√ - 0.0002)	0.9688 (√ - 0.0001)	0.2748 (√ - 0.0002)	1.0734 (√ - 0.0010)	3.7845 (√ - 0.0015)

<표 3> 예제 나 군의 제품 및 개인별 고객에 대한 시스템 성능척도

$M = 5, B = 10, \lambda = 0.6, \bar{M} = 3, g_1 = g_2 = g_3 = 1/3, \mu_{1,1} = \mu_{1,2} = 2, a_i = 0.3, i = 1, K, M.$

K	Algorithm (Relative Error (%))						Simulation (95% Confidence Interval)					
	BP ^s	F ^s	SL ^s	P _b ^s	W ^s	W _b ^s	BP ^s	F ^s	SL ^s	P _b ^s	W ^s	W _b ^s
5	4.1094 (-0.5470)	0.0335 (29.3436)	0.8132 (-1.3705)	0.7797 (-2.3544)	8.4218 (0.8261)	8.1389 (-5.6261)	4.1320 (√ - 0.0009)	0.0259 (√ - 0.0001)	0.8245 (√ - 0.0001)	0.7985 (√ - 0.0001)	8.3528 (√ - 0.0027)	8.6241 (√ - 0.0024)
7	3.2447 (0.3557)	0.0966 (11.8056)	0.8741 (-0.9859)	0.7775 (-2.3732)	6.1868 (1.3548)	6.9553 (2.7902)	3.2332 (√ - 0.0012)	0.0864 (√ - 0.0001)	0.8828 (√ - 0.0001)	0.7964 (√ - 0.0001)	6.1041 (√ - 0.0024)	6.7665 (√ - 0.0018)
9	2.6139 (0.7749)	0.1787 (5.8022)	0.9093 (0.8397)	0.7306 (-2.3393)	4.7908 (1.6206)	5.9625 (3.1806)	2.5938 (√ - 0.0008)	0.1689 (√ - 0.0001)	0.9170 (√ - 0.0003)	0.7481 (√ - 0.0001)	4.7144 (√ - 0.0016)	5.7787 (√ - 0.0013)
11	2.1357 (0.9501)	0.2670 (2.9695)	0.9318 (-0.6186)	0.6647 (-2.0050)	3.8201 (1.5768)	5.3547 (3.0087)	2.1156 (√ - 0.0009)	0.2593 (√ - 0.0003)	0.9376 (√ - 0.0001)	0.6783 (√ - 0.0003)	3.7608 (√ - 0.0019)	5.1983 (√ - 0.0032)
13	1.7618 (0.3017)	0.3540 (1.5491)	0.9471 (-0.3158)	0.5931 (-1.3801)	3.1004 (0.6166)	4.9506 (1.7072)	1.7565 (√ - 0.0010)	0.3486 (√ - 0.0003)	0.9501 (√ - 0.0001)	0.6014 (√ - 0.0002)	3.0814 (√ - 0.0019)	4.8675 (√ - 0.0015)
15	1.4626 (0.2811)	0.4356 (1.3023)	0.9581 (0.2291)	0.5225 (-1.4709)	2.5442 (0.5056)	6.6551 (1.7714)	1.4585 (√ - 0.0018)	0.4300 (√ - 0.0005)	0.9903 (√ - 0.0001)	0.5303 (√ - 0.0005)	2.5314 (√ - 0.0033)	4.5839 (√ - 0.0018)
17	1.2189 (0.0985)	0.5103 (1.1607)	0.9664 (-0.1962)	0.4561 (-1.6814)	2.1021 (0.2958)	4.4537 (1.8058)	1.2177 (√ - 0.0013)	0.5044 (√ - 0.0003)	0.9683 (√ - 0.0001)	0.4639 (√ - 0.0002)	2.0959 (√ - 0.0024)	4.3747 (√ - 0.0030)
19	1.0179 (0.4596)	0.5775 (0.8029)	0.9728 (-0.1335)	0.3953 (1.4706)	1.7440 (0.3258)	4.2913 (1.0264)	1.0226 (√ - 0.0014)	0.5729 (√ - 0.0004)	0.9741 (√ - 0.0000)	0.4012 (√ - 0.0003)	1.7497 (√ - 0.0024)	4.2477 (√ - 0.0022)
21	0.8508 (1.2306)	0.6372 (0.9506)	0.9778 (0.1022)	0.3406 (-2.0138)	1.4501 (1.1318)	4.1628 (0.7795)	0.8614 (√ - 0.0009)	0.6312 (√ - 0.0003)	0.9788 (√ - 0.0000)	0.3476 (√ - 0.0003)	1.4667 (√ - 0.0016)	4.1306 (√ - 0.0017)
23	0.7115 (-2.2396)	0.6898 (1.1588)	0.9819 (-0.0407)	0.2920 (-2.7963)	1.2077 (-2.2026)	4.0603 (0.5448)	0.7278 (√ - 0.0006)	0.6819 (√ - 0.0002)	0.9823 (√ - 0.0000)	0.3004 (√ - 0.0002)	1.2349 (√ - 0.0010)	4.0383 (√ - 0.0017)

<표 4> 예제 나 군의 고객 집단에 대한 시스템 성능척도