

제약조건을 갖는 비선형 불확실 시스템을 위한 확장 강인 H[∞] 필터

서재원, 유명종, 박찬국, 이장규
 서울대학교, 국방과학연구소, 서울대학교, 서울대학교

An Extended Robust H[∞] Filter for Nonlinear Constrained Uncertain System

Jaewon Seo, Myeong-Jong Yu, Chan Gook Park, Jang Gyu Lee
 Seoul National Univ., Agency for Defence Development, Seoul National Univ., Seoul National Univ.

Abstract - 본 논문에서는 시스템의 모델 불확실성과 백색 가우시안이 아닌 L₂ 잡음이 존재하는 경우에 시스템 상태변수의 효과적인 추정을 위한 강인 필터를 제안한다. 제안된 필터는 적분이차제약조건(integral quadratic constraint)을 갖는 일반적인 비선형 불확실 시스템을 위해 선형근사화를 통하여 구성된다. 또한 제안된 필터의 중요한 특성인 변형된 H[∞] 성능 지수를 유도하고, 해석적 방법을 통해 제안된 필터의 잡음과 시스템 파라미터 불확실성에 대한 강인성을 분석하며, 시뮬레이션 결과를 통하여 제안된 필터가 추정치의 정확도를 효과적으로 향상시키는 것을 보인다.

1. 서 론

본 논문에서는 적분이차제약조건(integral quadratic constraint)을 갖는 비선형 불확실 시스템을 위한 강인 필터를 제안한다. 이 필터의 유도는 [1]의 유도과정과 비슷하지만, 본 논문에서 새로 제안하고자 하는 것은 확장 강인 H[∞] 필터의 설계와 변형된 H[∞] 성능 지수의 유도 과정이다. 확장 강인 H[∞] 필터는 공칭점에서의 선형근사화를 통하여 구성되며, 이 방법은 확장 칼만 필터를 강인 필터로 확장시키게 된다. 해밀턴-자코비-벨만 편미분 방정식의 해를 이용하여 상태변수의 추정치 집합을 도입하고 비선형 필터 문제의 지역해를 구하는 과정에서 강인 필터를 유도하게 된다. 그리고, 변형된 H[∞] 성능 지수를 유도하여 필터의 성능을 분석하고 시뮬레이션을 통하여 제안된 필터의 성능을 확인한다.

2. 비선형 강인 H[∞] 필터

2.1 문제 설정

다음과 같은 비선형 불확실 시스템을 생각한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + B_1(t)\Delta_1(t)N(x(t)) + B_2(t)w_0(t) \\ y(t) &= h(x(t)) + \Delta_2(t)N(x(t)) + v_0(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 w₀(t)와 v₀(t)는 L₂ 잡음이고, 각 식의 우변 두 번째 항은 불확실 항을 나타낸다. 식 (1)은 적절한 대입을 통해 식 (2)로 변형된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + B(t)u(t) \\ y(t) &= h(x(t)) + v(t) \\ n(t) &= \varepsilon^{-1}N(x(t)) \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,

$$B(t) = [\varepsilon B_1(t) \quad B_2(t)],$$

$$v(t) = [I \quad \varepsilon \Delta_2(t)n(x(t))]^T, \quad u(t) = \begin{bmatrix} \Delta_1(t)n(x(t)) \\ w_0(t) \end{bmatrix}$$

이다. 식 (2)의 시스템에 대하여 H[∞] 필터를 설계하기 위하여 필터의 출력을 다음과 같이 정의한다.

$$z(\hat{x}(t)) = [(L(t)\hat{x}(t))^T - \frac{\gamma}{\varepsilon}N(\hat{x}(t))^T]^T \quad (3)$$

또한, 식 (2)의 비선형 불확실 시스템에 대하여 다음의 적분이차제약조건이 만족된다고 가정한다.

$$\begin{aligned} &(x(0) - x_0)^T M(x(0) - x_0) + \\ &\frac{1}{2} \int_0^T [w(t)^T Q^{-1}w(t) + v(t)^T R^{-1}v(t)] dt \\ &\leq d + \frac{1}{2} \int_0^T [n^T n + \gamma^{-2}(z(\hat{x}) - z)^T (z(\hat{x}) - z)] dt \end{aligned} \quad (4)$$

위와 같은 시스템에 대해서 확장 강인 H[∞] 필터를 유도하기 위해서 다음의 가정들이 필요하다.

가정 1 : 식 (2), (3), (4)의 모든 함수들은 C¹에 속하고 그 첫 번째 미분값이 유한하다. C¹에 속하는 함수는 첫 번째 도함수가 존재하고 그것이 연속인 함수이다.

가정 2 : 행렬 N(t)는 유한하다.

가정 3 : 함수 ϕ, L₁, L₂는 유한하고 음수가 아닌 함수이고 다음 부등식을 만족한다.

$$|\phi(x_2) - \phi(x_1)| \leq \theta(1 + |x_2| + |x_1|)|x_2 - x_1|$$

여기서 θ > 0 이다.

가정 4 : 함수 L₁는 다음을 만족한다.

$$L_1(w, v) \geq c|w|^2, c > 0$$

가정 5 : 행렬 B는 풀 랭크를 갖는다.

가정 6 : 행렬 L은 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$$l_1 I \leq L(t)^T L(t) \leq l_2 I, \forall t$$

여기서, l₁, l₂는 양의 실수이다.

2.2 확장 강인 H[∞] 필터

(2), (3), (4)의 시스템에 대해 강인 필터를 유도한다. 우선, 다음의 정리를 생각한다.

정리 1[1] : (2)의 비선형 불확실 시스템이 다음의 제약 조건을 만족하고, 가정 1-6을 모두 만족한다고 하자.

$$\phi(x(0)) + \int_0^T L_1(w, v) dt \leq d + \int_0^T L_2(n) dt$$

여기서, L₁, L₂는 이차함수를 나타낸다. 이 때의 가능한 해의 집합은

$$X_s = \{x \in R^n : V(x, s) \leq d\}$$

이고, V(x, s)는 편미분 방정식 (5)의 유일한 비스코시티 해(viscosity solution)이고, C(Rⁿ × [0, s])에 속한다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V + \max_u [\nabla_x V(f(x) + Bu) \\ - L_1(w, v) + L_2(n(x))] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

위의 정리에 의하면, 식 (4)의 제약조건을 만족시키는 비선형 불확실 시스템 (2)는 식 (6)의 편미분 방정식의 해를 이용하여 상태변수를 추정할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} V + \nabla_x V f(x) + \frac{1}{2} \nabla_x V B Q B^T \nabla_x V^T \\ & - \frac{1}{2} (y - h(x))^T R^{-1} (y - h(x)) + \frac{1}{2} n(x)^T n(x) \quad (6) \\ & + \frac{1}{2} \gamma^{-2} (z_1 - z(x))^T (z_1 - z(x)) = 0 \end{aligned}$$

이 때, 정리 1에 의한 해의 집합 x_s 중에 다음을 만족시키는 값을 본 필터의 추정치로 정의한다.

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) & \equiv \arg \min_x V(x, t) \\ \nabla_x V(\hat{x}(t), t) & = 0 \quad (7) \\ \nabla_x^2 V(\hat{x}(t), t) \hat{x}(t) + \frac{\partial}{\partial t} \nabla_x V(\hat{x}(t), t) & = 0 \end{aligned}$$

식 (8)과 같은 \tilde{V} 를 정의하고 $\tilde{x}, P(t), \phi(t)$ 를 식 (9), (10), (11)와 같이 정의하면 \tilde{V} 는 정리 1의 해의 집합 x_s 를 찾기 위한 V 의 근사해로 사용할 수 있고[1], 그것을 식으로 나타내면 (12)와 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x, t) & = \frac{1}{2} (x - \tilde{x}(t))^T P(t)^{-1} (x - \tilde{x}(t)) + \phi(t) \quad (8) \\ \dot{\tilde{x}}(t) & = f(\tilde{x}(t)) + P(t) [\nabla_x h(\tilde{x}(t))^T \\ & R^{-1} (y - h(\tilde{x}(t))) + \nabla_x n(\tilde{x}(t))^T n(\tilde{x}(t))] \quad (9) \\ \dot{P}(t) & = P(t) \nabla_x f(\tilde{x})^T + \nabla_x f(\tilde{x}) P(t) + B Q B^T \\ & - P(t) [\nabla_x h(\tilde{x})^T R^{-1} \nabla_x h(\tilde{x}) - \nabla_x n(\tilde{x})^T \\ & \nabla_x n(\tilde{x}) - \gamma^{-2} \nabla_x z(\tilde{x})^T \nabla_x z(\tilde{x})] P(t) \quad (10) \\ \phi(t) & = \frac{1}{2} \int_0^t [y^0 - h(\tilde{x})]^T R^{-1} (y^0 - h(\tilde{x})) \\ & - n(\tilde{x}, u^0)^T n(\tilde{x}, u^0)] dt \quad (11) \\ \tilde{x}_s & = \left\{ x \in R^n : \frac{1}{2} (x - \tilde{x}(s))^T P(t)^{-1} (x - \tilde{x}(s)) \right. \\ & \left. \leq d - \phi(s) \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

결과적으로, 확장 강인 H_∞ 필터의 식은 추정치를 계산하는 식 (9)와 그에 필요한 리카티 방정식 (10)으로 주어진다. 즉, 식 (9)와 (10)을 이용하여 필터의 상태변수를 추정할 수 있고, 식(3)을 이용하여 추정하고자 하는 값을 계산한다.

식 (9)와 식 (10)은 다음과 같은 방법을 이용하여 얻을 수 있다. 먼저, 식 (6)을 x 에 대해 그라디언트(gradient)를 취하면 다음과 같고,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \nabla_x V^T + \nabla_x f(x)^T \nabla_x V^T + \nabla_x^2 V B Q B^T \nabla_x V^T \\ & + \nabla_x^2 V f(x) + \nabla_x h(x)^T R^{-1} (y - h(x)) + \quad (13) \\ & \nabla_x n(x)^T n(x) - \gamma^{-2} \nabla_x z(x)^T (z_1 - z(x)) = 0 \end{aligned}$$

이 식에 (7)의 정의와 조건을 적용하고, $\nabla_x^2 V(\hat{x}, t)$ 가 정칙행렬(nonsingular matrix)이면 식 (14)가 유도된다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) & = f(\hat{x}(t)) + (\nabla_x^2 V(\hat{x}(t), t))^{-1} [\nabla_x h(\hat{x}(t))^T \\ & R^{-1} (y - h(\hat{x}(t))) + \nabla_x n(\hat{x}(t))^T n(\hat{x}(t))] \quad (14) \end{aligned}$$

식 (13)을 x 에 대해 한번 더 그라디언트를 취하고, (7)의 정의와 조건을 적용하며, 이 때 그라디언트의 고차항을 무시하고 $P(t) = \nabla_x^2 V^{-1}$ 라 하면 다음 식이 유도된다.

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) & = P(t) \nabla_x f(\hat{x})^T + \nabla_x f(\hat{x}) P(t) + B Q B^T \\ & - P(t) [\nabla_x h(\hat{x})^T R^{-1} \nabla_x h(\hat{x}) - \nabla_x n(\hat{x})^T \\ & \nabla_x n(\hat{x}) - \gamma^{-2} \nabla_x z(\hat{x})^T \nabla_x z(\hat{x})] P(t) \quad (15) \end{aligned}$$

이 식 (14)와 식 (15)를 이용하여 식 (9)와 식 (10)을 정의하고 [1]에 언급된 내용대로 유도하면 식 (8)을 이용하여 (12)와 같은 해의 집합을 얻을 수 있다.

2.3 확장 강인 H_∞ 필터의 성능 분석

이전 절에서 유도한 확장 강인 H_∞ 필터의 성능 지수(performance index)를 유도하고 분석한다. H_∞ 필터의

성능 지수는 시스템 잡음으로부터 추정 오차로의 에너지 이득을 나타낸다. 그러므로 본 논문의 확장 강인 H_∞ 필터의 성능 지수는 시스템 잡음뿐만 아니라 모델 불확실성으로부터 추정 오차로의 에너지 이득으로 정의한다. 우선 추정 오차를 정의하고,

$$\zeta(t) \equiv x(t) - \hat{x}(t)$$

식 (2)과 (9)를 이용하여 그 미분방정식을 구한다.

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}(t) & = (A(t) - K(t)C(t))\zeta(t) + B(t)w(t) \\ & - P(t)\nabla_x n(\hat{x}(t))^T n(\hat{x}(t)) + \phi(x(t), \hat{x}(t)) \\ & - K(t)\chi(x(t), \hat{x}(t)) - K(t)v(t) \end{aligned}$$

여기서,

$$\begin{aligned} f(x(t)) - f(\hat{x}(t)) & = A(t)(x(t) - \hat{x}(t)) + \phi(x(t), \hat{x}(t)) \\ h(x(t)) - h(\hat{x}(t)) & = C(t)(x(t) - \hat{x}(t)) + \chi(x(t), \hat{x}(t)) \end{aligned}$$

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}(t)), \quad C(t) = \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}(t)),$$

$$K(t) = P(t)C(t)^T R^{-1}$$

이다.

또한, 다음과 같은 가정과 보조정리가 성립한다고 하자.

가정 7 : $n(t) = \varepsilon^{-1}N(x(t)) = \varepsilon^{-1}N(x(t))$

가정 8 : 다음과 같은 부등식을 만족하는 양의 실수 $\varepsilon_\phi, \varepsilon_x, k_\phi, k_x$ 가 존재한다.

$$\|\phi(x(t), \hat{x}(t))\| \leq k_\phi \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2, \|\zeta\| \leq \varepsilon_\phi$$

$$\|\chi(x(t), \hat{x}(t))\| \leq k_x \|x(t) - \hat{x}(t)\|^2, \|\zeta\| \leq \varepsilon_x$$

보조정리 1[2] : 가정 1과 가정 8이 만족한다고 하자.

$\|\zeta\| \leq \varepsilon_1$ 인 추정 오차에 대해, 실수 k 가 존재하여 다음 부등식을 만족한다.

$$\begin{aligned} (x(t) - \hat{x}(t))^T P(t)^{-1} [\phi(x(t), \hat{x}(t)) - K\chi(x(t), \hat{x}(t))] \\ \leq k \|x(t) - \hat{x}(t)\|^3 \end{aligned}$$

여기서,

$$\varepsilon_1 = \min(\varepsilon_\phi, \varepsilon_x), \quad k = \frac{k + \phi}{\rho_1} + \frac{c_2 k_x}{r}, \quad \|C(t)\| \leq c_2, \quad r \leq R$$

이고, ρ_1 은 $P(t)$ 의 하한이다.

다음과 같은 함수를 정의하여

$$\tilde{V}(\zeta(t)) = \zeta(t)^T p(t)^{-1} \zeta(t)$$

미분을 취하고, 가정 7과 가정 8, 보조 정리 1, 삼각 부등식을 이용하면 다음과 같은 부등식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}(\zeta(t)) & \leq -\frac{\gamma^{-2} l_1}{2l_2} \zeta(t)^T [L(t)^T L(t)] \zeta(t) \\ & + w^T Q^{-1} w + v^T R^{-1} v \\ & + \varepsilon^{-2} N(\hat{x}(t))^T N(\hat{x}(t)) \end{aligned}$$

이 부등식의 양변에 적분을 취하면 다음과 같은 변형된 H_∞ 성능 지수를 유도할 수 있다.

$$J =$$

$$\frac{\|L\zeta\|_2^2}{\|w\|_{Q^{-1}}^2 + \|v\|_{R^{-1}}^2 + \|N(x)\|_{\varepsilon^{-2}}^2 + \zeta(0)^T P(0)^{-1} \zeta(0)} < \gamma^2 \frac{2l_2}{l_1} \equiv \gamma^2$$

이 성능 지수는 필터의 추정 능력을 나타내는 파라미터로 외란과 불확실성의 감쇠정도를 나타내며, 이 파라미터가 주어지면 그것에 맞추어 필터를 설계할 수 있다.

3. 실제 시스템에의 적용

3.1 FM 복조

이전 절에서 제안한 필터를 적용하기 위한 대상 시스템으로 FM 복조 시스템을 생각한다. 이 시스템은 다음

과 같이 표현된다.[3, p.200]

$$\begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w_0(t)$$

$$y(t) = \sqrt{2} \sin(t + \theta(t)) + v(t)$$

일반적으로 위와 같은 시스템의 상태변수 추정에는 확장 칼만 필터가 사용된다. 그러나 시스템 모델에 불확실성 항이 추가된 형태에서는 좋은 성능을 기대하기 어렵다. 시스템 모델에 다음과 같이 불확실성 항이 추가된 경우를 0초부터 100초까지 고려한다.

$$\begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 + \Delta(t) & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} w_0(t)$$

$$y(t) = \sqrt{2} \sin(t + \theta(t)) + v(t)$$

또한, 이 시스템은 다음의 적분이차제약조건을 만족한다고 하자.

$$\int_0^{100} [50w_0(t)^2 + 100v(t)^2] dt \leq 10 + \frac{1}{2} \int_0^{100} [\gamma^{-2} \delta \lambda(t)^2 + \varepsilon^{-2} \delta \lambda(t)^2 + \gamma^{-2} \delta \theta(t)^2] dt$$

필터를 이용하여 추정하고자 하는 값은 다음과 같이 정하여 필터의 출력을 구성한다.

$$z(t) = \begin{bmatrix} \lambda(t) \\ \theta(t) \\ \gamma \varepsilon^{-1} \lambda(t) \end{bmatrix}$$

시스템의 잡음은 백색 가우시안 잡음이 아니어도 되며 단지 위의 제약조건을 만족하는 L_2 잡음이면 되고, 또한 시스템의 불확실성 항은 $\Delta(t) = 1$ 으로 정하고, 확장 강인 H_∞ 필터의 성능 지수는 $\gamma^2 = 1.5$ 로 하여 필터를 설계한다. 그림 1은 이상의 시스템에 대해 확장 강인 H_∞ 필터의 시뮬레이션 결과를 나타낸 것이다. 필터의 추정치는 약간 잡음이 섞인 형태를 보이지만 전체적으로 참값에 수렴하는 것을 볼 수 있다. 그림 2의 확장 칼만 필터의 결과는 큰 추정 오차를 갖으며 따라서 발산한다고 볼 수 있다. 이 두 결과를 비교하면, 확장 칼만 필터에 비해 확장 강인 H_∞ 필터가 시스템의 불확실성 항에 대해 강인하며, 더욱 좋은 추정 성능을 나타냄을 알 수 있다.

4. 결 론

적분이차제약조건을 갖는 비선형 불확실 시스템에 대해 강인 필터를 제안하였다. 이 필터는 H_∞ 필터의 구조를 갖으며 비선형 시스템의 상태변수 추정문제에 대해 근사화된 지역해를 이용한다. 또한, 입력 잡음과 시스템 모델 불확실성으로부터 추정 오차로의 에너지 이득을 나타내는 변형된 H_∞ 필터의 성능 지수를 유도하였으며, 성능 지수가 주어진 경우에 대하여 그러한 성능을 갖는 강인 필터를 설계할 수 있고, 반대로 주어진 확장 강인 H_∞ 필터에 대한 성능 분석을 해석적으로 할 수 있다. 제안된 강인 필터를 FM 복조 문제를 나타내는 시스템에 적용하여, 모델 불확실성이 존재하고 시스템에 L_2 잡음이 주어진 경우에 대하여 시뮬레이션하였다. 그 결과 확장 칼만 필터보다 좋은 추정 성능을 보임을 확인할 수 있었다.

후 기

본 논문은 서울대학교 자동제어특화연구센터와 BK21 서울대학교 정보기술사업단의 연구 지원에 의한 연구 결과입니다.

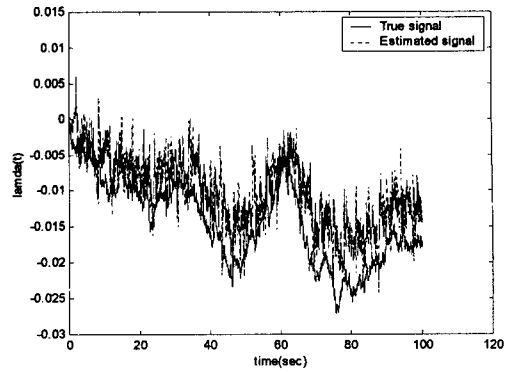


그림 1 확장 강인 H_∞ 필터의 결과

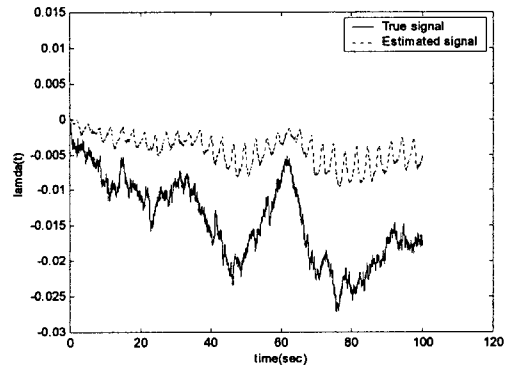


그림 2 확장 칼만 필터의 결과

[참 고 문 헌]

- [1] M.R. James, I.R. Petersen, "Nonlinear State Estimation for Uncertain Systems with an Integral Constraint", IEEE Transaction on Signal Processing, Vol. 46, No. 11, pp.2926-2937, 1998
- [2] M.-J. Yu, J.G. Lee, C.G. Park, "A Nonlinear Robust Observer Design for SDINS In-flight Alignment", Proc. of the AIAA 2001 GNC Conference, Aug., 2001, A01-37215
- [3] B.D.O. Anderson, J.B. Moore, "Optimal Filtering", Prentice Hall, 1979.
- [4] Myeong-Jong Yu, "Robust Filter Design and Its Application to Strapdown Inertial Navigation System", Ph.D. Dissertation, SNU, 2002.