

평판에서 빔 보강재의 결합 위치를 이용한 구조물 변경법 Structural Dynamics Modification Using Position of Beam Stiffener on Plate.

정의일*·박윤식**

Eui-Il Jung and Youn-Sik Park

Key Words : Substructure(부분구조물), Synthesis(합성), Non-matching(비부합), Eigenvale(고유치), structural dynamics modification(구조물 변경법)

ABSTRACT

Substructures position is considered as design parameter to obtain optimal structural changes to raise its dynamic characteristics. In conventional SDM (structural dynamics modification) method, the layout of modifying substructures position is first fixed and at that condition the structural optimization is performed by using the substructures size and/or material property as design parameters. But in this paper as a design variable substructures global translational and rotational position is treated. For effective structural modification the eigenvalue sensitivity with respect to that design parameter is derived based on measured frequency response function. The optimal structural modification is calculated by combining eigenvalue sensitivities and eigenvalue reanalysis technique iteratively. Numerical examples are presented to the case of beam stiffener optimization to raise the natural frequency of plate.

———— 기호설명 ————

N_s	부분 구조물의 개수
s	s번째 부분 구조물
Ω^s	s번째 부분 구조물의 영역
$\partial\Omega_b$	부분 구조물의 접점 영역
\bar{u}	변위
u	절점 변위
$\bar{\lambda}$	라그랑지 승수
λ	절점 라그랑지 승수
\bar{u}_b	경계 기준면 변위
u_b	경계 기준면의 절점 변위
N_u	변위 형상 함수
N_λ	라그랑지 승수의 형상 함수
N_b	경계 기준면의 형상 함수
C	연결 행렬
C_b	보간 행렬
D	동적 강성
H	주파수 응답함수
ω_r	r번째 고유 진동수

을 많이 받기 때문에 구조물의 동적 응답을 개선하기 위해 부가 구조물을 첨가 삭제함으로써 구조물의 고유 진동수를 변경하고자 하는 구조물 변경법이 널리 사용되어 왔다. 이제까지 구조물 변경법에 대한 연구는 많이 있어 왔다. 그들 대부분은 확정된 배치도 상에서 구조물의 물성치나 구조물의 크기변화를 통해서 이루어졌다[1~3]. 그러나 본 논문에서는 디자인 변수로서 구조물의 결합 위치를 사용하여 구조물의 고유 진동수를 변경하고자 한다. 선행 연구로 구조물의 결합 형태를 디자인 변수로 사용한 연구가 Twu 와 Choi 에 의해 수행된 적이 있으며[4~5], 유한요소법에 의해 생성된 요소를 재생성하므로써 구조물을 변경하였다 그러나 본 연구에서는 구조물의 결합 위치를 변경하므로써 구조물의 고유 진동수를 변경하고자 한다.

구조물의 결합을 효과적으로 다루기 위해, 부분 구조물 합성의 개념을 사용하여 합성된 구조물의 고유 진동수를 구하고자 한다. 구조물 합성의 개념을 사용하여 구조물의 일부분 또는 부분 구조물은 분리되어 모델링되고, 전체 구조물로 합성된다 이 부분 구조물 합성법은 다른 많은 논문에서 사용되어 왔다. Simpson 은 이 부분 구조물 합성의 개념을 사용하여 구조물의 고유치를 구하는 연구를 하였다[6].

구조물을 변경하기 위한 변경 부분 구조물이 최적의 결합 위치를 찾기 위해 다른 부분 구조물 위를 움직여 나갈 때, 결합 노드의 위치가 변경된다. 그러므로 자연스럽게 절점의 위치가 서로 불일치 되는 현상이 발생하므로 불일치 절점이 있는 구조물의 합성이 먼저 연구되어야 한다. Park,

1. 서론

구조물의 응답은 구조물의 고유 진동수에 영향

* 한국과학기술원 대학원 기계공학과
E-mail : jungeuiil@kaist.ac.kr
Tel : (042) 869-3060, Fax : (042) 869-8220

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

Felippa 그리고 Rebel 은 불일치 노드를 해결하기 위해 부분 구조물 사이에 경계 기준면을 만들고, 이 경계 기준면에 부분 구조물을 결합하는 방법을 제시하였다[7].

본 연구에서는 부분 구조물의 결합 위치를 디자인 변수로 하여 구조물의 고유 진동수를 변경하고자 한다. 이를 위해 부분 구조물의 결합 위치인 병진 좌표 값과 회전 좌표 값에 대한 민감도의 민감도를 세우고, 이 민감도를 이용하여 가장 민감한 변경 방향을 설정하여 최적화 과정을 통해서 구조물을 변경하고자 한다. 적용 예로 평판이라는 부분 구조물위에 빔 보강재라는 부분 구조물의 결합 위치를 디자인 변수로 한 구조물 변경을 묘사해 보았다.

2. 합성된 구조물의 모달 해석

2.1 지배 방정식

그림 1 과 같은 구조물을 살펴보자. 설명을 위해서 구조물이 세 개의 구조물로부터 합성이 가능하다고 가정하자. 부분 구조물의 합성은 구조물의 경계 사이에 경계 기준면(interface frame)을 만들고 이 경계 기준면에 부분 구조물의 경계 변위를 일치시키므로 해서 구조물을 합성할 수 있다. 전체 구조물의 지배 방정식을 세우기 위해 해밀턴의 원리와 경계 결합 조건식을 함께 사용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V + W_{nc} + \Pi_\lambda) dt = 0 \quad (1)$$

여기서

$$\Pi_\lambda = \sum_{s=1}^{s=N_s} \int_{\Gamma^{(s)}} \bar{\lambda}^{(s)T} (\bar{u}^{(s)} - \bar{u}^b) dS \quad (2)$$

을 나타낸다. N_s 는 부분 구조물의 개수를 나타내며, \bar{u}^b 는 가상의 경계 기준면의 변위를 나타낸다. $\bar{\lambda}^{(s)}$ 는 라그랑지 승수를 나타내며, 물리적으로는 전체 구조물의 평형을 유지하기 위해 부분 구조물 간에 작용하는 내력에 해당한다. 변위를 적당한 형상 함수로 이산화하면 다음과 같이 된다.

$$\bar{u}^{(s)} = N_u^{(s)} u^{(s)}, \bar{\lambda}^{(s)} = N_\lambda^{(s)} \lambda^{(s)}, \bar{u}^b = N_b u_b \quad (3)$$

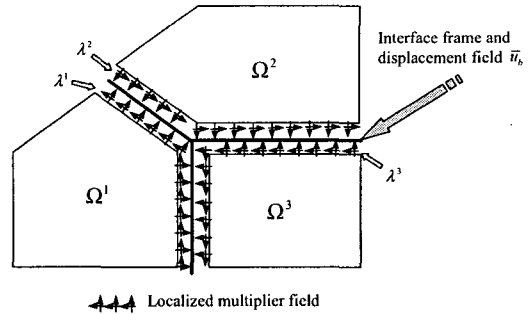


Figure 1. Substructure synthesis through interface frame

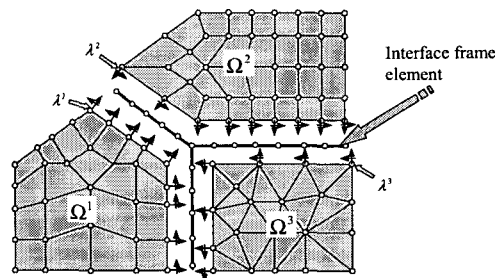


Figure 2. Discretization of structure

여기서 $N_u^{(s)}$, $N_\lambda^{(s)}$, N_b 은 각각 부분 구조물의 변위 형상 함수, 라그랑지 승수의 형상 함수, 경계 기준면의 형상 함수이다. $u^{(s)}$, $\lambda^{(s)}$, u_b 는 각각 부분 구조물, 라그랑지 승수, 경계 기준면의 절점 변위를 나타낸다. 그림 2 에 부분 구조물이 이산화된 결과를 나타내고 있다.

위의 이산화 과정을 통해서 식(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{s=N_s} \left(\frac{1}{2} \dot{u}^{(s)T} M^{(s)} \dot{u}^{(s)} - \frac{1}{2} u^{(s)T} K^{(s)} u^{(s)} + f^{(s)T} u^{(s)} + \lambda^{(s)T} C^{(s)} u^{(s)} - \lambda^{(s)T} C_b^{(s)} u_b^{(s)} \right) dt = 0 \quad (4)$$

여기서

$$C^{(s)} = \int_{\Omega^s} N_\lambda^T N_u dS, C_b = \int_{\Gamma^{(s)}} N_\lambda^T N_b dS \quad (5)$$

위 식에서 $M^{(s)}$, $K^{(s)}$, $f^{(s)}$, $C^{(s)}$, $C_b^{(s)}$ 는 각각 s 번째 부분 구조물의 질량 행렬, 강성 행렬, 외력, 연결 행렬, 보간 행렬을 나타낸다. 만약 그림 2 과 같이 라그랑지 승수의 절점이 부분 구조물의 경계 절점과 일치하는 경우는 연결 행렬 $C^{(s)}$ 는 0 과 1 로 이루어지는 Boolean 행렬이 된다. 1 은 부분 구조물의 절점이 다른 구조물과 접하는 경계에 있는 절점임을 나타낸다.

여기서 C_b 을 보간 행렬이라 부른다. 보간 행렬은 경계 기준면을 근사화함으로써 계산되는 양인데, 경계 접점에서 경계 기준 형상 함수를 계산함으로써 얻어진다. 그 다음으로 식(4)로부터 적분항의 미소 변화량을 영으로 취하면 다음과 같이 이산화된 지배 방정식을 세울 수 있다.

$$\delta \mathbf{u}^{(s)} : \mathbf{M}^{(s)} \ddot{\mathbf{u}}^{(s)} + \mathbf{K}^{(s)} \mathbf{u}^{(s)} = \mathbf{f}^{(s)} + \mathbf{C}^{(s)T} \boldsymbol{\lambda}^{(s)} \quad (6a)$$

$$s = 1, \dots, N_s$$

$$\delta \boldsymbol{\lambda}^{(s)} : \mathbf{C}^{(s)} \mathbf{u}^{(s)} - \mathbf{C}_b^{(s)} \mathbf{u}_b = 0 \quad s = 1, \dots, N_s \quad (6b)$$

$$\delta \mathbf{u}_b : \sum_{s=1}^{N_s} (\mathbf{C}_b^{(s)T} \boldsymbol{\lambda}^{(s)}) = 0 \quad (6c)$$

위의 관계식을 연립해서 식을 만들면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\lambda}} \\ \ddot{\mathbf{u}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{C}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

여기서 M , K 와 C 는 전체 구조물의 질량 행렬, 강성 행렬, 연결 행렬로써 각 부분 구조물의 행렬 값이 대각 성분에 위치한다. C_b 는 $C_b^{(s)}$ 을 열 방향으로 쌓아서 만들 수 있다.

2.2 합성된 구조물의 고유진동수

만약 주파수 ω 로 가진되는 조화 가진의 경우에 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ 라 가정함으로써 식(7)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D}(\omega) & -\mathbf{C}^T & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_b \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_b^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

여기서 $\mathbf{D}(\omega) = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = \mathbf{H}^{-1}(\omega)$ 는 동적 강성을 말한다. 합성된 구조물의 고유 진동수가, 부분 구조물 자체의 고유 진동수와 일치하지 않는다고 가정한다면, 위의 식 (8)은 좀더 간단한 형태로 만들 수 있다.

식 (8)의 첫번째 행으로부터

$$\mathbf{u} = \mathbf{D}(\omega)^{-1} \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{H}(\omega) \mathbf{C}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (9)$$

위 식 (9)을 식 (8)에 넣고 정리하면 다음과 같

이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{bb}(\omega) & \mathbf{C}_b \\ \mathbf{C}_b^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서 밑 첨자 bb 는 구조물의 경계 자유도를 이야기 하며, $\mathbf{H}_{bb}(\omega) = \mathbf{C}\mathbf{H}(\omega)\mathbf{C}^T$ 는 부분 구조물의 경계 자유도에 대한 주파수 응답 함수를 대각 성분으로 하는 대각 행렬이다.

합성된 구조물의 자유 진동에 대한 고유 진동수 ω_r 는 위 식의 행렬식이 영이 되어야 함을 이용한다.

$$\det(\mathbf{H}_{bb}) \det(\mathbf{C}_b^T \mathbf{H}_{bb}^{-1}(\omega_r) \mathbf{C}_b) = 0 \quad (11)$$

그리고, 합성된 구조물의 고유 진동수가, 부분 구조물 자체의 고유 진동수와 일치하지 않는다고 가정했으므로, $\det(\mathbf{H}_{bb}) \neq 0$ 이라고 말할 수 있으며, 위의 고유치 탐색법은 다음과 같이 줄어들 수 있다.

$$\det(\mathbf{C}_b^T \mathbf{H}_{bb}^{-1}(\omega_r) \mathbf{C}_b) = \sum_{s=1}^{N_s} \det(\mathbf{C}_b^{(s)T} \mathbf{H}_{bb}^{(s)-1}(\omega_r) \mathbf{C}_b^{(s)}) = 0 \quad (12)$$

합성된 구조물의 고유 진동수를 알아내기 위해서는 부분 구조물의 경계 자유도에서 주파수 응답 함수를 측정함으로써 전체 구조물의 고유 진동수를 구할 수 있다.

전체 구조물의 고유 벡터는 다음과 같이 구할 수 있다. 행렬식 탐색법으로 구한 전체 구조물의 고유 진동수를 ω_r 라 했을 때, 식(10)의 두 번째 행으로부터 \mathbf{u}_b 는 다음식을 만족해야 한다.

$$\mathbf{C}_b^T \mathbf{H}_{bb}^{-1}(\omega_r) \mathbf{C}_b \mathbf{u}_b = \mathbf{G}(\omega_r) \mathbf{u}_b = \mathbf{0} \quad (13)$$

경계 변위 \mathbf{u}_b 는 행렬식 탐색에 사용된 $\mathbf{G}(\omega_r)$ 의 영공간이 된다. 또한, 식 (10)의 첫번째 행으로부터 라그랑지 승수는 다음과 같이 계산된다.

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{H}_{bb}^{-1}(\omega_r) \mathbf{C}_b \mathbf{u}_b \quad (14)$$

3. 고유치 민감도 해석

3.1 고유치 민감도

위에 기술한 바와 같이 합성된 전체 구조물의 고유치는 실험에서 구한 부분 구조물의 경계 주파수 응답함수로부터 구할 수 있다. 그러므로 유한 요소 법에서 구한 모델을 이용하는 방법에 비해서 모델 개선과 같은 과정이 필요 없는 장점을 가지고 있다.

구조물의 고유치를 변경하기 위해서 디자인 변수에 대한 고유치의 민감도를 계산할 필요가 있다. 위의 지배 방정식 식(10)로부터 r 번째 고유진동수 ω_r 에 대해, 식(10)에 $[\lambda^T, \mathbf{u}_b^T]$ 을 앞 뒤로 곱하면 다음과 같은 스칼라 함수를 얻을 수 있다.

$$-\lambda^T \mathbf{H}_{bb}(\omega_r) \lambda + 2\lambda^T \mathbf{C}_b \mathbf{u}_b = 0 \quad (15)$$

위식을 디자인 변수 d_i 에 대해 미분을 취하면

$$-\lambda^T \frac{d\mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{dd_i} \lambda + 2\lambda^T \frac{d\mathbf{C}_b}{dd_i} \mathbf{u}_b = 0 \quad (16)$$

그리고 디자인 변수는 고유진동수와 주파수 응답 함수에 영향을 미치므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{dd_i} = \frac{\partial \mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{\partial d_i} + \frac{\partial \mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{\partial \omega_r} \frac{\partial \omega_r}{\partial d_i} \quad (17)$$

그러므로 위식을 (17)을 식(16)에 넣으면 다음과 같은 고유치에 대한 디자인 변수의 민감도 식을 구할 수 있다.

$$\frac{d\omega_r}{dd_i} = \frac{-\lambda^T \frac{\partial \mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{\partial d_i} \lambda + 2\lambda^T \frac{d\mathbf{C}_b}{dd_i} \mathbf{u}_b}{\lambda^T \frac{\partial \mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{\partial \omega_r} \lambda} \quad (18)$$

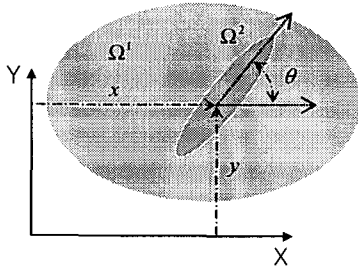


Figure 3. Positional design variables

3.2 결합 위치에 따른 고유치 민감도

여기서는 결합 위치를 디자인 변수로 고려하여 고유치 민감도 식을 고려해본다. 그림 3과 같이 디자인 변수가 부분 구조물 Ω^2 의 병진 방향으로의 이동량 $x^{(s)}, y^{(s)}$ 그리고 회전 방향으로의 이동량 $\theta^{(s)}$ 을 디자인 변수로 한다.

변경 구조물의 결합 위치를 병진 방향 $x^{(s)}$ 와 $y^{(s)}$ 방향으로 변경할 경우, 경계 주파수 응답함수는 변화가 없다. 그러나 회전 변위량 $\theta^{(s)}$ 이 바뀌는 경우는 경계 주파수 응답 함수는 다음과 같은 좌표 변환을 겪게 된다.

$$\mathbf{H}_{bb}^{(s)}(\omega_r, \theta^{(s)}) = T(\theta^{(s)})^T \mathbf{H}_{bb}^0(\omega_r, 0) T(\theta^{(s)}) \quad (19)$$

여기서 $T(\theta^{(s)})$ 는 좌표 변환 행렬이다. 그러므로 현재의 디자인 변수 $\theta^{(s)}$ 에 대한 경계 주파수 응답 함수의 미분값은 다음과 같이 계산되어진다.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{H}_{bb}^{(s)}(\omega_r, \theta^{(s)})}{d\theta^{(s)}} &= \frac{dT(\theta^{(s)})^T}{d\theta^{(s)}} \mathbf{H}_{bb}^0(\omega_r, 0) T(\theta^{(s)}) \\ &+ T(\theta^{(s)})^T \mathbf{H}_{bb}^0(\omega_r, 0) \frac{dT(\theta^{(s)})}{d\theta^{(s)}} \end{aligned} \quad (20)$$

한편 보간 행렬의 에 대한 미분은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{C}_b^{(s)}}{dd^{(s)}} = \int_{\Gamma^{(s)}} \mathbf{N}_\lambda^{(s)T} \frac{d\mathbf{N}_b(\xi, \eta)}{dd^{(s)}} dS \quad (21)$$

먼저 병진 방향의 병진 이동량 $x^{(s)}, y^{(s)}$ 에 대한 경우를 살펴보자. 경계 기준에 대한 형상 함수 \mathbf{N}_b 는 보통 자연 좌표 ξ 와 η 로 표현되므로 체인 룰을 사용하여 \mathbf{N}_b 에 대한 미분을 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial x^{(s)}} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial y^{(s)}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x^{(s)}} & \frac{\partial \eta}{\partial x^{(s)}} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y^{(s)}} & \frac{\partial \eta}{\partial y^{(s)}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

그러나 자유 좌표 ξ 와 η 를 $x^{(s)}$ 와 $y^{(s)}$ 에 대해 직접 미분하기 힘들므로 식 (22)의 역행렬을 체인 룰을 사용하여 다음과 같이 적을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{(s)}}{\partial \xi} & \frac{\partial y^{(s)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x^{(s)}}{\partial \eta} & \frac{\partial y^{(s)}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial x^{(s)}} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial y^{(s)}} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial x^{(s)}} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial y^{(s)}} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

여기서 \mathbf{J} 는 자코비안 행렬이라 불리우며

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x^{(s),\xi} & y^{(s),\xi} \\ x^{(s),\eta} & y^{(s),\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum N_{bi,\xi}(\xi,\eta)x_i & \sum N_{bi,\xi}(\xi,\eta)y_i \\ \sum N_{bi,\eta}(\xi,\eta)x_i & \sum N_{bi,\eta}(\xi,\eta)y_i \end{bmatrix} \quad (24)$$

식(22)과 (23)로부터 Γ 는 \mathbf{J} 의 역행렬의 관계임을 알 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial x^{(s)}} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial y^{(s)}} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

그러므로 식(25)을 식(21)에 넣으면 보간 행렬의 미분값을 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\mathbf{C}_b^{(s)}}{dx^{(s)}} \\ \frac{d\mathbf{C}_b^{(s)}}{dy^{(s)}} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_b(\xi_\lambda, \eta_\lambda)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_b(\xi_\lambda, \eta_\lambda)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

그림 4와 같이 회전 방향의 이동량 $\theta^{(s)}$ 에 대한 형상 함수의 미분을 살펴보자. 병진 이동량에 대한 기술과 유사하게 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \theta^{(s)}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta^{(s)}} & \frac{\partial y}{\partial \theta^{(s)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -l^{(s)} \sin \theta^{(s)} & l^{(s)} \cos \theta^{(s)} \end{bmatrix} \left[\mathbf{J}^{-1} \right] \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_b}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

여기서 $l^{(s)}$ 는 회전 중심으로부터의 거리를 의미한다.

그러므로 식(25)와 (27)을 정리하면, 결합 위치에 따른 민감도 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

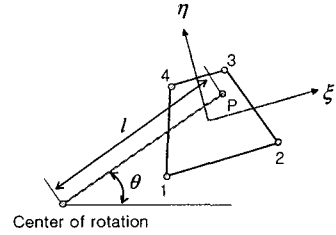


Figure 4. Rotational design variable and natural coordinates for four-node element

$$\begin{Bmatrix} \frac{d\omega_r}{dx^{(s)}} \\ \frac{d\omega_r}{dy^{(s)}} \\ \frac{d\omega_r}{d\theta^{(s)}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{p} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda^{(s)T} \frac{d\mathbf{H}_{bb}^{(s)}(\omega_r, \theta^{(s)})}{d\theta^{(s)}} \lambda^{(s)} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \lambda^{(s)T} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{(s)T} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{(s)T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -l \sin \theta & l \cos \theta \end{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}_b(\xi_\lambda, \eta_\lambda)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}_b(\xi_\lambda, \eta_\lambda)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \mathbf{u}_b^{(s)} \quad (28)$$

위 식을 사용하여 구조물 변경을 위한 가장 민감한 방향을 찾아 구조물 변경을 행하게 된다. 여기서 p 는 다음과 같이 정의한다.

$$p = \lambda^T \frac{\partial \mathbf{H}_{bb}(\omega_r)}{\partial \omega_r} \lambda \quad (29)$$

4. 평판에 빔 보강재를 이용한 구조물 변경예

앞에서 설명한 동특성 변경법을 평판과 빔 보강재로 이루어진 구조물에 적용하여 보았다. 구조물의 고유 진동수를 높이기 위해서 평판 구조물 위에 결합되는 빔 보강재의 결합 위치를 디자인 변수로 하여 최적화 과정을 수행한다. 한 쪽이 고정된 평판은 넓이 600mm* 450mm, 두께 2mm의 치수를 갖는다. 평판의 물성치는 탄성강도 200 Gpa와 밀도 7860 kg/m³이다. 이 평판은 유한 요소법을 사용하여 48개의 판 요소로 나누어 질량 행렬과 강

성 행렬을 만들었다. 판 요소는 절점 당 한 개의 병진 자유도와 두개의 회전 자유도를 갖는다. 이 평판 위에 부착되는 빔 보강재는 길이 150mm, 높이 10mm 의 치수를 가지며, 물성치는 평판과 같다. 한 개의 빔은 유한 요소법으로 3 개의 빔요소로 모델링했으며, 빔 보강재의 결합 위치를 나타내는 x, y 좌표값과 회전량 θ 가 디자인 변수가 되겠다.

이 예제의 목적은 이 평판의 첫번째 고유 진동수 $\omega_1 = 29.4rad/sec$ 를 빔 보강재의 위치로 변경하려고 한다. 제한 조건은 빔 보강재가 평판 영역을 벗어나지 않는 범위 내에서 최적 위치를 찾으려고 하였다. 최적 문제는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{objective: } & \max(-\omega_1) \\ \text{subject to: } & 0 \leq x \leq 0.6 \\ & 0 \leq y \leq 0.45 \end{aligned}$$

그림 5 에 각각 초기위치에 출발하여 벽쪽으로 최적 빔의 위치가 이동하면서 고유 진동수를 높이기 위해 빔이 회전함을 알 수 있다. 그림 6a 에 초기 위치에서 출발했을 때 빔의 x 위치에 따른 첫번째 고유 진동수의 변화 그림이다. $\omega_1 = 28.39rad/sec$ 에서 시작하여 $\omega_1 = 53.24rad/sec$ 까지 고유 진동수가 올라갔다. 그림 6b 는 초기 위치에서 출발했을 경우, 빔의 회전각을 나타낸 것이다.

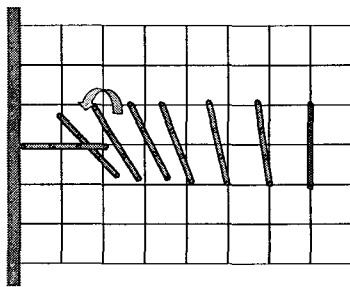


Figure 5. Variation of beam position for increase of natural frequency

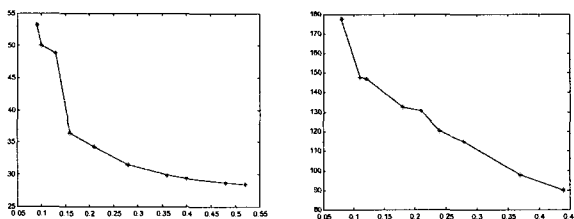


Figure 6. Variation of natural frequency

5. 결론

본 연구에서는 부분 구조물의 결합 위치를 디자인 변수로 하여 구조물의 고유 진동수를 변경하고자 하였다. 이를 위해 부분 구조물의 결합 위치인 병진 좌표 값과 회전 좌표 값에 대한 고유치의 민감도를 세우고, 이 민감도를 이용하여 가장 민감한 변경 방향을 설정하여 최적화 과정을 통해서 구조물을 변경하였다. 적용 예로 평판이라는 부분 구조물위에 빔 보강재라는 부분 구조물의 결합 위치를 디자인 변수로 한 구조물 변경을 묘사해 보았다.

후 기

본 연구는 국가지정연구사업 "진동 저감을 위한 동특성 변경기술(M1-0001-00-0139)"의 지원에 의한 것입니다.

참고문헌

- (1) Curtis J. Hoff, Michael M. Bernitsas, Robert E. Sandström, and William J. Anderson, Inverse Perturbation Method for Structural Redesign with Frequency and Mode Shape Constraints, AIAA Journal, Vol. 22, No. 9, pp.1304-1309, July 1984.
- (2) Malcolm J. Smith and Stanley G. Hutton, Frequency Modification Using Newton's method and Inverse Iteration Eigenvector Updating, AIAA Journal, Vol. 30, No. 7, pp.1886-1891, July 1992.
- (3) Malcolm J. Smith and Stanley G. Hutton, A Perturbation Method for Inverse Frequency Modification of Discrete, Undamped Systems, Journal of Applied Mechanics, Vol. 61, No. 7, pp. 887-892, December 1994.
- (4) Sung-Ling Twu and Kyung K. Choi, Configuration Design Sensitivity Analysis of Built-Up Structures Part I: Theory, International Journal for numerical methods in engineering, vol 35, pp.1127-1150, 1992.
- (5) Sung-Ling Twu and Kyung K. Choi, Configuration Design Sensitivity Analysis of Built-Up Structures Part II: Numerical Method, International Journal for numerical methods in engineering, vol 36, pp.4201-4222, 1993.
- (6) A. Simpson, The Kron's methodology and Practical Algorithms for eigenvalue, sensitivity and response analysis of large scale structural systems. , Aeronautical Journal 84, pp. 417-433, 1980.
- (7) K. C. Park, C. A. Felippa and Rebel, A Simple Algorithm for Localized Construction of Non-matching Structural Interface. International Journal for Numerical Methods in Engineering 53, pp. 2117-2142, 2002.