

유연보의 과도 진동 감쇠를 위한 점탄성 재료의 최적 분포

Optimal Distribution of Viscoelastic Material for Transient Vibration Suppression of a Flexible Beam

김태우* · 김지환**

Tae-Woo Kim and Ji-Hwan Kim

Key Words : Viscoelastic damping, GHM model, Eigenvalue sensitivity, Unconstrained damping treatment

ABSTRACT

Eigenvalues are taken as performance criteria for structural damping design using viscoelastic material. Given material properties, optimal distribution of damping material is sought based on eigenvalue sensitivity. For eigenanalysis of frequency dependent viscoelastic material treated structures, Golla-Hughes-McTavish(GHM) model is used and some dominant modes are chosen for consideration. To avoid the intensity of computation caused by increased problem size, an alternative approximate method is proposed which uses elastic modes and can be applied under small damping assumption. A cantilever beam treated with unconstrained viscoelastic layer is tested and optimal distribution of thickness of the layer is illustrated. Partial coverage configurations are compared with the one-sided full coverage case.

1. 서 론

고유치는 어떤 동적시스템의 성능을 나타내는 지표로 사용될 수 있다. 특히 제어시스템의 설계시 고유치는 설계자가 원하는 안정성과 성능 특성을 갖도록 하는데 있어서 직접적인 설계변수가 되어왔다. 따라서 구조물의 진동특성을 향상시키기 위한 구조감쇠의 설계에 있어서도 고유치를 통한 접근은 보다 일반적인 방법이 될 수 있다. 구조물의 수동적인 진동감쇠를 위해서 널리 사용되는 점탄성재료의 경우 물성치가 주파수의존성을 가지기 때문에 고유치를 구하기가 쉽지 않다. 때문에 점탄성 재료를 이용한 감쇠설계는 주로 특정주파수에서의 응답을 최소화하거나 에너지 소산을 최대화하는 방법으로 이루어져 왔다 [1].

점탄성 구조물의 고유치를 구하기 위해서 탄성모드를 기반으로 하는 반복법[2]이나 모달변형에너지법[3]이 사용되어 왔다. 최근에 발표된 점탄성거동의 모델들은 소산좌표

또는 내부변수라 불리는 추가적인 자유도를 도입함으로써 일반적인 2차 또는 1차형태의 이산화된 미분방정식으로의 정식화를 가능하게 해주어 일반적인 고유치 문제로의 변환이 가능하게 된다 [4-5]. 또한 반복법이나 모달변형에너지법으로는 구할 수 없는 과도감쇠모드를 이로부터 구할 수 있게되며 감쇠가 큰 경우에도 해를 구할 수 있다. 이러한 방법의 단점으로는 물성치를 정확하게 나타내는 정도에 따라 새롭게 도입되어야 할 자유도가 늘어난다는 것이며 따라서 다루어야 할 행렬의 크기가 커지며 계산시간이 많이 걸린다는데 있다.

본 논문에서는 고유치 민감도를 이용하여, 유연보의 과도 진동을 억제하기 위한 최적 감쇠설계 문제를 다룬다. 일반적으로 점탄성 재료를 이용하여 보의 표면 전체에 감쇠치리를 하거나 변형이 가장 큰 부분에 감쇠치리를 하는 식으로 연구가 많이 되어져 왔다. 구조물의 경량화 관점에서 감쇠재료에 의한 질량증가 또한 설계시 고려해야 할 사항이므로 질량증가를 최소화 하면서 감쇠를 최대화하는 최적화 과정이 필요하게 된다. 이에 주어진 물성치를 가진 점탄성 재료를 이용하여 구속되지 않은 감쇠치리된 보의 최적 감쇠설계를 수행하였다. 점탄성 층의 두께를 설계변수로 삼아서 원하는 고유치특성을 구속조건으로 부가한 후 질량을 최소화하는 두께의 분포를 구하였다. 거동을 지배하는 몇 모드만을 설계 고려대상으로 하여 GHM모델을 이용한 고

* 서울대학교 기계항공공학부
E-mail : twkim@snu.ac.kr
Tel : (02) 880-1906, Fax : (02) 887-2662

** 서울대학교 기계항공공학부

유치해석을 기반으로 고유치 민감도를 구하였다. 또, 감쇠가 적은 경우 계산상의 용이성을 위하여, 추가적인 자유도의 도입 없이 탄성모드로부터 쉽게 감쇠된 모드를 구할 수 있는 근사적인 방법과, 2차 미분방정식 형태의 민감도 계산을 이용한 설계방법을 제시하였다. 최근에 압전재료 등을 이용한 능동진동제어 기법이 많이 연구되고 있지만 경제성, 구현의 용이성, 안정성등의 관점에서 볼 때 수동진동감쇠 기법은 여전히 고려할 만한 방법이다.

2. 유한 요소 정식화

2.1 지배방정식

그림 1에 점탄성 처리가 된 외팔보가 나타나있다. 외팔보의 거동은 탄성보의 중립축의 중방향변위 u_0 , 보의 두께방향으로 일정한 횡방향변위 w 와, 부분적으로 처리된 경우 점탄성 재료의 세장비의 효과를 고려하기 위한, 점탄성 층의 전단변형을 나타내는 전단각 ψ 로 나타내어진다.

(1) 변형율-변위 관계식

탄성보와 점탄성 층에 대해서 변위는 첨자 b 와 i 을 이용하여 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} u_b(x, z) &= u_0(x) - z \frac{\partial w(x)}{\partial x} \\ u_i(x, z) &= u_0(x) - z \frac{\partial w(x)}{\partial x} - (z - \frac{1}{2} h_b) \psi(x) \\ w_b(x) &= w_i(x) = w(x) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 전단각의 회전방향은 탄성보의 회전방향과 같게 하였다. 따라서 선형 변형율-변위 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon^b_{xx}(x, z) &= \frac{\partial u_b}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon^i_{xx}(x, z) &= \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (z - \frac{1}{2} h_b) \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \epsilon^i_{xz}(x, z) &= \frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\psi \end{aligned} \quad (2)$$

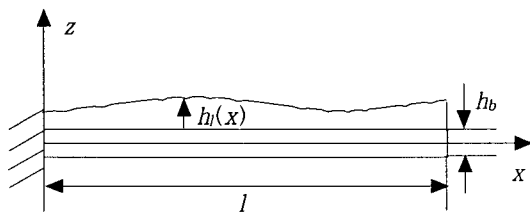


Fig.1 A cantilever beam treated with viscoelastic damping material

(2) 구성방정식

점탄성 층의 구성방정식은 시간영역에서 다음과 같은 선형 유전적분형태로 표현되고,

$$\sigma_{xz}(t) = \int_0^t G'(t-\tau) \dot{\epsilon}_{xz}(\tau) d\tau \quad (3)$$

여기서 G' 는 이완함수이며 윗식은 라플라스변환을 통하여 다음과 같이 표현된다.

$$\tilde{\sigma}_{xz}(s) = s \tilde{G}(s) \tilde{\epsilon}_{xz}(s) = G(s) \tilde{\epsilon}_{xz}(s) \quad (4)$$

여기서 $s = j\omega$ 인 경우 $G(j\omega)$ 는 복소수 모듈러스를 나타낸다.

(3) 운동방정식

확장된 해밀턴의 원리를 이용하면, 운동에너지의 변분 δT , 가상내부에너지 δU , 외력 j 에 의한 가상일 δW 사이에는 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\delta T - \delta U = \delta W \quad (5)$$

여기서 δ 는 변분을 나타내며, 각항은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \delta T &= b \int_0^l \left\{ \int_{-\frac{1}{2} h_b}^{\frac{1}{2} h_b} \rho_b \dot{u}_b \delta \dot{u}_b dz + \int_{\frac{1}{2} h_b}^{\frac{1}{2} h_b + h_i(x)} \rho_i \dot{u}_i \delta \dot{u}_i dz \right\} dx \\ \delta U &= b \int_0^l \left\{ \int_{-\frac{1}{2} h_b}^{\frac{1}{2} h_b} \epsilon^b_{xx} \delta \epsilon^b_{xx} dz + \int_{\frac{1}{2} h_b}^{\frac{1}{2} h_b + h_i(x)} (\epsilon^i_{xx} \delta \epsilon^i_{xx} + \epsilon^i_{xz} \delta \epsilon^i_{xz}) dz \right\} dx \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 ρ 는 밀도를 나타낸다.

2.3 이산화된 방정식

위의 식들을 종합하면 다음과 같은 이산화된 연립 미분방정식을 얻게 된다.

$$M \ddot{x} + K_b x + \int_0^l G'(t-\tau) K'_l \dot{x}(\tau) d\tau = f(t) \quad (7)$$

여기서 M , K_b , K'_l , x , f 는 각각 질량행렬, 탄성보의 강성행렬, 점탄성 층의 강성계수행렬, 변위벡터, 외력벡터를 나타내고, 라플라스변환을 하면 다음과 같이 표현된다.

$$(s^2 M + K_b + G(s) K_l') \tilde{x}(s) = \tilde{F}(s) \quad (8)$$

잠김현상을 방지하기 위하여, 횡방향변위는 Hermite 요소를 이용하여 보간하였고, 종방향변위와 전단각은 각각 내부노드를 가지는 3절점 라그랑지 요소를 사용하여 보간하였다 [6].

3. 점탄성 모델

식(8)로부터 고유치 문제는 $G(s)$ 의 존재로 인하여 비선형이 됨을 알 수 있다. $G(s)$ 의 적절한 보간을 위하여 많은 모델들이 제시되어 왔는데, 본 논문에서는 선형고유치문제로의 변환을 가능케하는 GHM모형을 이용하여 $G(s)$ 을 표현하였다.

3.1 GHM 모델

G^∞ 를 식(3)의 이완함수 $G(t)$ 의 $t=\infty$ 일 때 값이라 하면 $G(s)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$G(s) = G^\infty \left[1 + \sum_k \alpha_k \frac{s^2 + 2\hat{\zeta}_k \hat{\omega}_k s}{s^2 + 2\hat{\zeta}_k \hat{\omega}_k s + \hat{\omega}_k^2} \right] \quad (9)$$

여기서 $\alpha_k, \hat{\zeta}_k, \hat{\omega}_k$ 는 각각 상수들로서 실험결과와 피팅을 통해서 구해진다. 식 (9)를 식 (8)에 대입하고 다음과 같은 소산좌표를 도입하면,

$$\tilde{a}_k(s) = \frac{\hat{\omega}_k^2}{s^2 + 2\hat{\zeta}_k \hat{\omega}_k s + \hat{\omega}_k^2} \tilde{x}(s) \quad (10)$$

식 (9)는 다음과 같이 계수행렬이 상수인 2차 미분연립방정식의 형태로 나타낼 수 있게 된다.

$$M_a \ddot{x}_a + D_a \dot{x}_a + K_a x_a = f_a \quad (11)$$

여기서 $k=1$ 인 경우 각 행렬과 벡터의 표현은 다음과 같다.

$$M_a = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{G^{*\infty} \alpha_1}{\hat{\omega}_1^2} K_l' \end{bmatrix}, \quad D_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\hat{\zeta}_1 G^{*\infty} \alpha_1}{\hat{\omega}_1^2} K_l' \end{bmatrix},$$

$$K_a = \begin{bmatrix} K_b + G^{*\infty}(1 + \alpha_1) K_l' & -G^{*\infty} \alpha_1 K_l' \\ -G^{*\infty} \alpha_1 K_l' & G^{*\infty} \alpha_1 K_l' \end{bmatrix},$$

$$x_a = \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}, \quad f_a = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

위의 식으로부터 물성치의 표현을 위해 필요한 k 의 값에 따라서 원래 행렬크기의 $(k+1)$ 배가 됨을 알 수 있다.

3.2 고유치 문제

(1) 상태공간 방법

식 (11)에 나오는 D_a 은 비례감쇠행렬이 아니므로 상태공간으로의 변환을 통해서 고유치를 구하게 된다. 상태공간에서의 고유치문제는 다음과 같이 표현된다.

$$Az = \lambda Bz \quad (13)$$

여기서 λ 는 고유치이고,

$$A = \begin{bmatrix} -K_a & 0 \\ 0 & M_a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} D_a & M_a \\ M_a & 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} q \\ a \end{bmatrix} \quad (14)$$

이다. n 을 식 (7)의 자유도라하면 이를 통하여 구한 고유치는 $2n(1+k)$ 개가 되며 일반적으로 $2n$ 개의 부족감쇠모드와 $2nk$ 개의 과도감쇠모드를 얻게 된다.

(2) 근사적 방법

k 값이 증가할수록 식 (13)의 계산량이 크게 증가하므로, 감쇠가 크지 않은 경우 성립하는 다음과 같은 근사식을 도입한다. 먼저 식(9)의 $G(s)$ 에서 상수부분만 고려했을 때 구해지는 i 번째 탄성모드의 고유치와 고유벡터를 각각 $\bar{\omega}_i$ 와 \bar{x}_i 라 하면 식 (13)의 i 번째 부족감쇠모드 고유치는 다음과 같이 표현된다 [7].

$$\lambda_i = -\frac{1}{2\bar{\omega}_i} jG_{ii}(j\bar{\omega}_i) \pm j\bar{\omega}_i \quad (15)$$

여기서

$$G_{rs}(j\bar{\omega}_i) = G(j\bar{\omega}_i) \bar{x}_r^T K_l' \bar{x}_s \quad (16)$$

이다. 또한 고유벡터는 다음과 같이 표현된다.

$$x_i = \bar{x}_i + \sum_{r \neq i} \frac{G_{rs}(j\bar{\omega}_i) \bar{x}_r}{(\bar{\omega}_i^2 - \bar{\omega}_r^2)} \quad (17)$$

4. 최적화 과정

4.1 설계변수

점탄성 층의 두께 분포는 보의 종방향으로 분포된 절점들을 보간함으로써 얻어진다. 절점들은 보의 뿌리부분에서 끝단부 분까지 일정한 간격으로 분포하며 절점들 사이는 선형함수로 보간한다. 절점에서의 두께가 설계변수가 되고, 급격한 두께 변화를 고려하여 음의 값을 가질 수 있다. 단, 수치적 불안정을 피하기 위해 각 요소에서 점탄성 층의 최소값을 구속조건으로 부가한다 [8]. 이러한 상황이 그림 2에 나타나 있다.

4.2 목적함수와 구속조건

동적 거동에 큰 영향을 미치는 몇몇 모드를 고려하면서 다음과 같은 두 가지 조건하에서 최적화를 수행하였다.

(1) 최소질량문제

고유치들이 원하는 특성을 가지도록 구속조건으로 부가하여 점탄성 재료의 질량을 최소화한다. 이를 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\min \int_{\frac{h_b}{2}}^{\frac{h_b}{2} + h(x)} \rho dx \quad \text{subject to } g(\lambda_i) - g(\hat{\lambda}_i) \leq 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (18)$$

여기서 g 는 고유치를 인수로 갖는 구속함수이고, $\hat{\lambda}_i$ 는 지정된 고유치 그리고 m 은 고려하고자 하는 모드의 개수이다.

(2) 최대감쇠문제

주어진 질량을 구속조건으로 하며 목적함수로는 최적제어이론에서 사용하는 성능지수를 사용한다. 수식으로 표현하면

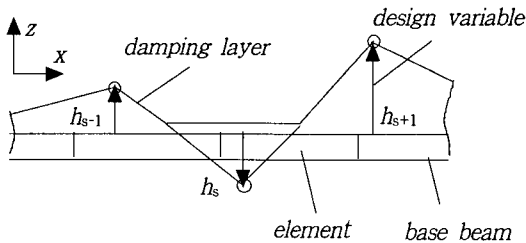


Fig. 2 Design variables describing the thickness distribution of the damping layer

다음과 같이 된다.

$$\min \int_0^\infty \sum_{i=1}^m (a_i^2 \eta_i^2(t) + b_i^2 \dot{\eta}_i^2(t)) dt \quad \text{subject to } bl \int_{\frac{h_b}{2}}^{\frac{h_b}{2} + h(x)} \rho dx - \bar{m} \leq 0 \quad (19)$$

여기서 $\eta_i(t)$ 는 i 번째 모드의 응답을 나타내는 함수이고 a_i 와 b_i 는 가중치이며, \bar{m} 은 주어진 점탄성 재료의 질량이다. 이 식을 만족시키는 해는 초기조건에 관계없어야 하므로 다음과 같이 고유진동수 ω_i 와 감쇠비 ζ_i 로 표현할 수 있다.

$$\min \sum_{i=1}^m \{c_i(\zeta_i \omega_i + \frac{\omega_i}{\zeta_i}) + d_i(\frac{\zeta_i}{\omega_i} + \frac{1}{\omega_i \zeta_i})\} \quad \text{subject to } bl \int_{\frac{h_b}{2}}^{\frac{h_b}{2} + h(x)} \rho dx - \bar{m} \leq 0 \quad (20)$$

여기서 c_i 와 d_i 는 가중치이다.

4.3 고유치 민감도

설계변수를 p , 식(13)의 i 번째 고유벡터를 z_i 라 할 때 고유치의 민감도는 다음과 같이 구해진다 [9].

$$\frac{d\lambda_i}{dp} = \frac{z_i^T (\frac{dA}{dp} - \lambda_i \frac{dB}{dp}) z_i}{z_i^T B z_i} \quad (21)$$

만약 식(15)와 식(17)등을 이용하여 고유치와 고유벡터를 알고 있다면 상태공간을 이용하지 않고서도 다음과 같이 민감도를 구할 수 있다.

$$\frac{d\lambda_i}{dp} = - \frac{\lambda_i^2 x_i^T \frac{\partial K_b}{\partial p} x_i + G(\lambda_i) x_i^T \frac{\partial K_i'}{\partial p} x_i}{2\lambda_i x_i^T M x_i + \frac{\partial G(\lambda_i)}{\partial \lambda_i} x_i^T K_i' x_i} \quad (22)$$

5. 결과 및 토의

수치해석에 사용된 보의 물성치와 기하학적 조건이 표 1에 나타나 있다. 최적화 알고리즘으로는 순차이차계획법(SQP)과 준뉴턴구배탐색기법을 이용하는 상용 소프트웨어 matlab의 명령어 constr을 사용하였다. 주파수에 따라 변화하는 점탄성 물성치는 Park 등[10]의 논문 에 제시된 $k=2$ 인 GHM 모델을 사용하였다. 먼저 근사적 방법에 의한 해의 타당성

을 조사하기 위하여 3.2절에 소개된 두 가지 방법을 비교해 보았다. 전체모델을 기반으로한 식(13)과 감쇠가 작은 경우 사용할 수 있는 근사적인 방법에 의한 식(15)를 각각 이용하여, 양 면에 완전히 감쇠처리를 한 경우 감쇠재료층의 두께에 따른 최저차 모드의 고유진동수와 감쇠비를 구하였다. 이를 통하여 감쇠의 정도에 따라서 근사적 방법을 사용할 때 고려해야 하는 오차의 정도를 예측할 수 있다. 이 때 보 요소의 수는 10 개로 하였다. 나타내진 결과들은 만족할 만한 범위에 있으므로, 이를 고려하면서 이후의 모든 계산은 근사적인 방법을 이용하여 계산하였다.

5.1 최소질량문제

동적특성을 향상시키기 위해서 감쇠재료를 부가하면 질량 및 강성이 동시에 변화하기 때문에, 고유치의 실수부의 민감도와 허수부의 민감도는 독립적이 아니라 서로 연관되어 있다. 따라서 고유치의 실수부와 허수부를 독립적으로 다루는 것은 불가능하다. 다음 수치예제에서는 실수부와 허수부에 각각 상한과 하한의 경계치를 설정하는 방식으로 구속조건을 부가하고 최적화를 수행하였다. 고유치의 경계값으로는 한 면에 탄성보의 두께로 완전히 감쇠처리된 보의 고유치를 기준으로하여, 실수부를 상한으로, 허수부를 하한으로 사용하였다. 세 개의 최저차 고유치에 대하여 최적화를 수행하여, 부분적으로 감쇠처리된 최소질량을 갖는 감쇠층의 분포형상을 그림 3에 나타내었다. 그림 4에서는 각각의 분포형상에 따른, 오른쪽 끝단에서의 주파수 응답함수를 보여주고 있다. 전부 처리된 보에 비해 적은 감쇠재료를 사용하여 원하는 모드의 특성을 좋게 할 수 있음을 알 수 있다.

5.2 최대감쇠문제

식(20)에서 가중치를 모두 1로 설정하고 최적화를 수행하였다. 질량조건으로는 한 면을 전부 처리할 경우에 필요한 감

Table 1 Geometric and material data

base beam (Al)					
length	1m	width	0.01m	thickness	0.005m
density	2700kg/m ³	Young's Modulus			70GPa
damping layer (DYAD-606 Soundcoat, 25 °C)					
density	2700kg/m ³	Poisson's ratio			0.49
G [∞]	1.18E6Pa	$\hat{\alpha}_1$	87.5	$\hat{\xi}_1$	1344.6
		$\hat{\alpha}_2$	263.1	$\hat{\xi}_2$	129.6
		$\hat{\omega}_1$	1494.5	$\hat{\omega}_2$	39999.9

Table 2 Comparison between eq.(13) and eq.(15)

layer thickness (one side)		0.25h _b	0.5h _b	0.75h _b	h _b
natural frequency (rad/s)	eq.(13)	23.7	22.1	21.0	20.3
	eq.(15)	23.7	22.1	21.1	20.5
damping ratio	eq.(13)	0.0024	0.0066	0.0127	0.0209
	eq.(15)	0.0024	0.0065	0.0125	0.0202

쇠재료의 질량을 사용하였다. 그림 6에서는 두께의 분포를 나타내고 있는데, 한 면을 처리할 경우와 양면을 처리할 경우가 같은 양상을 나타내고 있음을 알 수 있다. 그림 7은 각각의 경우에서 주파수응답을 보여주고 있다. 한 면이 완

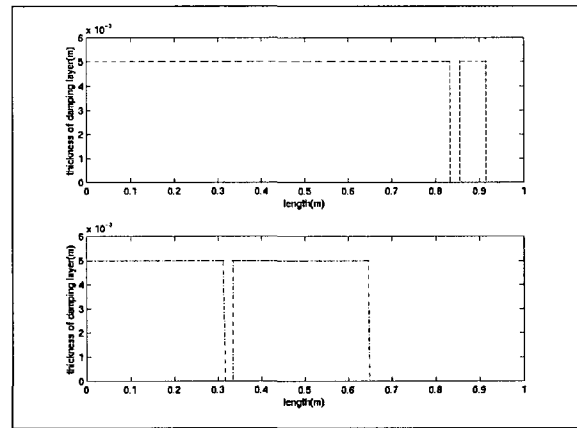


Fig. 3 Optimal thickness distribution for three lowest modes: Case I ; — single-sided full coverage - - single-sided partial coverage ··· double-sided partial coverage

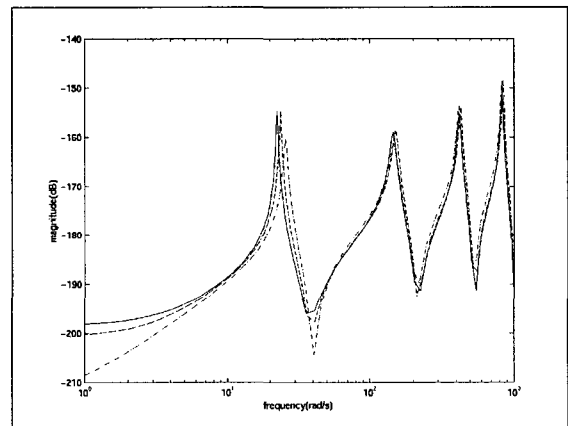


Fig. 4 Frequency responses for the cases in fig. 3

전히 처리된 보에 비해 각각 47%, 85%의 질량이 사용되었다. 가중치를 조정함으로써 원하는 응답함수를 얻을 수 있게 된다.

6. 결론

고유치 민감도를 이용하여 표면에 처리되는 점탄성 감쇠재료의 최적형상설계를 수행하였다. 부착되는 감쇠재료의 형상에 따라서 감쇠특성 뿐만아니라 질량및 강성특성도 변하기 때문에, 각 모드의 고유치 민감도가 독립적이지 않고, 또한 한 모드의 실수부와 허수부의 민감도도 독립적이지 않다. 때문에 독립적으로 각 모드의 고유치 및 실수부와 허수부를 지정할 수는 없지만, 경계를 부가함으로써 어느정도 원하는 특성의 고유치를 가지도록 형상을 설계할 수 있었다. 또한 주어진 질량으로 최대의 감쇠효과를 가지도록 하기위해서 제어이론에서 사용되는 성능지수를 도입하였고, 성공적으로 최적화를 수행하였다. 지금까지 점탄성재료를 이용한 구조감쇠의 설계는 주로 특정 주파수영역에서 강제진동의 경우에 국한되었지만, 고유치를 직접 이용한 설계를 통해서 특히 과도진동을 억제하기 위한 설계에 효과적 이용될 수 있다.

후 기

본 연구는 BK 21 사업에 의해 지원되었습니다.

참 고 문 헌

- (1) Nashif, A. D., Jones, I. G., and Henderson, J. P., 1985, *Vibration Damping*, John Wiley & Sons, Inc.
- (2) Friswell, M. I., and Inman, D. J., 1999, "Reduced-Order Models of Structures with Viscoelastic Components", *AIAA Journal*, pp. 1318-1325
- (3) Johnson, C. D., Keinholz, D. A., and Rogers, L. C., 1981, "Finite Element Prediction of Damping in beams with constrained viscoelastic layers", *Shock and Vibration Bulletin*, Vol. 51, No. 1, pp. 71-81.
- (4) McTavish, D. J., and Hughes, P. C., 1993, "Modeling of Linear Viscoelastic Space Structures", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 115, pp. 103-110.
- (5) Lesieutre, G. A., and Bianchini, E., 1996, "Time Domain Modeling of Linear Viscoelasticity Using Anelastic Displacement Fields", *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 117, pp. 424-430.
- (6) Lesieutre, G. A., and Lee, U., 1996, "A Finite Element for Beams Having Segmented Active Constrained Layers with Frequency-Dependent

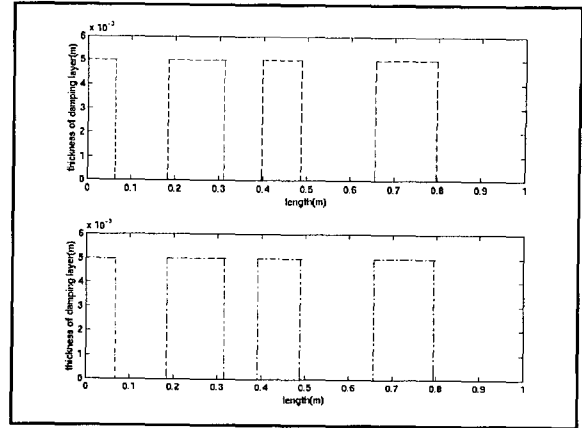


Fig. 5 Optimal thickness distribution for three lowest modes: Case II

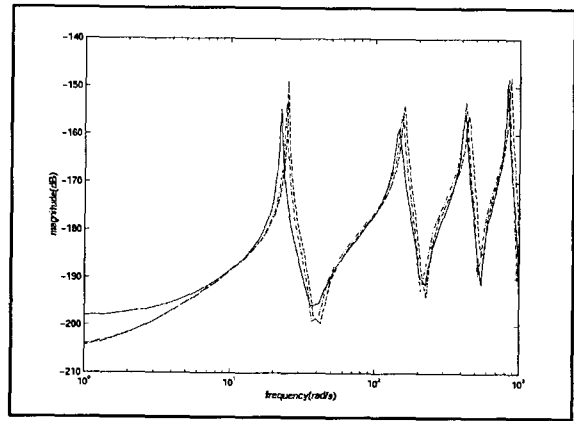


Fig. 6 Frequency responses for the cases in fig. 5

Viscoelastics", *Smart Material and Structure*, 5, pp. 615-627.

- (7) Woodhouse, J., 1998, "Linear Damping Models for Structural Vibration", *Journal of Sound and Vibration*, 215(3), pp. 547-569.
- (8) Wodtke, H. -W., and Lamancusa, J. S., 1998, "Sound Power Minimization of Circular Plates through Damping Layer Placement", *Journal of Sound and Vibration*, 215(5), pp. 1145-1163.
- (9) Haftka, R. T., and Gürdal, Z., 1992, *Elements of Structural Optimization*, 3rd ed., Kluwer Academic Publishers.
- (10) Park, C. H., Inman, D. J., and Lam, M. J., 1999, "Model Reduction of Viscoelastic Finite Element Models", *Journal of Sound and Vibration*, 219(4), pp. 619-637.