

부분공간법에 의한 페루프 시스템의 동정

이동철 · 배종일 · 홍순일 · 김종경 · 조봉관
부경대학교 전기·제어계측공학부

Identification of Closed Loop System by Subspace Method

Dong Cheol Lee · Jong Il Bae · Soon Il Hong
Jong Kyung Kim · Bong Kwan Jo

Dept. of Electric. Control & Instrument Eng. Pukyong Natl. Univ.

Abstract-In the linear system identification using the discrete time constant coefficients, there is a subspace method based on 4SID recently much suggested instead of the parametric method like as the maximum likelihood method. The subspace method is not related with the impulse response and difference equation in its input-output equation, but with the system matrix of the direct state space model from the input-output data. The subspace method is a very useful tool to adopt in the multivariable system identification, but it has a shortage unable to adopt in the closed-loop system identification. In this paper, we are suggested the methods to get rid of the shortage of the subspace method in the closed-loop system identification. The subspace method is used in the estimate of the output prediction values from the estimating of the state space vector. And we have compared the results with the outputs of the recursive least square method in the numerical simulation.

1. 서론

선형 이산시간 시스템(그림 1-a) 식(1) 또는 그의 이노베이션(innovation) 표현(그림 1-b) 식(2)을 고려하자. 주어진 입출력 데이터 $\{u(t), y(t), t=1, 2, \dots, N\}$ 에서 그 시스템에 관한 사전정보 없이 행렬 A, B, C, D, K 를 추정하는 것이다[1].

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + w(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + e(t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) + K\varepsilon(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (2)$$

근년, 시스템 동정분야에서 최우법[2] 등의 파라미터릭한 방법 대신에 주목되는 4SID(Subspace state space system identification)법[3,4] 등으로 알려진 부분공간법이 있다.

부분공간법[5]은 먼저, 상태벡터 $x(t)$ 를 구한 후 최소2승법[2,6]에 의해 각 계수행렬을 추정하기 위하여 파라미터를 직접 구하는 지금까지의 방법과 비교하여 각 변수계의 응용에 일치시키며, 특히 최근 대부분의 논문에 의해 연구되어 왔다. 그러나 한편, 이들 방법은 페루프 시스템에 대한 동정을 행하는 것은 곤란하다는 결점을 가지고 있는 것이 지적되고 있다.

본 논문에서는 부분공간법이 페루프 시스템의 데이터를 동정하는 것이 곤란하다는 이유를 나타내고, 이 결점을 피하는 방법에 대해 논하였다.

끝으로 컴퓨터 시뮬레이션에 의해 페루프 시스템의 추정치의 수렴성에 대해 검토하고 고전적으로 잘 알려진 방법인 RLS법(Recursive least square method)과의 비교를 행했다. 또 잡음에 의한 영향을 조사하기 위해 잡음의 분산을 변화시켰다.

2. 부분공간법의 기본적 절차

2.1 선형회귀법에 의한 행렬 A, B, C, D, K 의 추정

부분공간법은 상태벡터 $x(t)$ 를 데이터로부터 구하고, 그 후 선형회귀법에 의해 식(1) 또는 식(2)의 모델의 계수행렬 A, B, C, D, K 를 구한다. 여기서 언급하는 선형회귀법은 식(3)과 같이 두면 식(1)은 식(4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$Y(t) = \begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad E(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$Y(t) = \Theta \Phi(t) + E(t) \quad (4)$$

주어진 $\{u(t)\}, \{y(t)\}, \{x(t)\}$ 에 대해 선형회귀법에 의해 행렬 Θ 를 구한다. Kalman 게인 K 는 행렬 A, C 와 $E(t)$ 의 공분산행렬로부터 구할 수 있다.

2.2 예측치 $\hat{y}(t+j|t)$ 와 상태벡터 $x(t)$

와의 관계

$\{e(t)\}$ 를 이노베이션으로하여 벡터 식(5)에서 $y(t)$ 의 임펄스응답을 $\{H_k, k=0, 1, \dots\}$ 로 하면 식(6)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\zeta(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ e(t) \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k \zeta(t-k) \quad (6)$$

여기서, H_k 는, m 는 입력의 차수, p 는 출력의 차수라 하면 $p \times (p+m)$ 행렬이다.

여기서 $y(t)$ 의 j 스텝 후의 예측치 $\hat{y}(t+j|t)$ 를 식(7)과 같이 정의하자.

$$\hat{y}(t+j|t) = \sum_{k=j}^{\infty} H_k \zeta(t+j-k) \quad (7)$$

결국, 시간 $t+1$ 이후의 입력과 오차는 0이라고 가정한다. 만약, $\{\zeta(t)\}$ 가 백색잡음이라면 식(7)은 $y(t)$ 의 j 스텝 후의 예측치와 정확하게 일치한다. 또 이 ($j=1, \dots, m$) 스텝 후의 예측치를 세로로 나열한 벡터를 식(8)과 같이 표현할 수 있다.

$$Y_m(t) = \begin{bmatrix} \hat{y}(t|t-1) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+m-1|t-1) \end{bmatrix} \quad (8)$$

3. j 스텝 후의 예측치 추정

식(6)은 식(9)와 같이 표현된다.

$$y(t+j) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k^e e(t+j-k) + \sum_{k=0}^{\infty} H_k^u u(t+j-k) \quad (9)$$

그러면 식(9)는 식(10)과 같이 된다.

$$y(t+j) \triangleq \varepsilon_j(t+j) + [\bar{\theta}^{(j)}]^T \bar{\varphi}^{(j)}(t+j) \quad (10)$$

또 구하려는 j 스텝 후의 예측치는 식(11)이 된다.

$$\hat{y}(t+j|t) = [\theta^{(j)}]^T \varphi^{(j)}(t) \quad (11)$$

따라서, $\hat{y}(t+j|t)$ 를 구하기 위해서는 선형회귀 계수를 추정하는 것과 같게된다. 즉

$$y(t+j) = \sum_{k=0}^{n_a} \bar{H}_{j,k}^y y(t-k) + \sum_{k=0}^{n_b-1} H_{j,k}^u u(t+j-k) + \sum_{k=0}^{n_b} H_{k+j}^u u(t-k) + \varepsilon_j(t+j) \quad (12)$$

그리고 식(12)의 우변 제2항을 잘라버리면 $\hat{y}(t+j|t)$ 를 구할 수 있다.

4. 시뮬레이션

3차의 ARMAX(Autoregressive Moving Average Model with Exogenous Variable) 모델에 대해 본 논문의 알고리즘과 RLS법과의 비교를 행하였다[2,7,8,9]. 데이터의 길이는 1000으로 하고, 계산을 중지하는 점은 $n_a=3$, $n_b=3$ 으로 했다.

$$y(t) = \frac{0.21q^{-1} + 0.07q^{-2}}{1 - 0.6q^{-1} + 0.8q^{-2}} u(t) + \frac{1}{1 - 0.98q^{-1}} e(t) \quad (13)$$

입력 $e(t)$ 는 식(14)와 같다.

$$u(t) = r(t) - y(t) \quad (14)$$

단, $e(t)$ 는 백색잡음이며, $r(t)$ 는 분산 1의 백색잡음이다.

개루프 시스템과의 비교를 행하기 위해 본 논문의 알고리즘과 RLS법을 이용한 알고리즘 양방에 대해 개루프 시스템과 폐루프 시스템 양방의 데이터로부터 동정을 행했다.

그림 2, 그림 3은 그 결과와 참값과의 오차가 50회의 평균을 취한 것을 나타냈다. 실선은 본 논문의 알고리즘의 동정이며, 점선은 RLS법에 의한 동정이다. 위 그림이 개루프 시스템의 입력력 데이터에서의 동정이며, 아래 그림이 폐루프 시스템의 입력력 데이터로부터의 동정이다.

이 경우에 개루프 시스템의 입력은 식(15)와 같다.

$$u(t) = r(t) \quad (15)$$

여기서, $r(t)$ 는 분산 1의 백색잡음이다. 이것을 보면 개루프 시스템의 경우는 잡음의 크기에 관계없이 어느 쪽의 방법도 대개 같은 동정결과로 되지만, 폐루프 시스템의 경우는 잡음의 증가에 따라 부분공간법의 쪽이 동정 정도(Precision)가 떨어짐을 알 수 있다.

5. 결론

폐루프 시스템의 부분공간법에 의한 동정에 대해 언급했지만, 이 방법은 잡음에 대해 취약함을 알 수 있었다. 이 원인은 예측치의 가정에서 미래의 입력을 0으로 하는데 따라 입력 데이터에 관한 정보를 잃거나, 또 과거의 데이터를 잘라버리는 값 n_a , n_b 가 부적절하다는 등의 이유라고 생각되지만, 물론 이들의 점에 대해 고찰할 필요가 있다. 또 이 알고리즘에서 벡터 $Y_m(t)$ 을 양(Positive)으로 구한 후 상태벡터 $x(t)$ 를 구하기 때문에 직접 $x(t)$ 를 구하는 4SID법 등의 알고리즘에 대해 수치적으로 질이 나쁘게 나타날 가능성도 있다.

이와 같은 결점을 수정한 새로운 폐루프 시스템의 동정법에 대해서 고찰할 필요가 있다. 그리고 고 부분공간법의 큰 특징으로서 다입출력 시스템

에 있어서도 대개 동일한 동정을 할 수 있기 때문에 그와 같은 시스템에 관해서도 물론 연구를 시도할 필요가 있다고 사료된다.

참 고 문 헌

- [1] L. Ljung and T. Mckelvey, "Subspace Identification from Closed Loop Data," Signal Processing, Vol. 52, pp. 209-215, 1996
- [2] 相良, 秋月, 中溝, 片山, システム同定, 計測自動制御學會, 1981
- [3] P. Van Overschee and B. De Moor, "N4SID: Subspace Algorithms for the Identification of Combined Deterministic-Stochastics Systems", Automatica, Vol. 30, No. 1, pp. 75-93, 1994
- [4] P. Van Overschee and B. De Moor, "Subspace Algorithms for the Stochastics Identification Problem", Automatica, Vol. 29, No. 3, pp. 649-660, 1993
- [5] L. Ljung and T. Mckelvey, "A Least Squares Interpretation of Sub-Space Methods for System Identification," IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, pp. 335-342, 1996
- [6] T. Nakamizo, Signal Analysis and System Identification, Corona Publishing Co. LTD., 1988
- [7] 片山, 應用カルマンフィルタ, 朝倉書店, 1994
- [8] 片山, システム同定入門, 朝倉書店, 1994
- [9] G. C. Goodwin & R. L. Payne, theory and Practice of Recursive Identification, The MIT Press, 1981

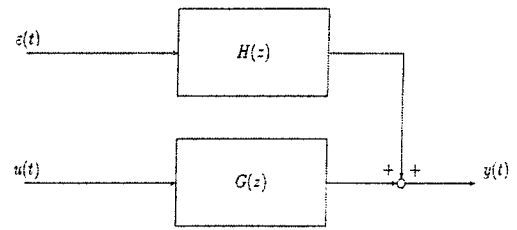
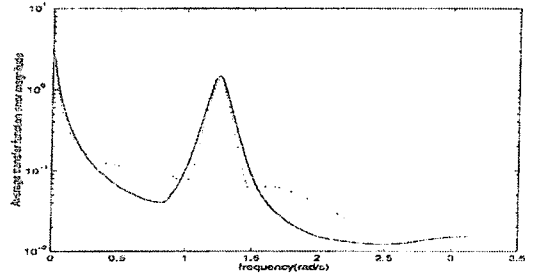
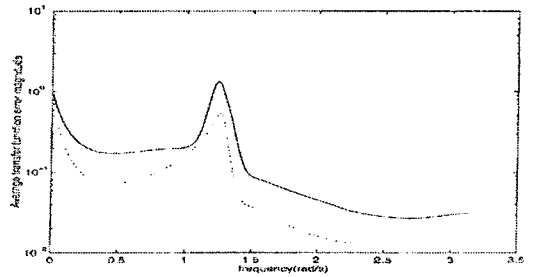


그림 1-b 이노베이션 표현



(a) 개루프 시스템



(b) 페루프 시스템

그림 2 동정에 의한 전달함수와 참값과의 계인선도 오차의 50회 평균

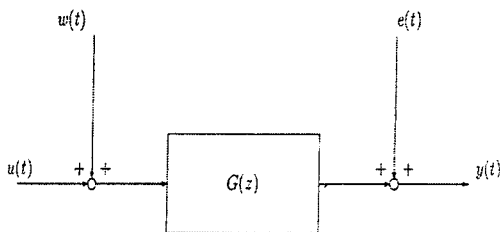


그림 1-a 선형 이산시간 시스템

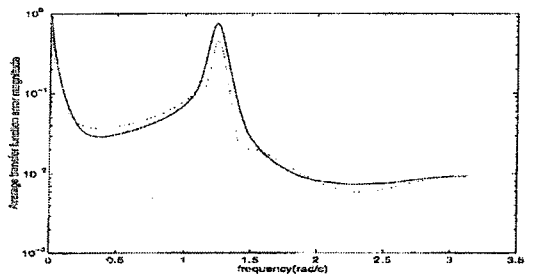
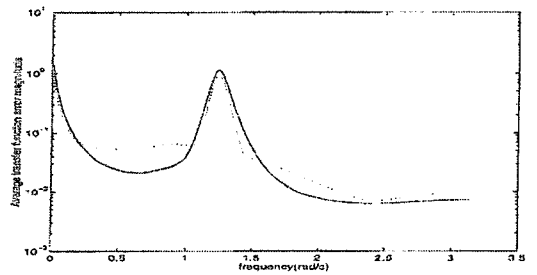


그림 3 잡음분산 : 0.25