대한산업공학회/한국경영과학회 2002 춘계공동학술대회
한국과학기술원(KAIST) 2002년 5월 3일~4일

혼합모델 투입순서 결정을 위한 시뮬레이티드 어닐링 최적 설계

An Optimal Design of Simulated Annealing Approach to Mixed-Model Sequencing

김호균 · 조형수
동의대학교 산업공학과

Abstract

The Simulated Annealing (SA) algorithm has been successfully applied to various difficult combinatorial optimization problems. Since the performance of a SA algorithm generally depends on values of the parameters, it is important to select the most appropriate parameter values. In this paper the SA algorithm is optimally designed for performance acceleration, by using the Taguchi method. Several test problems are solved via the SA algorithm optimally designed, and the solutions obtained are compared to solution results McMullen & Frazier(2000). The performance of the SA algorithm is evaluated in terms of solutions quality and computation times. Computational results show that the proposed SA algorithm is effective and efficient in finding near-optimal solutions.

1. 서론

시뮬레이티드 어닐링(SA; simulated annealing)은 고체 물리학에서 에너지 수준이 가장 낮은 상태인 결정을 얻기 위해서 이용하고 있는 어닐링(annealing) 과정을 그대로 조합적 최적화 문제에 모사한 것으로, Kirkpatrick et al.(1983)과 Cerny(1985)에 의해 제시된 이후 다양한 조합적 최적화 문제에 적용되어 성공적인 성과를 이룩한 확률적 방법이다. 시뮬레이티드 어닐링의 원리는 주어진 인접구조에서 최적해를 찾을 때까지 현재해로부터 인접해로 전이하는 반복적 과정으로, 상대적으로 열등한 해로의 전이도 확률적으로 허용함으로써 특정 국부 최소해에서 빠져 나올 수 있는 가능성을 열어둔다는 특징을 가지고 있다.

시뮬레이티드 어닐링 알고리즘은 기존의 발견적 해법들에 비해 기본 개념이 간단하며, 알고리즘 또한 간단할 뿐 아니라 융통성이 매우 크기 때문에 서로 다른 형태의 문제에 쉽게 적용 가능하여, 특정 최적화 문제에 이를 활용하기가 매우 용이하다는 장점을 가지고 있다. 이러한 시뮬레이티드 어닐링을 실제 문제에 적용하기 위해서는 특정 문제에 관련된 모수인 문제별 모수(problem-specific parameter)와 특정 문제와는 어느 정도 무관한 일반 모수(generic parameter)가 먼저 결정되어져야 한다. 시뮬레이티드 어닐링은 이론적으로는 전체 최적해에 수렴하는 효율적인 방법이지만, 충분한 계산시간이 주어져야한다는 단점이 있다. 따라서 실제 적용상에서는 수렴속도를 가속하기 위해 문제별 모수 및 일반 모수의 결정을 위해 여러 가지 변형적인 방법들을 취하고 있으며, 이들은 각각 독립적으로 고려되어왔다. 그러나 각 모수들 간에는 상호작용이 존재하므로 개별적인 모수의 성능개선만으로는 전체 성능을 최적화시킬 수 없다. 즉 최적해에 보다 근사한 해를 구하기 위해 모수를 조정하면, 계산시간이 급격히 증가하고, 반대로 계산시간을 줄이려 하면 해의 질에 문제가 있게 된다. 따라서 기존의 연구에서는 각 모수에 대한 적절한 값을 결정하기 위해 요인실험법을 사용하기도 하였으며, 단체법(simplex method)을 이용하여 적정 값을 찾아내려는 시도가 있었다(Park et al., 1998). 그러나 대부분의 기존 연구들은 각 모수를 결정하기 위한 방법들을 확정시킨 후 그에 대한 모수 값만을 결정하는데 국한하였다. 이에 본 연구에서는 시뮬레이티드 어닐링의 주요 모수를 결정하기 위한 방법들을 기존의 변형적인 방법론들에 기초하여 최적화 정도(해의 질) 및 계산시간(수렴속도)의 상충적 관계를 동시에 만족할 수 있도록 최적 설계한다.

최적 설계에는 실험계획법 분야에서 최소의 실험으로 잡음에 둔감한 최적의 수준조합을 찾을 수 있는 효과적인 기법이라 알려져 있는 다구치(Taguchi)의 강건(robust) 설계기법을 사용한다. 다구치 기법은 제품의 품질 개선을 위한 새로운 공정 및 품질 관리 기법으로써, 생산된 제품의 특성치가 잡음에 둔감하도록 즉, 잡음 하에서도 성능변동이 심하지 않도록 제품 혹은 공정을 설계하기 위한 실험계획방법이다. 주로 품질향상을 위한 제품 및 공정설계에 사용되었으나, 최근 인공신경망(artificial neural network)의 구조 설계 등에 활용되기도 하였다(Su & Hsieh, 1998; Su & Miao, 1998).

시뮬레이티드 어닐링의 최적 설계에 사용되는 표본 문제로는 혼합모델 조립라인에서의 투입순서 결정 문제를 사용하였다. 혼합모델 투입순서 결정 문제는 조합적 최적화 문제 중 NP-hard 영역이어서 크기가 큰 문제는 계산시간 제약상 거의 비실행적인 경우가 대부분이다. 그러나 혼합모델 투입순서는 수요형태의 변화라든가 혹은 부품 품절의 발생으로 인하여 실시간으로 변경될 수 있어야 하기 때문에 계산시간은 투입순서 결정 문제를 푸는 방법을 선택함에 있어 매우 중요한 요소가 된다. 이러한 이유에서, 다양한 휴리스틱 방법들이 많은 연구자들에 의해 개발되어져 왔다(Bard et al., 1994; Bolat et al., 1994; Dar-El, 1978). 최근에는 이러한 형태의 조합적 최적화 문제에 대해서, 시뮬레이티드 어닐링, 유전자 알고리즘(GA; genetic algorithm) 및 타부 서치(TS; Tabu search) 등과 같은 메타 휴리스틱 탐색기법들이 사용되어지고 있으며 성공적인 성과를 제공하였다(Celano et al., 1999; Kim et

al., 1996; McMullen, 1998; McMullen & Frazier, 2000, Tamura et al., 1999). 혼합모델 투입순서 결정시에는 중요하게 고려되어야 할 다양한 목적들이 존재한다. 그러나 본 연구에서는 상충적 관계에 있는 목적들인 부품사용율 안정화 목적과 작업준비시간의 최소화란 두 가지 목적만을 고려한다. McMullen & Frazier(2000)는 언급한 두 가지 목적들을 갖는 혼합모델 투입순서 결정 문제에 대한 시뮬레이티드 어닐링 접근법을 소개하였다. 따라서 이후 언급되는 수리적 모형은 McMullen & Frazier(2000)에 기초한 것이며, 최적 설계된 알고리즘의 성능 평가 또한 McMullen & Frazier(2000)에 비교되어 설명되어진다.

본 논문의 구성을 살펴보면, 2절에서는 표본문제인 혼합모델 조립시스템의 다목적을 갖는 투입순서 결정 문제에 대한 이론적 개념과 쟁점화 되는 사항들을 기술한다. 3절에서는 시뮬레이티드 어닐링의 다양한 성능 가속화 방법들을 소개하고 다구치의 강건 설계방법을 활용하여 성능 최적화된 알고리즘을 설계한다. 그리고 4절에서는 여러 가지 실험을 통하여 기존 연구에 의한 알고리즘과 최적 설계된 알고리즘에 의한 해를 비교 분석하여, 제시된 성능최적화 알고리즘의 타당성을 검정한다.

2. 혼합모델 투입순서 결정 문제

혼합모델 조립라인은 보통 두 가지 이상의 서로 다른 모델들을 갖는 동일한 제품을 동시에 조립하는데 사용된다. 생산될 제품들은 라인에서 연속적으로 한 모델에서 다른 모델로 전환되며 생산된다. 재고 비용을 줄이기 위해서, 라인에서의 모델 수는 보통 다양성에 대한 고객 만족 및 해당 수요를 모두 만족시키기 위한 일정 수준을 유지하여야 한다. 이러한 형태의 혼합모델 조립라인은 여러 가지 시장의 변동에 대해 유연하고 매우 빠르게 대처할 수 있게 된다. 이러한 혼합모델 조립라인을 효율적으로 운영하기 위해서는 회사 목적에 맞는 혼합모델들의 적정한 투입순서를 결정하는 것이 매우 중요하다. 혼합모델 투입순서 결정시에 고려되어야 할 목적에는 여러 가지가 존재하지만, 앞서 언급한 바와 같이 본 연구에서는 두 가지만을 고려한다.

먼저, 혼합모델 조립라인의 투입순서 결정문제에서 고려되어야 할 목적들에 대해서 수리적 모형에서 기본적으로 사용되는 기호는 다음과 같이 정의된다.

n : 투입순서가 결정되어질 최종 제품 모델의 수
D : 모든 제품 모델들의 총 생산 수요량 혹은 투입순서를 결정할 총 수량.
d_i : 제품 모델 i에 대한 수요량, i=1,2,…,n.
r_j (=d_j/D): 제품 모델 i에 대한 수요율, i=1,2,…,n.
s_k : 생산단계 k에서의 작업준비시간, k=1,2,…,D.
x_{ik} : 생산단계 k까지 제품 모델 i의 총 생산량, i=1,2,…,n, k=1, 2,…, D.

여기서 생산단계(stage)란 하나의 제품이 생산되는 시간 단위를 나타내는 것으로, k는 혼합모델 투입순서 중 특정 위치이며, 여러 제품들이 총 k 단위가 생산되었다면, 생산단계 k가 끝난 것이다. 그러므로 생산단계 k는 최종 제품에 대한 총 수요량 D를 만족할 때까지 이어지게 된다.

고려되고 있는 첫 번째 목적인 부품 사용율의 안정화 목적은 각 제품 모델의 생산이 그 모델에 대한 수요와 동시에 진행되어 일정한 비율로 여러 제품들을 생산할 수 있도록 투입순서를 결정하는 것이다. 이것은 생산단계 k 에서 생산한 각 모델별 실제 생산량에 대한 비율과 전체 수요율과의 변동값을 최소화함으로써 달성될 수 있으며, 총 생산변동 U는 Miltenburg (1989)에 의해 제시된 척도로써 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$U = \sum_{k=1}^{D} \sum_{i=1}^{n} (x_{ik} - k r_i)^2.$$

대부분의 혼합모델 조립라인 작업장에서는 조립부품 준비 및 지그(jig) 혹은 치공구 등의 교체 등에 따른 작업준비시간이 요구된다. 이러한 작업준비시간은 모델 투입순서의 선·후행 모델의 작업에 따라 달라지며, 이를 투입순서에 따른 작업준비시간(SDST; sequence-dependent setup time)이라 한다. 따라서 혼합모델 투입순서 결정시에 고려되어야 할 두 번째 목적은 혼합모델들의 생산전환으로 인해 발생하는 작업준비시간을 최소화하도록 하는 것으로, 이것은 생산단계 k 까지 발생한 총 작업준비시간의 합을 최소화함으로써 달성될 수 있다. 총 작업준비시간의 합 S는 McMulle & Frazier (2000)에 의해 제시된 척도로 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$S = \sum_{k=1}^{D} s_k$$

이때, s_1은 초기 작업준비시간이며, 각 작업준비시간은 단위시간을 갖는다고 가정한다.

3. 시뮬레이티드 어닐링 성능향상을 위한 알고리즘 최적 설계

시뮬레이티드 어닐링을 실제 문제에 적용하기 위해서는 문제별 모수인 해, 인접해의 구조, 비용함수 및 초기해의 획득 방법 등이 정의되어야 하며, 일반 모수인 초기 온도, 쿨링스케쥴, 내부루프의 반복수 및 종료기준 등이 결정되어져야 한다. 이때, 일반 모수들은 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘의 성능 즉, 해의 최적성 및 수렴속도에 크게 영향을 미치는 모수들로써, 각 모수값에 따라 알고리즘의 성능 척도들은 상충적 관계를 가진다. 따라서 상충적 관계를 갖는 성능 척도들을 동시에 만족시킬 수 있도록 일반 모수가 적절히 선택되어져야 한다. 본 절에서는 상충적 관계를 갖는 성능 척도들을 동시에 만족시킬 수 있도록 시뮬레이티드 어닐링의 일반 모수들을 최적 설계한다.

3.1. 최적 설계를 위한 실험 설계

시뮬레이티드 어닐링 알고리즘의 최적 설계를 위해 다구치 방법을 적용하려면 먼저 제어인자, 잡음인자, 각 인자의 수준 및 수집할 특성치 등이 정의되어야 한다.

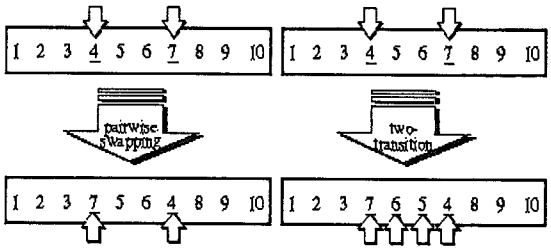
먼저 제어인자로는 초기온도, 내부루프 반복수, 쿨링스케쥴, 및 종료기준으로 설정한다. 각 인자에 대한 수준들로는 시뮬레이티드 어닐링의 성능향상을 위해 고려될 수 있는 일반적인 성능 가속화 방법들 중 실험계획 구현의 편의성을 고려하여 주요 인자별로 몇몇의 방법들을 고려하였다.

초기온도

Kirkpatrick et al.(1983)은 초기온도 T_1값을 모든 전이를 받아들일 수 있도록 충분히 높게 설정하여야 한다고 했다. 그러나 초기온도가 너무 높으면 계산시간이 길어지는 등 성능에 좋지 않은 영향을 줄 수 있으므로, 물리적인 현상과의 유추를 통해 액화상태를 유지하기 위한 적정 초기온도를 구하는 방법들에 고심하여 왔다. 적정 초기온도를 구하는 방법으로, 첫 번째, 초기온도 T_1값을 미리 결정된 상수값으로 설정하는 방법과 두 번째, 예비실험을 통해 에너지 분포의 표준편차(σ)를 구해서 $k\sigma$로 설정하는 방법을 고려한다. 이때 k값은 에너지 분포를 정규분포로 가정하고 3σ밖의 에너지값을 확률 p로 받아들일 수 있도록 k =-3/ln$p$로 설정한다(Huang et al., 1986). 세 번째는 해의 이동을 받아들이는 비율을 사용하여 초기온도를 구하는 방법으로서, 초기실험을 수행하여 해를 받아들이는 비율이 어떤 정해진 값(a_0)보다 크도록 초기온도를 다음과 같이 정하는 것이다.

$$T_1 = \frac{\Delta^+}{\ln(m_1(a_0-1)/m_2+a_0)},$$

여기서, m_1 과 m_2는 예비실험에서 에너지함수값이 감소된 해의 수와 증가된 해의 수를 나타낸다. 그리고 Δ^+는 에너지함수값이 증가된 해들의 평균 에너지 증가값이며, a_0는 해의 이동을 받아들이고자 하는 기대값이다(Arts & Van Laarhoven, 1987).



(a) 자리교환 (b) 2-전이

그림 1. 인접해 생성 방법

내부루프 반복수 및 해의 이동과정

내부루프의 반복수는 마코프체인이 수렴할 수 있도록 충분히 크게 해주어야 한다. 그러나 수렴성의 보장을 위해서 내부루프의 반복수를 필요이상으로 크게 해주면 계산성능에 치명적인 영향을 미칠 수 있다. 따라서 일반적으로 내부루프의 반복수는 인접의 규모(N_h)에 일정한 상수(γ)를 곱하는 $L=\gamma \times N_h$과 같은 형태를 취하고 있다. 이러한 방법을 편의상 상수설정 방법이라 부른다. 상수로 설정하는 방법 외에 항상 동일한 길이를 갖는 것이 아니라 주어진 상황에 적절히 적응하는 방법들도 제안되었다(Kirkpatric et al., 1983). 두 번째 방법은 내부루프의 반복수를 상대적으로 작은 값을 1차적으로 설정하여 계산시간을 줄일 수 있도록 하고, 만약 내부루프의 1차 반복 후에도 에너지 함수값에 변화가 없으면 마코프체인이 안정상태에 도달하지 못한 것으로 간주하여 현재해에 좀더 많은 변동을 줄 수 있는 방법으로 내부루프를 재차 반복하는 방법을 고려한다. 이를 재순환 방법이라 부르기로 한다. 이때 해의 이동 방법 즉, 인접해의 생성방법은 두 가지 단계 및 두 가지 형태로 이루어진다. 먼저 내부루프의 1차 반복 시에는 그림 1의 (a)와 같이 현재해의 투입순서 중 임의의 두 위치를 선택하여, 선택된 위치의 제품모델들을 서로 교환하는 방법에 의해서 인접해를 생성한다. 내부루프의 2차 반복시에는 상대적으로 많은 변동을 주기 위해 그림 1의 (b)와 같이 현재해의 투입순서 중 임의의 두 위치를 선택하여, 그 사이의 순서를 반대로 하는 2-전이(transition) 방법에 의해서 생성한다. 내부루프 반복수를 결정하는 세 번째 방법은 내부루프 수행 중 발생된 가장 낮은 에너지값(f_l)과 가장 높은 에너지값(f_h)의 차이에 대한 지수함수값을 기본적 내부루프 반복수에 더해가는 방법으로서, 해가 수렴해감에 따라 생성되는 에너지값의 차이가 점점 작아짐을 이용하여 내부루프 반복수를 신축적으로 설정하는 것으로 내부루프 반복수는 다음과 같이 설정된다.

$$L = L_B + \lfloor L_B F \rfloor,$$

여기서, F=1−exp(−(f_h−f_l)/f_h)이며, L_B는 기본적 내부루프의 반복수를 나타내는 것으로 상수설정 방법과 마찬가지로 $\gamma \times N_h$로 계산된다. 이것은 Ali et al. (2002)가 제시한 방법에 기초하여 변형된 것으로 지수평활 방법이라 부르기로 하고, 인접해 생성방법은 교환방법을 사용한다.

위 방법들에 의하면 해의 탐색공간은 항상 가능성(feasibility)을 유지하게 되며, 인접의 규모 즉, 발생 가능한 인접해의 개수는 $n(n-1)/2$가 된다. 여기서, n은 문제크기를 나타내는 것으로서 투입순서를 결정할 최종 제품 모델들에 대한 총 생산 수요량인 D_1이다.

쿨링스케쥴

기존의 연구들에서 사용되는 쿨링스케쥴은 다음과 같은 단순 기하스케쥴을 사용하고 있다.

$$T_k = \alpha T_{k-1},\ k=1,2,\cdots,\ 0<\alpha<1.$$

표 1. 인자별 수준 및 설정 방법

인자구분	기호	내용	수준 1	수준 2	수준 3
제어인자	A	초기온도	상수 설정법	kσ 설정법	수락비율 설정법
	B	내부루프 반복수	상수 설정법	재순환법	지수평활법
	C	쿨링스케쥴	단순 기하스케쥴	LM 쿨링스케쥴	적응적 기하스케쥴
	D	종료기준	최종온도 한계법	외부루프 한계법	내부루프 한계법
잡음인자	M	문제의 크기	20	100	500

이때 α는 온도 강하율이라 하며 대개 0.5와 0.99사이에서 정해지지만, 일반적으로 0.9나 0.95를 많이 사용한다.

고려된 두 번째 쿨링스케쥴은 Lundy & Mees (1986)에 의해 제시된 방법으로써 다음과 같은 식에 의해 온도를 강하시킨다.

$$T_k = T_{k-1}/(1+\beta T_{k-1}),\ \beta > 0.$$

이때, $\beta = (T_1 - T_F)/\{(L-1)T_1 T_F\}$로 계산되며, L은 내부루프의 반복수를 나타낸다. 이러한 쿨링스케쥴은 온도 강하속도를 첫 번째 방법인 단순 기하스케쥴보다 더 느리게 만든 것으로 최적해 탐색의 가능성을 더 높이게 된다. 이러한 방법을 편의상 LM 쿨링스케쥴이라 부르기로 한다.

세 번째 고려된 쿨링스케쥴은 기본적으로는 기하스케쥴을 사용하지만 고려되는 온도 강하율에 변화를 주는 방법이다. A_c를 특정 온도에서의 내부루프 수행 도중 발생한 에너지 함수값(현재해)의 변화율이라 정의하고, $\overline{P(A)}$를 열등한 해의 평균 수락확률이라 하면 온도 강하율 α는 다음과 같이 결정된다.

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{\min}, & \text{만약 } A_c > \overline{P(A)} \text{ 라면} \\ \alpha_{\max}, & \text{만약 } A_c < \overline{P(A)} \text{ 라면} \end{cases}$$

이 방법은 비교적 해의 변화가 많이 일어난 온도에서는 온도 강하율, $\alpha_{\min}$을 사용하여 온도를 많이 내리고, 그렇지 않고 해의 변화가 적게 일어난 온도에서는 온도 강하율, $\alpha_{\max}$을 사용하여 온도를 서서히 내리게 되는 적응적인 방법으로서 이를 적응적 기하스케쥴이라 한다.

종료 기준

종료기준은 알고리즘이 끝나는 조건으로서 이론적으로는 온도가 0에 수렴하는 곳에서 끝나야 한다. 하지만 알고리즘이 에너지값의 변화없이 낮은 온도에서 보내는 시간이 너무 많기 때문에, 해의 질과 계산시간을 적절히 만족하는 효과적인 종료기준의 결정은 시뮬레이티드 어닐링 설계에서 중요한 인자 중 하나이다.

본 연구에서 고려된 종료기준은 첫 번째, 온도가 0에 가까운 상수값인 최종온도 T_F보다 작아질 때 종료하는 방법으로 편의상 최종온도 한계방법이라 부르기로 한다. 두 번째는 외부루프가 일정 횟수(R)를 반복한 후에도 에너지 함수값에 변화가 없을 때 알고리즘을 종료하는 방법(Youssef et al., 1991)으로 외부루프 한계방법이라 부르기로 하며, 세 번째 방법은 내부루프 중 현재해의 변화비율이 설정된 값 F_{Min} 보다 작을 때 알고리즘을 종료하는 방법(Johnson et al., 1989)으로 내부루프 한계 방법이라 부르기로 한다.

잡음인자로는 표본 문제의 크기로 선정하였다. 이는 일반적으로 문제의 크기에 따라 시뮬레이티드 어닐링의 성능이 달라질 수 있으나, 문제의 크기에 영향 받지 않는 최적의 인자 수준 조합을 찾아내기 위함이다. 구체적인 잡음인자에는 문제의 크기가 각각 20, 100, 500 인 경우로 설정하였다.

앞서 언급된 제어인자 및 잡음인자에 대한 수준 및 수준의 배치를 표 1과 같이 정의하였다. 실험계획은 주효과만을 고려하여 직교배열표는 $L_9(3^4)$을 사용하였으며, 최종해의 최적화 정도를 나타내는 특성치로는 수렴된 최종 에너지함수값을 사용하고, 계산시간을 나타내는 특성치로는 알고리즘 수행 중 검색한 임의해의 총 생성갯수를 특성치로 사용하였다.

3.2. 최적 설계를 위한 실험 결과

실험은 인자들의 각 실험조합에 따라 3회 반복 실시하며, 실험데이터는 문제의 크기가 20(문제군 1), 100(문제군 2), 500(문제군 3) 인 문제 중 각각 한 문제씩을 임의 추출하여 사용하였다. 성능 특성치인 에너지함수값 및 총 검색해의 수는 모두 작을수록 좋은 특성을 가지므로 각각 망소특성으로 분석하고, 실험의 분석은 통계분석 S/W인 MINITAB ver13.30을 사용하였다. 각 인자 및 수준에 대한 직교배열표 $L_9(3^4)$의 구성 및 인자의 배열에 따른 실험조합은 표 2와 같다.

표 2. 직교배열표 $L_9(3^4)$의 구성 및 인자의 배열

실험 번호	제어 인자 A	B	C	D	잡음 인자 M1	M2	M3	S/N비
1	1	1	1	1	y_{11}	y_{12}	y_{13}	SN_1
2	1	2	2	2	y_{21}	y_{22}	y_{23}	SN_2
3	1	3	3	3				
4	2	1	2	3	⋮	⋮	⋮	⋮
5	2	2	3	1				
6	2	3	1	2	⋮	⋮	⋮	⋮
7	3	1	3	2				
8	3	2	1	3				
9	3	3	2	1	y_{91}	y_{92}	y_{93}	SN_9

실험결과는 표 3에 나타나 있듯이 최적화 정도를 나타내는 특성치인 에너지함수값에 대한 S/N비와 총 검색해의 수에 대한 S/N비에 대한 값으로 나타내었으며, 이때 S/N비 값인 SN_i는 다음 식에 의해 계산되었다.

표 3. 에너지 함수값 및 총 검색해의 수에 대한 실험결과 및 S/N비

실험 번호	제어 인자 A	B	C	D	S/N비 에너지 함수값	총 검색해의 수
1	1	1	1	1	-70.0845	-100.9341
2	1	2	2	2	-69.8248	-107.9900
3	1	3	3	3	-78.9515	-64.9167
4	2	1	2	3	-73.4365	-84.5759
5	2	2	3	1	-71.5496	-97.2429
6	2	3	1	2	-72.3164	-83.3132
7	3	1	3	2	-71.1061	-89.1908
8	3	2	1	3	-74.4365	-97.7092
9	3	3	2	1	-76.1120	-68.2418

$$SN_i = -10\log\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2\right]$$

여기서, y_{ij}는 i 번째 실험조합에서 관측된 j 번째의 성능 특성치이고, n은 한 실험조합에서의 y의 반복수이다. 성능 특성치 y_{ij}의 구체적인 값은 지면관계상 생략하였다.

먼저, 최적화 정도 특성치인 에너지함수값에 대해서 살펴보면, 최대 S/N비 값은 -69.8248이며 실험조합은 $A_1B_2C_2D_2$이다. 또한 그림 2에 나타나 있는 에너지함수값의 수준별 평균 S/N비에 대한 주효과를 보면, S/N비를 최대로 하는 각 인자들에 대한 최적의 조합은 $A_2B_1C_1D_2$이라는 것을 알 수 있다.

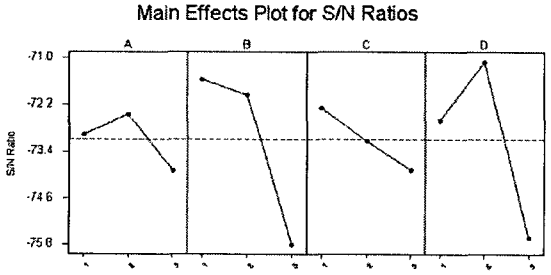


그림 2. 에너지 함수값의 수준별 S/N비에 대한 주효과

표 4. 에너지함수값에 대한 분산분석표(풀링전)

요인	자유도 (DF)	제곱합 (SS)	제곱평균 (MS)	F값
A	2	3.2415	1.6207	**
B	2	33.0974	16.5487	**
C	2	3.7969	1.8984	**
D	2	31.8883	15.9441	**
오차	0	0.0000	0.0000	
계	8	72.0240		

각 인자들의 통계적 유의성 검정을 위해 표 4와 같이 분산분석(ANOVA)을 실시하였다. 결과는 오차항이 없기 때문에 F 통계량값을 계산할 수 없으나, 인자 A와 C의 제곱합이 매우 작으므로 이를 오차항에 풀링한 후 표 5와 같이 분산분석을 재 실시하였다. 그 결과 인자 B와 D의 F값은 각각 9.4045와 9.0612로 계산되었다. 이것은 자유도 (2,4)의 F분포와 비교하면 p값이 5%보다 작으므로, 인자 B(내부루프 반복수)와 D(종료기준)는 S/N비에 유의한 영향을 미친다고 판정할 수 있다.

표 5. 에너지함수값에 대한 분산분석표(풀링후)

요인	자유도 (DF)	제곱합 (SS)	제곱평균 (MS)	F값
B	2	33.0974	16.5487	9.4045
D	2	31.8883	15.9441	9.0612
오차	4	7.0384	1.7596	
계	8	72.0240		

이제, 수렴속도 특성치인 총 검색해의 수에 대한 실험결과를 살펴보자. S/N비를 최대로 하는 실험조합은 3번째인 $A_1B_3C_3D_3$ 이며, 이때 S/N비 값은 -64.9167이다. 인자의 각 수준에서 평균 S/N비에 대한 주효과를 그래프로 나타내면 그림 3과 같다. 그림 3으로부터 각 인자들에 대한 최적의 조합은 $A_2B_3C_3D_2$이라는 것을 알 수 있다. 표 6에 나타나 있는 바와 같이 각 인자들의 유의성 검정을 위한 분산분석 결과, 앞선 에너지함수값의 경우와 같이 오차항이 존재하지 않으나 모든 인자들의 제곱합값이 매우 크므로, 모든 인자들은 S/N비에 유의한 영향을 미친다고 판정할 수 있다.

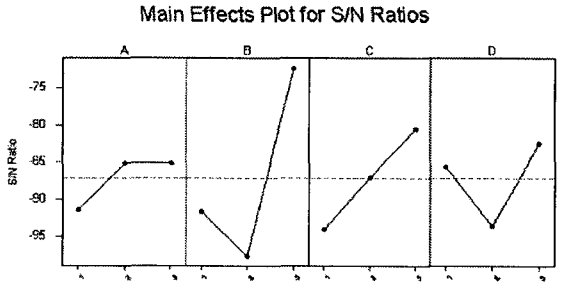


그림 3. 총 검색해 수의 수준별 SN비에 대한 주효과

표 6. 총 검색 해의 수에 대한 분산분석표

요인	자유도 (DF)	제곱합 (SS)	제곱평균 (MS)	F값
A	2	77.7400	38.8700	**
B	2	1063.4500	531.7300	**
C	2	274.9700	137.4800	**
D	2	196.9900	98.5000	**
오차	0	0.0000	0.0000	
계	8	1613.1600		

그러면, 최적화 정도 및 수렴속도를 동시에 고려한 최적의 수준조합을 찾아보자. 두 가지 성능척도는 모두 중요하지만 해의 최적화가 우선되어야 하므로, 먼저 최적화 정도의 측면에서 유의한 인자인 인자 B(내부루프 반복수)와 D(종료기준)의 각 수준 중 B_1(상수 설정법)과 D_2(외부루프 한계법)를 선택한다. 두 번째 척도인 수렴속도의 측면에서는 모든 인자들이 유의하기 때문에, 최적화 정도의 측면에서 이미 선택된 인자 B와 D를 제외한 나머지 인자인 A(초기 온도) 및 C(쿨링스케줄)의 최적 수준을 찾으면 된다. 따라서 인자 A는 $A_2(k\sigma$ 설정법)가 선택되고, 인자 C는 C_3(적응적 기하스케줄)가 선택된다.

결론적으로 최적화 정도 및 계산 성능이 동시에 고려된 최적의 조합은 $A_2B_1C_3D_2$ 이다. 이것은 다시 말하면, 초기온도는 $k\sigma$ 설정법을 사용해서 구하고, 내부루프 반복수는 일정한 상수로 설정하며, 쿨링스케줄은 적응적 기하스케줄을 따르고, 외부루프 한계법에 의해 알고리즘을 종료하면 해의 최적성을 보장하면서 수렴속도를 빠르게 할 수 있다는 것을 뜻한다. 이렇게 설정된 알고리즘을 편의상 RD-SA(robust designed SA)라고 부르기로 한다.

4. 수치 실험

본 연구에서 제시되었던 최적 설계된 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘 RD-SA에 대한 타당성 평가를 위해 McMullen & Frazier(2000)에 의해 제시되었던 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘과의 비교실험을 실시한다. 편의상 McMullen & Frazier(2000)에 의해 제시되었던 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘을 MF-SA(McMullen & Frazier SA)이라 부르기로 한다. 검정을 위해 사용된 문제는 McMullen & Frazier(2000)에 의해 제시되었던 문제이며, 문제는 세 가지 문제군으로써, 비교적 작은 크기인 문제 1군(총 수요량=20)과 중간 크기인 문제 2군(총 수요량=100) 그리고 가장 큰 크기인 문제 3군(총 수요량=500)으로 구성된다.

모든 문제들에 대한 실험조건으로서 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘의 실험인자에 대한 설정값은 표 7에 시뮬레이티드 어닐링의 일반 모수인 초기 온도, 내부루프 반복수, 온도 강하율 및 종료조건에 대해서, RD-SA와 MF-SA별로 각각 나타내었다.

시뮬레이티드 어닐링 알고리즘은 프로그램 언어 C++를 이용하여 코딩되었고, 펜티엄 Ⅲ 866㎒ IBM-PC 호환기종에서 실행되었다.

표 7. 최적 알고리즘 실험인자 설정값

SA 구분	초기 온도	내부루프 반복수 (문제1군,2군,3군)	온도강하율	종료조건
MF-SA	T_1=25	L=35,40,45	α=0.98	T_F=1
RD-SA	T_1=1.0014σ	L=33,160,830	α_{min}=0.90, α_{max}=0.98	R=5

실험은 문제 1군, 2군 및 3군의 모든 문제들에 대해서 각각 시행되었으며, 각 문제에 따라 RD-SA와 MF-SA로 각기 3회씩 반복 실험하였다. 수행된 결과는 각 문제군에 따라 최적화 정도를 나타내는 척도인 에너지함수값과 수렴속도를 나타내는 척도인 총 검색해의 수에 대해서 표 8, 표 9 및 표 10에 평균 및 표준편차로 나타내었다.

표 8-10의 결과를 보면, 문제 1군에 대해서 RD-SA와 MF-SA는 해의 최적성 측면에서는 차이가 없으나 수렴 속도 측면에서는 RD-SA가 더 나은 결과를 제공하고 있다. 문제 2군 및 3군에 대해서는 해의 최적성 측면에서 평균 및 표준편차 모두 RD-SA가 더 우수한 결과를 제공한다. 심지어 문제 3군은 에너지 함수값의 평균 및 표준편차에서 MF-SA에 비해 아주 큰 차이가 난다는 것을 알수

표 8. 알고리즘간의 성능분석을 위한 실험결과(문제 1군)

문제	RD-SA				MF-SA				가능해의 수
	최적화 정도		수렴 속도		최적화 정도		수렴 속도		
	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	
2	137.2500	0.0000	1518.0000	151.6245	137.2499	0.0000	4710.0000	0.0000	6.0949×10^{10}
3	131.4000	0.0000	1544.4000	142.4065	131.4000	0.0000	4710.0000	0.0000	3.3522×10^{11}
4	134.8499	0.1483	1567.5000	134.0466	135.0900	0.2559	4710.0000	0.0000	1.1174×10^{12}
5	137.0999	0.0608	1531.2000	146.0972	137.1000	0.1000	4710.0000	0.0000	2.5142×10^{12}
6	138.4500	0.0000	1504.8000	155.7190	138.4500	0.0000	4710.0000	0.0000	4.0227×10^{12}
7	134.7000	0.1686	1432.2000	181.5500	134.5500	0.0249	4710.0000	0.0000	1.4079×10^{13}
8	136.6499	0.1897	1428.9000	182.7788	136.3500	0.1000	4710.0000	0.0000	2.8159×10^{13}
9	132.4499	0.0147	1372.8000	202.3522	132.5100	0.0160	4710.0000	0.0000	8.7996×10^{13}
10	156.0000	0.0000	1234.2000	250.4524	156.0000	0.0000	4710.0000	0.0000	2.3759×10^{15}

표 9. 알고리즘간의 성능분석을 위한 실험결과(문제 2군)

문제	RD-SA				MF-SA				가능해의 수
	최적화 정도		수렴 속도		최적화 정도		수렴 속도		
	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	
2	898.6799	5.5012	9602.0620	470.6109	906.1332	10.2935	7400.0000	0.0000	3.4769×10^{57}
3	849.8099	6.4789	9609.4900	576.6270	865.7468	8.3984	7400.0000	0.0000	1.6727×10^{67}
4	877.5601	10.3802	9901.7800	505.7256	889.1525	13.9212	7400.0000	0.0000	2.3294×10^{72}
5	884.6699	7.6215	9405.1600	646.4082	910.5910	8.9900	7400.0000	0.0000	1.0160×10^{75}
6	913.3200	6.4860	9333.4900	814.7890	926.3949	8.2314	7400.0000	0.0000	3.7899×10^{78}
7	862.2299	9.5595	9098.6100	465.8097	871.1162	10.6572	7400.0000	0.0000	4.9015×10^{84}
8	842.8499	13.1784	9706.7500	607.5504	859.2477	15.3882	7400.0000	0.0000	8.3572×10^{91}
9	845.0999	8.5181	9378.5200	799.6109	878.5854	11.3160	7400.0000	0.0000	9.9590×10^{92}
10	904.4698	10.5648	9072.1400	685.4751	917.2675	12.9444	7400.0000	0.0000	4.5607×10^{106}

표 10. 알고리즘간의 성능분석을 위한 실험결과(문제 3군)

문제	RD-SA				MF-SA				가능해의 수
	최적화 정도		수렴 속도		최적화 정도		수렴 속도		
	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	평균	표준편차	
1	6224.3408	38.5246	44412.6700	1526.2698	7219.7657	101.2020	10585.0000	0.0000	∞
2	6166.1630	66.5219	43324.7000	1688.1530	8608.0970	305.5684	10585.0000	0.0000	∞
3	6731.1000	52.4557	46251.5800	1561.2001	8886.8933	252.8086	10585.0000	0.0000	∞

있다. 하지만 수렴 속도 측면에서는 RD-SA는 MF-SA 보다 좋지 않다는 것을 알 수 있다. 이러한 결과에서 우리는 MF-SA는 문제의 크기가 커질수록 최적화 정도가 현격히 낮아지며, 그 원인은 문제의 크기가 늘어남에 따라 내부루프 반복수가 적절히 늘어나야 함에도 불구하고 MF-SA는 그 차이를 크게 두지 않아서, 즉 수렴속도가 부적절하게 빠른 데에서 기인한다는 것을 유추할 수 있다. 반면 RD-SA는 문제의 크기에 따라 수렴속도가 MF-SA에 비해 상대적으로 느려지고 있으나, 항상 일정한 최적성을 유지하고 있다는 것을 알 수 있다. 한편 표 8-10의 마지막 열에 나타나 있는 각 문제조합에서 발생할 수 있는 가능해의 수와 시뮬레이티드 어닐링의 MF-SA 및 RD-SA를 비교하면, 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘은 상대적으로 아주 적은 해만을 검색하고도 근사 최적해를 제공할 수 있는 효율적인 방법이라는 것을 확인할 수 있다.

5. 결 론

일반적으로 전형적인 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘은 질 높은 해를 생성하여 주지만, 비교적 긴 계산시간을 요구한다. 이렇듯 상충적 관계에 있는 해의 최적성 정도와 수렴 속도를 동시에 만족시키기 위해, 본 연구에서는 최적의 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘 설계방법을 제시하고, 성능가속화 알고리즘을 설계하였다. 최적설계에 사용된 방법은 최소의 실험으로 최적의 수준조합을 찾을 수 있는 효과적인 방법인 다구치의 강건 설계기법을 사용하였으며, 최적 설계된 성능가속화 알고리즘은 동일한 표본 문제를 다루는 다른 알고리즘과의 비교실험에서 수렴 속도에 비해 우수한 해의 최적성을 유지한다는 것을 확인할 수 있었다.

본 연구에서 제시된 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘의 효율성에 대한 좀 더 정확한 입증을 위해서는 다른 휴리스틱 및 메타 휴리스틱 기법들과의 비교 분석에 대한 연구가 수행되어야 할 것이다. 또한 본 연구에서는 많은 성능 가속화 방법들 중 실험의 편의상 일부의 방법들만을 고려하였다. 그러나 좀더 효율적인 설계를 위해서는 인자별로 더 많은 방법들이 고려되어야 할 것이며, 더불어 알고리즘 최적 설계를 위해서는 성능 가속화 방법뿐만 아니라 최적 설계된 알고리즘의 성능 가속화 방법들에 대한 구체적인 모수값도 같이 최적 설계되어야 하겠다. 이러한 계획들은 추후 연구과제로 남겨 두기로 한다.

참고 문헌

[1]Aarts, EH.L. and Van Laarhoven, R.J.M., *Simulated Annealing: Theory and Applications*, Reidel, Dordrecht, 1987.

[2]Ali, M.M., Torn, A., and Viitanen, S., A direct search variant of the simulated annealing algorithm for optimization involving continuous variables, *Computers & Operations Research*, **29**, 87-102, 2002.

[3]Bard, J.F., Shtub, A., and Joshi, S.B., Sequencing mixed-model assembly lines to level parts usage and minimize line length, *International Journal of Production Research*, **32**, 2431-2454, 1994.

[4]Bolat, A., Savsar, M. and Al-Fawzan, M.A., Algorithms for real-time scheduling of jobs on mixed model assembly lines, *Computers and Operations Research*, **21**, 487-498, 1994.

[5]Celano, G., Fichera, S., Grasso, V., La Commare, U., and Perrone, G., An evolutionary approach to multi-objective scheduling of mixed model assembly lines, *Computers and Industrial Engineering*, **37**, 69-73, 1999.

[6]Cerny, V., Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **45**, 41-51, 1985.

[7]Dar-El, E.M., Mixed model assembly line sequencing problem, *OMEGA*, **6**, 313-323, 1978.

[8]Huang, M.D., Romeo, F. and Sangiovanni-Vincentelli, A.L., An efficient general cooling schedule for simulated annealing, *Proceedings of IEEE International Conference on Computer-Aided Design*, Santa Clara, 381-384, November 1986.

[9]Johnson, D.S., Aragon, C.R., McGeoch, L.A. and Schevon, C., Optimization by simulated annealing: An experimental evaluation; Part 1, Graph partitioning, *Operations Research*, **37**, 868-892, 1989.

[10]Kim, Y.K., Hyun, C.J., and Kim, Y.H., Sequencing in mixed-model assembly lines : a genetic algorithms approach, *Computers and Operations Research*, **23**, 1131-1145, 1996.

[11]Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D., and Vecchi, M.P., Optimization by simulated annealing, *Science*, **220**, 671-679, 1983.

[12]Lundy, M. and Mees, A., Convergence of an annealing algorithm, *Mathematical Programming*, **34**, 111-124, 1986.

[13]McMullen, P.R., JIT sequencing for mixed-model assembly lines with setups using Tabu search, *Production Planning and Control*, **9**, 504-510, 1998.

[14]McMullen, P.R. and Frazier, G.V., A simulated annealing approach to mixed-model sequencing

with multiple objectives on a just-in-time line, *IIE Transactions*, **32**, 679-686, 2000.

[15]Miltenburg, J., Level schedules for mixed-model assembly lines in just-in-time production systems, *Management Science*, **35**, 192-207, 1989.

[16]Park, M.W and Kim, Y.D., A systematic procedure for setting parameters in simulated annealing algorithms, *Computers and Operations Research*, **25**, 207-217, 1998.

[17]Su, C.T. and Hsieh, K.L., Applying neural network approach to achieve robust design for dynamic quality characteristics, *International Journal of Quality & Reliability Management*, **15**, 509-519, 1998.

[18]Su, C.T. and Miao, C.L., Neural network procedures for experimental analysis with censored data, *International Journal of Quality Science*, **3**, 239-253, 1998.

[19]Tamura, T., Long, H. and Ohno, K., A sequencing problem to level part usage rates and work loads for a mixed-model assembly line with a bypass subline, *International Journal of Production Economics*, **61**, 557-564, 1999.

[20]Youssef, G.S. and Vasant, B.R., Combinational optimization by stochastic evolution, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design*, **10**, 525-535, 1991.

부록 (분석시 사용된 문제)

문제군 1. 제품 모델에 대한 수요량(d_i)

문제 번호	제품 모델 i									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	11	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	10	2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	9	3	1	1	1	1	1	1	1	1
4	8	4	1	1	1	1	1	1	1	1
5	7	5	1	1	1	1	1	1	1	1
6	6	5	2	1	1	1	1	1	1	1
7	5	5	3	1	1	1	1	1	1	1
8	4	4	4	2	1	1	1	1	1	1
9	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

문제군 2. 제품 모델에 대한 수요량(d_i)

문제 번호	제품 모델 i														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	40	40	8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	35	35	10	5	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	30	30	15	10	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	25	25	20	15	5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
5	20	20	20	15	15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
6	20	20	15	15	10	6	6	1	1	1	1	1	1	1	1
7	15	15	15	10	10	10	10	5	4	1	1	1	1	1	1
8	15	15	10	10	10	10	10	10	4	1	1	1	1	1	1
9	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	6	6	6	6	6

문제군 3. 제품 모델에 대한 수요량(d_i)

문제 번호	제품 모델 i																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	105	105	105	105	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
2	35	35	35	35	35	35	35	35	35	35	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
3	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25	25