

상태 관측기를 이용한 미지의 비선형 시스템의 직접 적응 퍼지 제어

김 형중*, 황 영호*, 김 응석**, 양 해원*.
 *한양대학교 전자전기제어계측공학부, **한라대학교 전기전자제어공학부

Direct Adaptive Fuzzy Control with State Observer for Unknown Nonlinear Systems

Hyung-Joong Kim*, Young-Ho Hwang*, Eung-Seok Kim**, Hai-Won Yang*
 *Dept of Elec., Elec., control & Inst. Eng., Hanyang Univ. **School of Elec. Eng., Halla Univ.

Abstract - In this paper, a state observer based direct adaptive fuzzy controller for unknown nonlinear dynamical system is presented. The adaptive parameters of the direct adaptive fuzzy controller can be tuned by using a projection algorithm on-line based on the Lyapunov synthesis approach. A maximum control is used to guarantee the robustness of system. A stability analysis of the overall adaptive scheme is discussed based on the sense of Lyapunov. The inverted pendulum simulation example shows that proposed control algorithm can be used for the tracking problem of nonlinear system.

d : 외부 유계 외란
 $u \in R$: 제어 입력
 $y \in R$: 시스템 출력
 $f(x)$ and $g(x)$: 미지의 유계 함수

시스템 출력 y 만을 측정 가능한 것으로 가정한다. 제어 목표는 시스템 출력 y 가 유계 기준 신호 y_r 를 따라가도록 하는 것이다.

2.2 직접 적응 퍼지 시스템

직접 적응 퍼지 시스템은 기본적으로 IF-THEN 규칙과 fuzzy inference engine으로 구성되어 있다. i 번째 IF-THEN 규칙은 다음과 같다.

$$R^{(i)} : \text{IF } x_1 \text{ is } F_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } F_n^i, \text{ THEN } y' = G^i \quad (2)$$

여기서, F_j^i 와 G^i 는 퍼지 집합이다.

Product inference engine, center-average 비퍼지화, singleton 퍼지화를 사용한 퍼지 시스템의 출력은 다음과 같다.

$$y(x) = \frac{\sum_{i=1}^M \bar{y}^i \left(\prod_{j=1}^n \mu_{F_j^i}(x_j) \right)}{\sum_{i=1}^M \left(\prod_{j=1}^n \mu_{F_j^i}(x_j) \right)} = \theta^T \xi(x) \quad (3)$$

여기서,

$\mu_{F_j^i}(x_j)$: 입력측 membership 함수
 M : IF-THEN 집합의 총 수
 \bar{y}^i : 출력의 singleton 퍼지화 값
 $\theta = [\bar{y}^1, \bar{y}^2, \dots, \bar{y}^M]^T$: 조절가능 파라메터 벡터
 $\xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_M]^T$: fuzzy basis function 벡터

$$\xi_i(x) = \frac{\prod_{j=1}^n \mu_{F_j^i}(x_j)}{\sum_{i=1}^M \left(\prod_{j=1}^n \mu_{F_j^i}(x_j) \right)} \quad (4)$$

위 퍼지 시스템의 전체 구조는 다음과 같다.

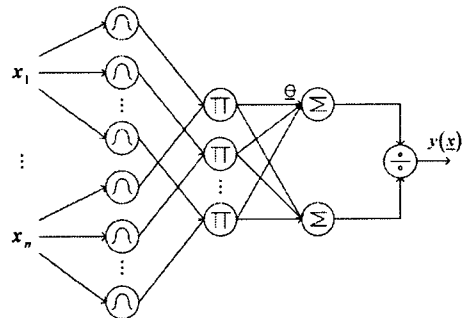


그림1. 직접 적응 퍼지 시스템 구조

1. 서 론

근래에 퍼지 신경망 시스템은 비선형 시스템의 제어에 많이 이용되고 있다. [1]에서는 미지의 비선형 시스템을 제어하기 위해 Lyapunov principle에 따른 안정 직접/간접 적응 퍼지 제어를 설계하였다. 그 이후 [2]에서는 SISO 비선형 시스템을 제어하기 위한 안정 적응 퍼지 제어 설계를 소개하였다. 그러나, 기존 설계들은 시스템의 상태 변수들을 안다고 가정하고 설계하였다. 하지만 많은 경우에 있어서 상태 변수는 쉽게 얻을 수 없기 때문에 출력 피드백 제어를 요구하고 있다.

본 논문에서는 입출력 모델로 표현되는 외란을 포함한 미지의 비선형 시스템을 제어하는 직접 적응 퍼지 출력 피드백 제어를 소개한다. 시스템의 강인한 안정성을 보장하기 위해 최대값 제어(maximum control)를 추가하였다.

모의 실험에서는 역진자(inverted pendulum)를 대상으로 하여 설계된 전체 제어 알고리즘의 추적 성능을 검증한다.

2. 본 론

2.1 제어 대상 및 제어 목표

다음과 같은 n 차 비선형 동적 시스템을 고려한다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B[f(x) + g(x)u + d] \\ y &= C^T x \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}]^T \in R^n$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.3 상태 관측기 설계

출력만을 가지고 제어기를 구성하기 위해 상태 관측기를 설계한다.

기준 신호 벡터, 추적 오차 벡터, 추정 오차 벡터를 차례대로 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} y_r &= [y_r, \dot{y}_r, \dots, y_r^{(n-1)}]^T \in R^n \\ e &= y_r - \hat{x} = [e, \dot{e}, \dots, e^{(n-1)}]^T \in R^n \\ \hat{e} &= y_r - \hat{x} = [\hat{e}, \dot{\hat{e}}, \dots, \hat{e}^{(n-1)}]^T \in R^n \end{aligned} \quad (5)$$

식(1)의 equivalent 제어기는 다음과 같다.

$$u^* = \frac{1}{g(x)} [-f(\hat{x}) + y_r^{(n)} + k_r^T \hat{e}] \quad (6)$$

여기서, (A, B) 는 가제어하므로 $A - Bk_r^T$ 의 특성 방정식이 Hurwitz가 되도록 피드백 이득 벡터 $k_r = [k_{r_n}, \dots, k_{r_1}]^T \in R^n$ 를 선택한다.

제어 입력은 다음과 같이 정의한다.

$$u = u_D(\hat{x}|\theta) + u_M \quad (7)$$

여기서, $u_D(\hat{x}|\theta)$ 는 직접 적용 퍼지 제어기이고 u_M 은 최대값 제어이다.

식(7)과 식(6)로부터,

$$\begin{aligned} \dot{e} &= A_e e - Bk_r^T \hat{e} + B[g(x)(u^* - u_D(\hat{x}|\theta) - u_M) - d] \\ e_1 &= C^T e \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, $e_1 = y_r - y$ 이다.

상태 관측기를 다음과 같이 설계한다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}} &= A \hat{e} - Bk_r^T \hat{e} + k_o (e_1 - \hat{e}_1) \\ \hat{e}_1 &= C^T \hat{e} \end{aligned} \quad (9)$$

여기서, (C, A) 는 가관측하므로 $A - k_o C^T$ 의 특성 방정식이 strictly Hurwitz가 되도록 관측기 이득 벡터 $k_o = [k_{o_n}, k_{o_{n-1}}, \dots, k_{o_1}]^T$ 를 선택한다.

식(8)에서 식(9)를 빼면 다음과 같은 오차 동특성 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}} &= (A - k_o C^T) \tilde{e} + B[g(x)(u^* - u_D(\hat{x}|\theta) - u_M) - d] \\ \tilde{e}_1 &= C^T \tilde{e} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서, $\tilde{e} = e - \hat{e}$ 이다.

식(10)을 다음과 같이 변환한다[3].

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{e}} &= A_c \tilde{e} + B_c [g(x)(u^* - u_D(\hat{x}|\theta) - u_M) - d] \\ \tilde{e}_1 &= C_c^T \tilde{e} \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, $A_c = (A - k_o C^T) \in R^{n \times n}$

$$B_c^T = [0 \ 0 \ \dots \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m] \in R^n$$

$$C_c^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \in R^n$$

$$L(s) = s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m$$

$$u_r^* = L^{-1}(s)u^*, \quad u_{D_r}(\hat{x}|\theta) = L^{-1}(s)u_D(\hat{x}|\theta)$$

$$u_{M_r} = L^{-1}(s)u_M, \quad d_r = L^{-1}(s)d$$

또한, $L^{-1}(s)$ 가 안정한 전달 함수이고 오차 동특성 방정식의 전달함수인 $H(s)$ 와 $L(s)$ 의 곱이 SPR 전달함수가 되도록 $L(s)$ 를 선택한다.

2.4 최대값 제어가 포함된 출력 피드백 적응 퍼지 제어기 설계

설계된 상태관측기를 이용하여 제어기를 구성한다. 최대값 제어가 설계되고 퍼지 시스템의 적응칙을 구한다.

다음과 같은 Lyapunov 함수 후보를 선택하자.

$$V = \frac{1}{2} \tilde{e}^T P \tilde{e} \quad (12)$$

여기서 P 는 symmetric positive definite한 행렬이다. $H(s)L(s)$ 가 SPR이므로 아래를 만족하는 P 를 선택한다.

$$\begin{aligned} A_c^T P + P A_c &= -Q \\ P B_c &= C_c^T \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 Q 는 symmetric positive definite한 행렬이다.

식(11)을 가지고 식(12)을 미분하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \tilde{e}^T P \dot{\tilde{e}} + \frac{1}{2} \tilde{e}^T P \dot{\tilde{e}} \\ &= \frac{1}{2} \tilde{e}^T (A_c^T P + P A_c) \tilde{e} \\ &\quad + \tilde{e}^T P B_c [g(x)(u_r^* - u_{D_r}(\hat{x}|\theta) - u_{M_r}) - d_r] \end{aligned} \quad (14)$$

식(13)을 이용하면 식(14)은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\frac{1}{2} \tilde{e}^T Q \tilde{e} + \tilde{e}_1^T [g(x)(u_r^* - u_{D_r}(\hat{x}|\theta) - u_{M_r}) - d_r] \\ &\leq -\frac{1}{2} \tilde{e}^T Q \tilde{e} + |\tilde{e}_1| [|g(x)| (|u_r^*| + |u_{D_r}(\hat{x}|\theta)|) + |d_r|] \\ &\quad - \tilde{e}_1 g(x) u_{M_r} \end{aligned} \quad (15)$$

가정 : $|f(x)| \leq f_U(x)$, $g_L(x) \leq g(x) \leq g_U(x)$

$$f_U(x) \approx f_U(\hat{x}) < \infty, \quad g_U(x) \approx g_U(\hat{x}) < \infty$$

$$g_L(x) \approx g_L(\hat{x}) > 0, \quad |d| \leq d_m$$

에서 $f_U(x), g_U(x), g_L(x), d_m$ 를 결정할 수 있다.

$L^{-1}(s)$ 은 최대 이득 1인 필터로 생각할 수 있다. 따라서, 최대값 제어를 다음과 같이 설계한다.

$$\begin{aligned} u_M &= \text{sign}(\tilde{e}_1) \frac{1}{g_L(\hat{x})} [|g_U(\hat{x}) u_{D_r}(\hat{x}|\theta) | \\ &\quad + \frac{g_U(\hat{x})}{g_L(\hat{x})} (f_U(\hat{x}) + |y_r^{(n)}| + |k_r^T \tilde{e}|) + d_m] \end{aligned} \quad (16)$$

여기서, $\text{sign}(z)$ 은 z 의 부호에 따라 양일 때 1, 음일 때 -1의 값을 갖는 함수이다.

떨림 현상을 피하기 위하여 식(16)의 sign 함수를 다음과 같은 포화 함수로 변경한다.

$$\text{sat}(\tilde{e}_1) = \begin{cases} \text{sign}(\tilde{e}_1), & \text{if } |\tilde{e}_1| \geq \alpha \\ \tilde{e}_1 / \alpha, & \text{if } |\tilde{e}_1| < \alpha \end{cases}$$

여기서, α 는 설계 파라미터이다.

다음과 같이 최적 파라미터 벡터를 정의한다.

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \left[\sup_{\| \tilde{e} \| \leq m_0} |u_D(\hat{x}|\theta) - u^*| \right] \quad (17)$$

여기서, m_0 는 $\| \theta \|$ 의 유계한 값이다. 최소 근사 오차를 다음과 같이 정의한다.

$$w = g(x) [u_{D_r}(\hat{x}|\theta^*) - u_r^*] + d_r \quad (18)$$

식(17)과 식(18) 및 식(3)을 이용하면 식(11)은 다음과 같이 된다.

$$\dot{\tilde{e}} = A_c \tilde{e} + B_c [g(x) \hat{\theta}^T \xi_f(\hat{x}) - B_c w - B_c g(x) u_{M_r}] \quad (19)$$

여기서, $\hat{\theta} = \theta - \theta^*$ 이다.

θ 의 적응칙을 얻기 위해 다음과 같은 Lyapunov 함수 후보를 선택하자.

$$V = \frac{1}{2} \tilde{e}^T P \tilde{e} + \frac{g(x)}{2\gamma} \hat{\theta}^T \hat{\theta} \quad (20)$$

식(19)을 가지고 식(20)을 미분하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \tilde{e}^T P \dot{\tilde{e}} + \frac{1}{2} \tilde{e}^T P \dot{\tilde{e}} + \frac{g(x)}{\gamma} \hat{\theta}^T \dot{\hat{\theta}} \\ &= -\frac{1}{2} \tilde{e}^T Q \tilde{e} + \frac{g(x)}{\gamma} \hat{\theta}^T (\gamma \tilde{e} \xi_f(\hat{x}) + \dot{\hat{\theta}}) \\ &\quad - \tilde{e}^T P B_c g(x) u_{M_r} - \tilde{e}^T P B_c w \end{aligned} \quad (21)$$

여기서, $\xi_f(\hat{x}) = L^{-1}(s) \xi(\hat{x})$ 이다.

$\hat{\theta} = -\hat{\theta}$ 이므로 다음과 같은 적응칙을 선택한다.

$$\dot{\hat{\theta}} = \gamma \bar{q}_i^T \xi_f(\hat{x}) \quad (22)$$

식(16)으로부터 $\bar{q}_i^T PB_i g(x) u_m \geq 0$ 이므로 식(21)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \bar{q}_i^T Q \bar{q}_i - \bar{q}_i^T PB_i w \quad (23)$$

식(22)의 적응칙을 유계하도록 만들기 위해 다음과 같이 바꾼다.

$$\dot{\hat{\theta}} = \begin{cases} \gamma \bar{q}_i^T \xi_f(\hat{x}) & \text{if } \|\hat{\theta}\| < m_\theta \\ \text{or } (\|\hat{\theta}\| = m_\theta \text{ and } \bar{q}_i^T \xi_f(\hat{x}) \leq 0) \\ \text{Proj}\{\gamma \bar{q}_i^T \xi_f(\hat{x})\} & \text{if } \|\hat{\theta}\| = m_\theta \text{ and } \bar{q}_i^T \xi_f(\hat{x}) > 0 \end{cases} \quad (24)$$

여기서, projection 함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\text{Proj}\{\gamma \bar{q}_i^T \xi_f(\hat{x})\} = \gamma \bar{q}_i^T \xi_f(\hat{x}) - \gamma \frac{\bar{q}_i^T \xi_f(\hat{x}) \hat{\theta}}{\|\hat{\theta}\|^2} \hat{\theta} \quad (25)$$

2.5 모의 실험

역진자를 실험 대상으로 하여 설계된 제어기의 추적 성능을 검증하였다. 제어 목표는 막대의 각을 우리가 원하는 각으로 추적하는 것이다.

시스템의 동적 특성방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (f + gu + d)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

여기서,

$$f = \frac{m l x_2^2 \sin x_1 \cos x_1 - (M + m) g \sin x_1}{m l \cos^2 x_1 - \frac{4}{3} l (M + m)}$$

$$g = \frac{-\cos x_1}{m l \cos^2 x_1 - \frac{4}{3} l (M + m)}$$

M은 차체의 무게, m은 막대의 무게, g_v 는 중력 가속도, l은 막대의 반 길이이다. 모의 실험에서는 이 값들을 다음과 같이 가정한다.

$$M = 1 \text{ kg}, m = 0.1 \text{ kg}, l = 0.5 \text{ m}, g_v = 9.8 \text{ m/s}^2$$

외부 외란 d는 크기가 ± 0.1 이고 주기가 2π 인 구형파로 넣는다. 그리고, 기준 신호는 $y_r = (\pi/30)\sin(t)$ 이다. 상태 변수의 초기치는 다음과 같은 값을 사용했다.

$$x_0 = [0.25 \quad 0.25]^T \quad \dot{x}_0 = [-0.15 \quad -0.15]^T$$

사용된 설계 파라미터의 값은 $\gamma = 2500$, $\alpha = 0.001$ 이다.

사용된 필터는 $L^{-1}(s) = 1/(s+0.01)$ 이다.

Membership 함수는 다음과 같다.

$$\mu_{F_1}(x_1) = 1 / (1 + \exp(5 \times (x_1 + 2.5)))$$

$$\mu_{F_2}(x_1) = \exp(-(x_1 + 1.5)^2)$$

$$\mu_{F_3}(x_1) = \exp(-(x_1 + 0.5)^2)$$

$$\mu_{F_4}(x_1) = \exp(-x_1^2)$$

$$\mu_{F_5}(x_1) = \exp(-(x_1 - 0.5)^2)$$

$$\mu_{F_6}(x_1) = \exp(-(x_1 - 1.5)^2)$$

$$\mu_{F_7}(x_1) = 1 / (1 + \exp(-5 \times (x_1 - 2.5)))$$

사용된 유계값은 $g_L = 1.1$, $g_U = 1.5$, $f_U = 16$, $d_m = 0.15$ 이다.

그림2.에서는 기준 신호와 그것을 추적하는 실제 막대의 각도를 보여주고 있다. t=0에서 막대의 각을 약 14.3°로 설정하고 실험한 결과로서, 약 0.5초에서부터

거의 오차 없이 추적함을 볼 수 있다.

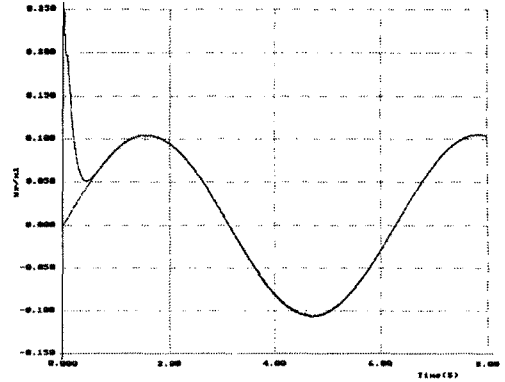


그림2. y_r 와 x_2 (초기에 상위의 것)

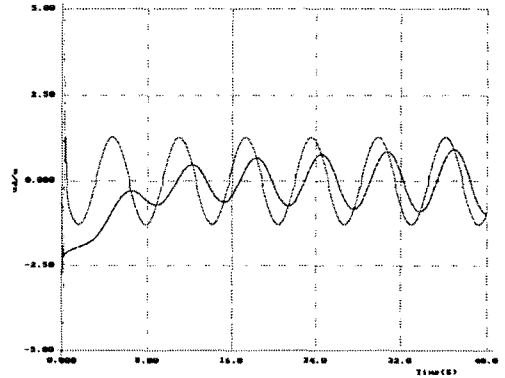


그림3. u_d 와 u (초기에 상위의 것)

그림3.에서는 전체 제어 입력과 퍼지 제어 입력을 보이고 있다. 시간이 지남에 따라 퍼지 제어가 전체 제어의 대부분을 담당함을 볼 수 있다. 따라서 최대값 제어는 점점 작아진다. 이는 퍼지 제어가 equivalent 제어에 가까워진다는 것을 말해준다.

3. 결 론

본 논문에서 설계한 제어기는 크게 상태 관측기, 퍼지 제어기, 최대값 제어기로 구성되었다. 추가된 최대값 제어기는 퍼지 제어를 보강함으로써 강인성을 보장한다. 직접 적용 퍼지 시스템을 아주 단순한 구조로 구성했음에도 불구하고 빠른 시간 내에 추적 오차가 거의 0으로 수렴함이 모의 실험에 의해 확인되었다. 설계된 출력 피드백 제어기는 외란이 포함된 미지의 비선형 시스템을 제어하는 목표를 달성하였다.

【참 고 문 헌】

- [1] L.X. Wang, Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1994
- [2] B.S. Chen, C.H. Lee, Y.C. Chang, "H ∞ tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: adaptive fuzzy approach", IEEE Trans. Fuzzy Systems, 4, 32-43, 1996
- [3] Y.G. Leu, T.T. Lee, W.Y. Wang "Observer-Based Adaptive Fuzzy-Neural Control for Unknown Nonlinear Dynamical Systems", IEEE Tran. Sys., man, and Cybern.-part B, 29, 583-591, 1999