

## 바디포오스가 큰 유동해석시 운동량보간법의 사용에 관한 연구

최석기\*, 김성오\*\*, 최훈기\*\*\*

### On the Use of Momentum Interpolation Method for Flows Involving A Large Body Force

Seok-Ki Choi\*, Seong-O Kim\*\* and Hoon-Ki Choi\*\*\*

**Key Words** : SIMPLE Algorithm(SIMPLE 알고리즘), Momentum Interpolation Method(운동량보간법),  
Large Body Force Flow(바디포오스가 큰 유동)

#### Abstract

A numerical study on the use of the momentum interpolation method for flows with a large body force is presented. The inherent problems of the momentum interpolation method are discussed first. Numerical experiments are performed for a typical flow involving a large body force. The fact that the momentum interpolation method may result in physically unrealistic solutions is demonstrated. Numerical experiments changing the numerical grid have shown that a simple way of removing the physically unrealistic solution is a proper grid refinement where there is a large pressure gradient. An effective way of specifying the pressure and pressure correction at the boundary by a local mass conservation near the boundary is proposed, and it is shown that this method can effectively remove the inherent problem of the specification of pressure and pressure correction at the boundary when one uses the momentum interpolation method.

#### 1. 서론

Rhie와 Chow[1]가 운동량보간법을 개발한 이후, 그 알고리즘의 단순성으로 현재 가장 널리 사용되고 있다. 거의 모든 상용 코드들이 운동량보간법을 사용하고 있으며, 정렬 및 비정렬좌표계에서의 운동량보간법의 사용에 관하여서는 잘 확립되어 있다. 그러나 Rhie와 Chow의 본래 운동량보간법은 이산화된 운동방정식에 저이완계수의 존재를 고려하지 않았으며, Majumdar[2]는 수렴된 해가 계산에 사용된 저이완계수의 값에 의존한다는 사실을 발견하고 이에 대한 해결법을 제시하였다. Choi[3]도 본래의 Rhie와 Chow[1]의 운동량보간법이 비정상 유동해석시 계산결과가 계산에 사용된 시간간격(time step)의 크기에 의존하지 않도록 수정하였다. Miller와 Schmidt[4]와 Gul[5]는 운동량보간법의 중요한 문제점을 발견하였다. Miller와 Schmidt[4]는 운동량보간법이 물리적으로 타당하지 못한 해, 즉 cell-face 속도성분이 이웃한 cell-center 속도성분 사이에 있지 않은 해를 산출할 가능성이 있음을 보였다. Miller와 Schmidt[4]는 압력구배가 급격히 변하는 영역에서 운동량보간법이 그러한 물리적으로 타당하지 못하는 해를 산출함을 관찰하였다. Gul[5]도 운동량보간법이 바디포오스(body force)가 큰 유동 해석시 물리적으로 타당하지 못한 해를 산출할 수 있음을 처음으로 제기하였다. 본 저자 중의 한 사람[6]의 곡관에서의 열성층 해석시 파이프 벽면 근처에

서 물리적으로 타당치 못한 해가 산출됨이 관찰되었다. 운동량보간법이 물리적으로 타당치 못한 해를 산출할 가능성이 있다는 것은 해결해야 할 심각한 문제이다. 본 연구는 바디포오스가 큰 유동 해석시 운동량보간법의 사용에 관한 내용이다.

본 연구의 목표는 운동량보간법을 사용하여 바디포오스가 큰 유동 해석시 물리적으로 타당치 못한 해가 산출되는 원인과 해결책을 연구하는 데 있다. 먼저 운동량보간법의 고유한 문제들(inherent problems)을 설명하고, 간단한 해결책을 제시하고자 한다. 또한 어떻게 그러한 문제점들이 유발되고 해결되는지 수치적 실험을 통하여 검증하고자 한다.

#### 2. 운동량보간법

##### 2.1 수학적표현

Rhie와 Chow의 운동량보간법에서는 운동방정식들은 계산격자 검사체적(control volume)의 중심에서 계산된다. 논의를 간단하게 하기 위하여 유동은 2차원이고, 정상상태이며 비압축성이라고 가정한다. Cell-centered 속도성분에 대한 이산화된 운동방정식은 저이완계수와 바디포오스 항들을 명시적으로 표현하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u_p = (H_u)_p + (D_u)_p(P_w - P_e)_p + (B_u)_p + (1 - \alpha_u)u_p^{l-1} \quad (1)$$

Cell-face 속도성분에 대한 이산화된 운동방정식들은 다음과 이

\* 원자력연구소, 칼리머기술개발팀, skchoi@kaeri.re.kr

\*\* 원자력연구소, 칼리머기술개발팀, sokim@kaeri.re.kr

\*\*\* 창원대학교 BK사업단, hkchoi@changwon.ac.kr

표현된다.

$$u_e = (H_u)_e + (D_u)_e(P_p - P_E) + (B_u)_e + (1 - \alpha_u)u_e'^{-1} \quad (2)$$

Rhie와 Chow의 운동량보간법에서는 위의 운동방정식들을 음해적(implicit)으로 풀지 않고 다음의 가정들을 사용하여 양해적(explicit)으로 구한다. 예를 들어 검사체적의 동쪽 면에 위치하고 있는 속도성분을 계산하기 위하여 다음의 가정들이 도입된다.

$$(H_u)_e \approx f_e^+(H_u)_E + (1 - f_e^+)(H_u)_P \quad (3)$$

$$\frac{1}{(A_p^u)_e} \approx \frac{f_e^+}{(A_p^u)_E} + \frac{(1 - f_e^+)}{(A_p^u)_P} \quad (4)$$

위의 가정들을 사용하면 Eq.(2)은 다음과 같이 쓰여 질 수 있다.

$$\begin{aligned} u_e = & [f_e^+ u_E + (1 - f_e^+) u_P + (D_u)_e (P_p - P_E) \\ & - f_e^+ (D_u)_E (P_w - P_e) - (1 - f_e^+) (D_u)_P (P_w - P_e)] \\ & + [(B_u)_e - f_e^+ (B_u)_E - (1 - f_e^+) (B_u)_P] \\ & + (1 - \alpha_u) [u_e'^{-1} - f_e^+ u_E'^{-1} - (1 - f_e^+) u_P'^{-1}] \end{aligned} \quad (5)$$

## 2.2 운동량보간법의 고유한 문제들

기존의 엇갈림격자계(staggered grid system)에서는 속도성분들은 검사체적 면에 저장되며, 운동방정식들은 Eq.(2)를 사용하여 음해적으로 계산한다. SIMPLE 알고리즘[7]에서는 압력보정항을 사용하여 다음의 속도보정식들을 도입한다.

$$u_e = u_e^* + (D_u)_e (P_p' - P_e') \quad (6)$$

위 식들에서  $u_e^*$  는 운동방정식만을 만족하는 속도성분들이다. 속도보정식들을 연속방정식에 대입하면 압력보정방정식을 얻는다. 압력보정방정식을 풀 후 속도성분들은 연속방정식을 만족하도록 Eq.(6)을 사용하여 보정한다. 그러므로 엇갈림격자계에서의 속도성분들은 운동방정식과 연속방정식을 동시에 만족한다. 그리고 경계에서의 압력값이나 압력보정값들은 계산하는 동안 필요하지 않다. 그러므로 엇갈림격자계를 사용하여 계산을 수행할 때에는 물리적으로 타당하지 못한 결과를 산출할 이유가 없다. 다만 계산격자가 충분히 조밀하지 못하면 정확하지 못한 해를 산출한다.

운동량보간법에서는 검사체적 중심에 위치하는 속도성분(cell-centered velocity components)과 검사체적 면에 위치하는 속도성분(cell-face velocity components)의 두가지 종류의 속도성분들이 존재한다. 운동방정식들은 Eq. (1)을 사용하여 검사체적의 중심에서 음해적으로 계산된다. SIMPLE 알고리즘의 압력보정방정식을 풀 후 cell-centered 속도성분들은 다음의 속도보정식들을 사용하여 연속방정식을 만족하도록 한다.

$$u_p = u_p^* + (D_u)_p (P_w' - P_e') \quad (7)$$

그러나 위의 cell-centered 속도성분들에 대한 속도보정식들은 연속방정식에 구속되지 않고, 압력보정항들은 이웃한 검사체적의 중심에 위치한 압력보정값들을 보간하여 구한다. 일반적으로 선형보간으로 구한다. 그러므로 cell-centered 속도성분들은 연속

방정식을 정확하게 만족하지 않고 압력보정값들이 선형적으로 변한다는 가정 하에 만족한다. 유동의 압력구배가 급격히 변하는 유동을 해석할 때 계산격자가 충분히 조밀하지 않으면 물리적으로 타당하지 못한 계산결과를 산출할 여지가 있는 것이다. 운동량보간법의 또 하나의 문제는 경계 근처에 위치한 cell-centered 속도성분들을 계산하고 보정하기 위하여 경계에서의 압력값과 압력보정값이 필요하다. 일반적으로 경계에서의 압력값과 압력보정값은 경계 안쪽에 위치한 값들을 선형외삽(linear extrapolation)하여 구한다. 경계 근처에서 압력구배가 강하고 계산격자가 충분히 조밀하지 못하면 선형외삽으로 구한 값들은 물리적으로 타당치 못한 해를 산출할 여지가 될 수 있다. 운동량보간법에서 cell-face 속도성분들은 Eq.(5)를 사용하여 양해적(explicit)으로 구한다. Eq.(5)를 도입하기 위하여 Eqs.(3)-(4)을 사용하였다. 그러므로 cell-face 속도성분들은 Eqs.(3)-(4)의 가정 하에 운동방정식들을 만족한다. Eqs.(3)-(4) 선형적인 가정들이고, 유동이 강하게 비선형적이고 계산격자가 충분히 조밀하지 못하면 물리적으로 타당치 못한 해를 산출할 여지를 제공할 수 있다. 위의 논의들을 요약하면 운동량보간법의 고유한 문제들은 다음과 같다.

- (1) 검사체적 중심에 위치한 속도성분들의 연속방정식 만족 문제
- (2) 검사체적 면에 위치한 속도성분들의 운동방정식 만족 문제
- (3) 경계(boundary)에서의 압력 및 압력보정값 처리 문제

현재 사용되고 있는 운동량보간법은 위의 운동량보간법의 고유한 문제들을 선형적 가정 하에 처리하고 있다. 그러므로 계산격자가 충분히 조밀하지 못하면 물리적으로 타당하지 못한 계산결과를 산출할 가능성이 있는 것이다.

## 2.3 국부적 질량보존방법에 의한 경계에서의 압력 및 압력보정 처리

위에서 충분히 설명한 바와 같이 경계에서의 압력 및 압력보정값을 선형적으로 처리하는 것은 경계 근처에서 계산격자가 충분히 조밀하지 못하면 문제를 야기시킬 수 있다. 이 문제를 해결하기 위하여 본 연구에서는 다음과 같은 국부 질량보존 방법에 의한 경계에서의 압력 및 압력보정값 처리 방법을 제시하고자 한다. Fig.1에서 보는 바와 같이 경계 근처에서의 반쪽의 검사체적을 고려하자. 이 반쪽 검사체적에서의 연속방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

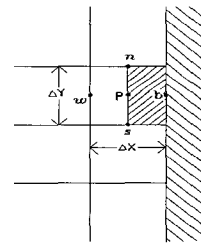


Fig.1 A half of control volume near boundary

$$\rho_b u_b \Delta y - \rho_p u_p \Delta y + 0.5 \rho_n v_n \Delta x - 0.5 \rho_s v_s \Delta x = 0 \quad (8)$$

경계 근처 검사체적 중심에 위치한 속도성분  $u_p$  에 대한 속도보정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_p = u_p^* + (D_u)_p (P'_p - P'_b) \quad (9)$$

Eq.(9)를 Eq.(8)에 대입하면 다음과 같은 경계에서의 압력 및 압력보정식들을 얻을 수 있다.

$$P'_b = P'_p + \frac{(\rho_p u_p^* \Delta y - \rho_b u_b \Delta y + 0.5 \rho_p v_p \Delta x - 0.5 \rho_p v_b \Delta x)}{\rho_p (D_u)_p \Delta y} \quad (10)$$

$$P'_b = P_b^{i-1} + \alpha_p P'_b \quad (11)$$

위 식들에서 속도성분  $v_n$  과  $v_s$  은 보정된 연속방정식을 만족하는 속도성분들이며,  $P_b^{i-1}$  는 전번 반복계산(iteration)에서의 압력값이다. SIMPLE 알고리즘에서 압력보정방정식을 풀 후 먼저 cell-face 속도성분들을 보정한 후, 위 식들을 사용하여 경계에서의 압력 및 압력보정값들을 구하면 된다. 본 저자들의 경험에 의하면 이러한 방식으로 경계에서의 압력 및 압력보정값을 처리하는 것은 해의 수렴 문제나 수치적 안정성 문제를 야기하지 않았다.

### 3. 결과 및 토의

운동량보간법을 사용하여 바디포오스가 큰 유동을 해석할 때 물리적으로 타당하지 못한 결과를 산출함을 보이고, 그 문제점을 해결하는 방법의 타당성을 검증하기 위하여 Fig.2에 제시되어 있는 자연대류 문제에 대한 시험계산을 수행하였다.

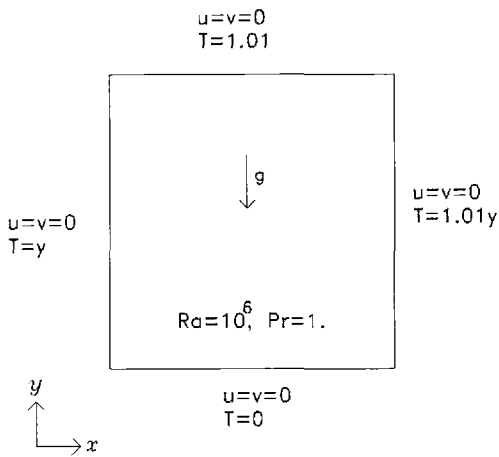


Fig.2 Natural convection in a cavity

이 자연대류문제의 Rayleigh 수는  $10^6$  이고 Prandtl 수는 1이다. Patankar[7]의 SIMPLE 알고리즘에 기초한 컴퓨터 코드를 본 연구의 목적을 위해 수정하였다. 대류항은 멱승법칙도식(power law scheme)을 사용하여 처리하였다. 수치격자를 변화하며 계산을 수행하였으며 압력보정식 잔차(residual)의 절대값의 합이  $10^{-14}$  보다 적으면 수렴하였다고 가정하였다. 먼저 엇갈림격자계를 사용하여 계산을 수행하였으며, 운동량보간법을 사용할 때에는 두가지 경우의 서로 다른 경계면에서의 압력 및 압력보정처리법을 사용하여 계산을 수행하였다

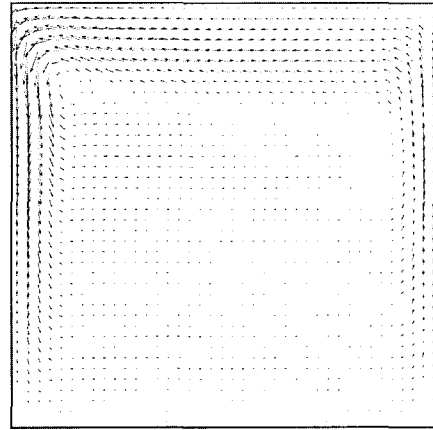


Fig.3 Velocity vector by the staggered grid method using 42x42 uniform grid

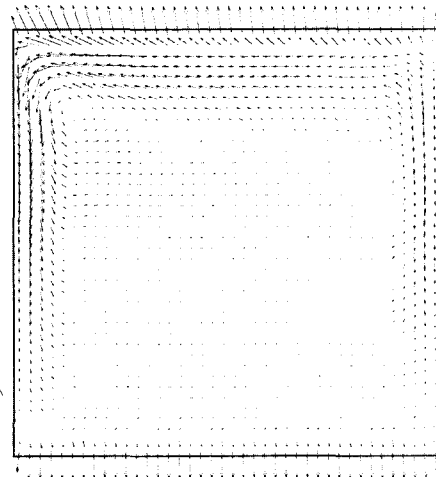


Fig.4 Velocity vector by the momentum interpolation method using 42x42 uniform grid

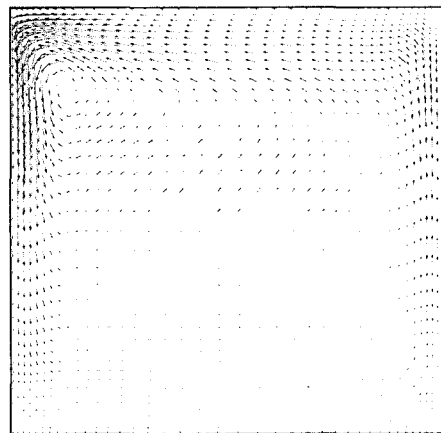


Fig.5 Velocity vector by the momentum interpolation method using 42x42 nonuniform grid

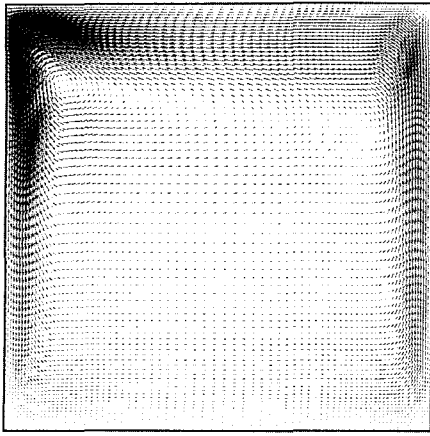


Fig.6 Velocity vector by the momentum interpolation method using  $82 \times 82$  nonuniform grid

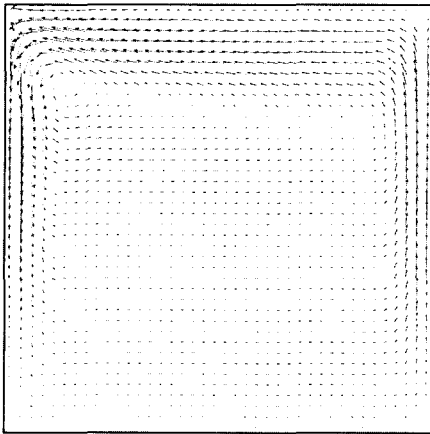


Fig.7 Velocity vector by the momentum interpolation method with the local mass conservation method using  $42 \times 42$  uniform grid

Fig.3은 엇갈림격자계를 사용한 계산결과의 속도벡터를 도식화한 그림을 보여주고 있다. 이 그림에서 보는 바와 같이 엇갈림격자계를 사용한 계산결과는 계산격자가 조밀하지 않아도 물리적으로 타당한 결과를 산출함을 관찰할 수 있다. Fig.4는 운동량보간법을 사용하고 경계에서의 압력 및 압력보정값을 선형 처리할 때의 계산결과를 보여주고 있다. 계산격자가 조밀하지 않을 때에는 ( $42 \times 42$  균일격자) 상부 및 하부 경계 근처에서 매우 이상한 물리적으로 타당하지 못한 해를 산출함을 관찰할 수 있다. Fig.5에서 보는 바와 같이 상부 및 하부 경계 근처에서의 물리적으로 타당하지 못한 속도벡터는 경계 근처에서의 계산격자를 조밀하게 분포시키면 ( $42 \times 42$  비균일격자) 계산결과가 향상되나 여전히 존재함을 관찰할 수 있다. 이 경우 중앙부분에서의 계산격자가 조밀하지 못하여 중앙 오른쪽 상부 영역에 엇갈림격자계의 계산결과에서 관찰되지 않는 물리적으로 타당치 못한 해가 존재함을 관찰할 수 있다. 그러나 Fig.6에서 관찰할 수 있는 바와 같이  $82 \times 82$  비균일격자를 사용한 경우에는 이러한 물리적으로 타당하지 못한 해는 사라지고 엇갈림격자계를 사용한 해와 거의 동일한 해를 산출함을 관찰할 수 있다. Fig.7은 운동량보간법을 사용하고 경계에서의 압력 및 압력보정값을 국부적 질량보존방법으로 처리할 때의 계산결과를 보여주고 있다. Fig.7은 Fig.4에서 관찰되는 상부 및 하부 경계 근처에서의 물리

적으로 타당하지 못한 속도벡터가 전혀 존재하지 않음을 관찰할 수 있다. 이것은 Fig.4에서 관찰되는 상부 및 하부 경계 근처에서의 물리적으로 타당하지 못한 속도벡터가 이곳에서의 국부적인 질량보존방정식을 만족하지 못하여 발생되었음을 보여준다. 이 그림은 경계에서의 압력 및 압력보정값을 국부적 질량보존방법으로 처리하는 것이 이 곳에서 물리적으로 타당치 못한 해를 제거하는데 매우 효율적임을 보여주고 있다.

#### 4. 결론

운동량보간법을 사용하여 바디포오스가 큰 유동을 해석할 때 문제점들과 해결법에 대한 연구를 수행하였다. 운동량보간법을 사용할 때 파생되는 고유한 문제들에 관하여 논의하였고, 물리적으로 타당치 못한 해를 제거하는 가장 간단한 방법은 계산격자를 적절히 분포하는 것임을 수치실험을 통하여 검증하였다. 경계에서의 압력 및 압력보정값을 국부적 질량보존방법으로 처리하는 방법을 제시하였고, 이 방법이 경계에서의 압력 및 압력보정값의 선형처리로 야기되는 물리적으로 타당하지 못한 결과를 제거하는데 매우 효율적인 방법임을 보였다. 마지막으로 언급하고 싶은 것은 운동량보간법을 사용하여 바디포오스가 큰 유동을 해석할 때에는 계산격자의 분포에 주의를 요한다는 것이다. 그렇지 않을 경우 물리적으로 타당치 못한 엉뚱한 계산결과를 얻을 가능성이 있다.

#### 후기

이 연구는 과학기술부가 지원하는 원자력 중장기 사업의 일환으로 수행되었다.

#### 참고문헌

- [1] Rhie, C. M. and Chow, W. L., "Numerical Study of the Turbulent Flow Past an Airfoil with Trailing Edge Separation," *AIAA J.* 21-11 (1983), p.1525.
- [2] Majumdar, M., "Role of Under-relaxation in Momentum Interpolation for Calculation of Flow with Non-staggered Grids," *Numer. Heat Transfer*, 13 (1988), p.125.
- [3] Choi, S. K., "Note on the Use of Momentum Interpolation Method for Unsteady Flows," *Numer. Heat Transfer, Part A*, 36 (1999), p.545.
- [4] Miller, T. F. and Schmidt, F. W., "Use of a Pressure-Weighted Interpolation method for the Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations on a Nonstaggered Grid System," *Numer. Heat Transfer*, 14 (1988), p. 213.
- [5] Gu, C. Y., "Computation of Flows with Large Body Forces," *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, Taylor, C., Homsy, G. M., Homsy, G. M. (ed), Pineridge Press, Swansea, (1991).
- [6] Jo, J. C. and Choi, S. K., "Numerical Analysis of Initial Formation of Thermal Stratification in a Curved Pipe," *Proc. Korean Nuclear Society Spring Meeting*, Kori, (2000).
- [7] Patankar, S. V., *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, McGraw-Hill, New York, (1990).