

하알함수 미분연산행렬의 유도와 시스템해석으로의 응용

안비오* , 강기원**, 김민형§ , 김종부§
 † 중소기업진흥공단, **정보통신연구진흥원, § 인덕대학

Operational matrix for differentiation of Haar function and its application for systems and control

P. Ahn, K. W. Kang, M. K. Kim, J. B. Kim
 †Small Business Corp., **Inst. of Information Technology Assessment, § Induk Inst. Tech.

Abstract - In this paper, differentiation operational matrix for Haar function is derived. Proposed method only using a matrix calculation of Haar discrete matrix and block-pulse function's integration operational matrix. It would be possible to use to design an algebraic estimator for fault detection or unknown input observer effectively.

1. 서 론

직교함수의 시스템 및 제어 분야로의 응용은 1973년 M. S. Corrington[1]이 적분 방정식을 최소자승(least-square) 관점에서 근사화 시켜 선형대수방정식으로 축소할 수 있음을 보이면서부터이다. 이 과정에서 그는 Walsh함수를 사용하였으며, Walsh 급수전개시의 계수를 look-up table이라는 이름의 2차원 배열로 정리하였다. 그리고, 이 적분과정에서 Walsh함수의 불연속성은 모두 제거될 수 있었다. 그러나, Walsh함수가 미분되었을 경우의 결과는 가변적 부호를 갖는 불연속의 Dirac delta-function을 만든다. 또한, 고차미분의 경우는 Walsh 급수전개가 발산되는 고차의 특이함수가 된다. 이러한 이유로 Corrington은 미분방정식의 해를 구하기 위한 Walsh함수 미분에 의한 접근을 포기하였다. Corrington이 제안한 Walsh함수 적분에 의한 미분방정식 해법은 해를 초기에 가정하고 반복연산 방법이 사용되었다. 그러나, 반복연산 방법이 많은 연산시간을 필요로 하고, 그 수렴성을 증명해야하는 점 등을 지적하며 T. L. Van[2]은 간편한 대수 공식을 미분방정식 해법으로 새로이 제안하였고, 여기서 그는 Walsh함수의 적분 및 미분연산자를 개발하였다.

C. F. Chen[3]은 1977년 Walsh함수와 블럭펄스함수 사이의 관계를 정립하고, 통신공학에서 블럭펄스함수가 Walsh함수에 비해 보다 직교적이고 유용함을 보였다. 여기서, Chen은 블럭펄스함수가 Walsh함수에 비해 직교변환을 통해 임의의 함수를 근사화 하는데 기본적이고 그 적분연산 행렬의 유도 역시 매우 간단함을 보였다. Chen은 여기서 블럭펄스함수의 미분연산 행렬을 처음으로 소개하였으며, Walsh함수에 대해서는 블럭펄스함수와의 선형적 관계를 통해 유도하였다. 이 미분연산행렬은 Van[2]이 Walsh함수에 대해서 유도한 것에 비해 체계적임을 알 수 있다.

최근 들어 하알함수를 이용한 시스템 및 제어분야로의 응용이 하알 wavelet의 이용과 더불어 많은 논의가 되고 있다. Walsh함수나 블럭펄스함수에 비해 하알함수의 경우 하알 이산행렬 및 적분연산행렬에 $\sqrt{2}$ 항을 포함하고 있어 일반적인 행렬연산에 의한 역-행렬을 취할 경우 연산시간의 증가와 함께 오차가 비교적 많이 존재하게 되는 것이 사실이다. 따라서 본 논문에서는 블럭펄스함수와 하알함수와의 상관관계를 이용하여 하알함수의 미분연산행렬(적분연산행렬의 역-행렬)을 하알 이산행렬과 블럭펄스함수 적분연산행렬의 행렬연산만으로 유도할

수 있는 방법을 제시하고자 한다. 제안된 하알함수 미분 연산행렬 유도를 위한 행렬연산방법은 예제를 통해서 검증하여보았다. 이러한 하알함수 미분연산행렬의 유도는 고장추정 및 미지입력관측기 설계 분야의 직교함수를 이용한 대수적 접근에 대한 방법을 제시할 것으로 기대한다.

2. 하알함수 미분연산행렬의 유도

2.1 하알함수

하알함수는 다음의 식(1)과 같이 정의되는 불연속의 완전 정규직교함수이다.

$$\begin{aligned}
 h_0(t) &= 1 \\
 h_1(t) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \\
 &\vdots \\
 h_{(2^p+g)}(t) &= \begin{cases} \sqrt{2^p}, & \frac{g}{2^p} \leq t < \frac{(g+1/2)}{2^p} \\ -\sqrt{2^p}, & \frac{(g+1/2)}{2^p} \leq t < \frac{(g+1)}{2^p} \\ 0, & \text{그 외 구간} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $p=0,1,\dots, \log_2 \frac{m}{2}$ 이고, $g=0,1,\dots, 2^p-1$ 이다. 다음의 그림 1은 하알함수 8항전개시의 그림이고 식(2)와 같은 하알 이산행렬로 표현 가능하다.

$$\Psi_{h(t)} = \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \\ h_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

구간 $t \in [0, t_f)$ 에서 완전적분 가능한 임의의 함수 $f(t)$ 는 time-scaling을 하여 구간 $r \in [0, 1)$ 에서 하알함수 m 항 전개를 통하여 식(3)과 같이 표현할 수 있다.

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} f_k h_k(r) \tag{3}$$

여기서, $r = \frac{t}{t_f}$ 이고 $r \in [0, 1)$ 이다.

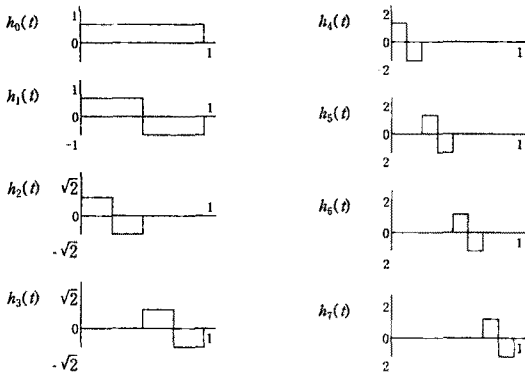


그림 1. 하알함수(8항 전개)

식(3)의 하알함수 계수 f_i 는 식(4)의 최소자승 오차를 최소화하는 필요조건으로부터, 식(5)와 같이 결정된다.

$$\epsilon = \frac{1}{t_f} \cdot \int_0^1 \left[f(\tau) - \sum_{i=0}^{m-1} f_i h_i(\tau) \right]^2 d\tau \quad (4)$$

$$f_i = \frac{1}{t_f} \cdot \int_0^1 f(\tau) h_i(\tau) d\tau \quad (5)$$

여기서, $i=0, 1, \dots, m-1$
하알함수의 계수 값 f_i 는 이산하알함수 변환으로부터 세부구간에서의 샘플 값 혹은 평균 값 f_i 를 이용하여 식(6)과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$f_i = \frac{t_f}{m} \cdot \sum_{j=0}^{m-1} h_i(\tau) \cdot f_j \quad (6)$$

$$f_i = \frac{m}{t_f} \int_{\frac{i}{m}}^{\frac{i+1}{m}} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{t_f}{m} i\right) + f\left(\frac{t_f}{m} (i+1)\right) \right]$$

여기서, $i=0, 1, \dots, m-1$

2.2 미분연산행렬의 유도

m항 전개된 하알함수의 적분은 식(7)과 같이 적분연산행렬로 표현되고, 식(8)과 같은 행렬 형태를 갖는다. 그림 2는 하알함수 8항전개시의 적분 값을 나타낸다.

$$\int_0^1 H_m(t) dt = P_{h(m)} \cdot H_m(t) \quad (7)$$

$$P_{h(m)} = \begin{bmatrix} P_{h(\frac{m}{2})} & -\frac{1}{\sqrt{2}} m^{-\frac{3}{2}} \cdot \Psi_{h(\frac{m}{2})} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} m^{-\frac{3}{2}} \cdot \Psi_{h(\frac{m}{2})}^T & 0_{(\frac{m}{2})} \end{bmatrix} \quad (8)$$

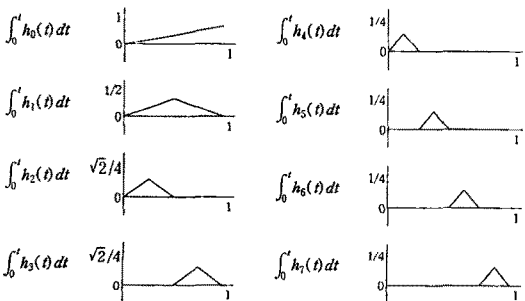


그림 2. 하알함수 적분(8항 전개)

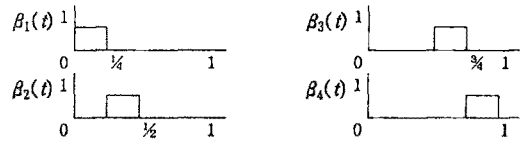


그림 3. 블럭펄스함수(4항 전개)

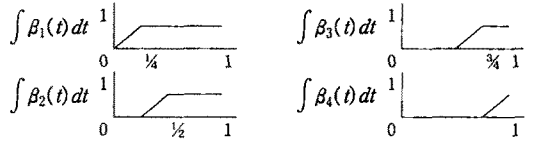


그림 4. 블럭펄스함수의 적분(4항 전개)

하알함수와 블럭펄스함수와의 상관관계를 이용하여 식(8)로 표현된 하알함수 적분연산행렬의 역-행렬 즉, 미분연산행렬을 유도하기 위해 블럭펄스함수(4)를 잠시 살펴보면 그림 3, 4와 같다.

그림 4의 블럭펄스함수적분은 다음의 식(9)와 같은 적분연산행렬 P_{β} 를 갖는다.

$$P_{\beta(4)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

하알함수와 블럭펄스함수는 식(10)과 같은 관계식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} h_0(t) \\ h_1(t) \\ h_2(t) \\ h_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_0(t) \\ \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \beta_3(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

식(10)은 식(11)과 같이 나타낼 수 있고,

$$H_m(t) = \Psi_{h(m)} \cdot B_m(t) \quad (11)$$

식(11)을 적분하고, 식(7)의 관계를 이용하면 식(12)와 같이 표현된다.

$$\int_0^1 \Psi_{h(m)} \cdot B_m(t) dt = P_{h(m)} \cdot \Psi_{h(m)} \cdot B_m(t) \quad (12)$$

식(12)에서 $\Psi_{h(m)}^{-1} = \frac{1}{m} \Psi_{h(m)}^T$ 의 성질을 이용하면,

$$\int_0^1 B_m(t) dt = \frac{1}{m} \Psi_{h(m)}^T \cdot P_{h(m)} \cdot \Psi_{h(m)} \cdot B_m(t) \quad (13)$$

결국, 식(13)은 식(14)관계를 입증하게 된다.

$$P_{\beta(m)} = \frac{1}{m} \Psi_{h(m)}^T \cdot P_{h(m)} \cdot \Psi_{h(m)} \quad (14)$$

$$= \Psi_{h(m)}^{-1} \cdot P_{h(m)} \cdot \Psi_{h(m)}$$

식(14)의 양변에 inverse를 취하면,

$$P_{\beta(m)}^{-1} = \Psi_{h(m)}^{-1} \cdot P_{h(m)}^{-1} \cdot \Psi_{h(m)} \quad (15)$$

결국, 식(15)에서 식(16)의 관계를 유도할 수 있다.

$$P_{h(m)}^{-1} = \Psi_{h(m)} \cdot P_{\beta(m)}^{-1} \cdot \Psi_{h(m)}^{-1} \\ = \frac{1}{m} \Psi_{h(m)} \cdot P_{\beta(m)}^{-1} \cdot \Psi_{h(m)}^T \quad (16)$$

식(16)은 하알함수 적분연산행렬의 역-행렬 즉, 하알함수 미분연산행렬을 블럭필스함수 적분연산행렬의 역-행렬로부터 쉽게 구할 수 있음을 보인다. 식(9)에서 보는 바와 같이 블럭필스함수 적분연산행렬은 상-삼각행렬 (upper triangular matrix)이고, 구성이 1과 1/2로 되어 있어 식(8)의 하알함수 적분연산행렬에 비해 매우 쉽게 그 역-행렬을 구할 수 있음을 알 수 있다.

3. 적용 예제

적용예제에서는 $\frac{1}{2}t^2$, e^{2t} , $\sin(t)$ 의 함수를 각각 하알함수 전개를 한 뒤 유도된 식(16)의 하알함수 미분연산행렬을 이용하여 대수적으로 미분 연산하여 각각의 미분함수 값인 t , $2e^{2t}$, $\cos(t)$ 함수와 비교하여 보았다. 그림 5~7에서 보는 바와 같이 적용된 식(16)에 의해 계산된 함수들이 모두 만족할 만한 결과를 보임을 알 수 있다.

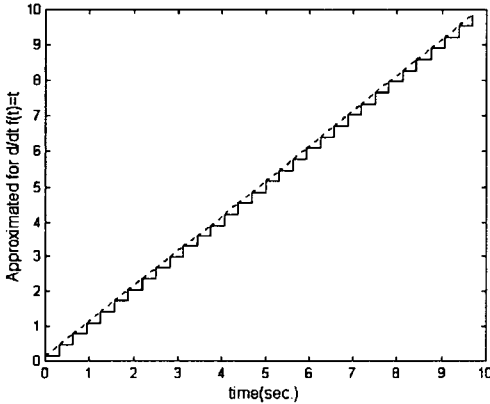


그림 5. 예제(1) $f_1(t) = \frac{d}{dt} f_2(t) = t$, $f_2(t) = \frac{1}{2}t^2$

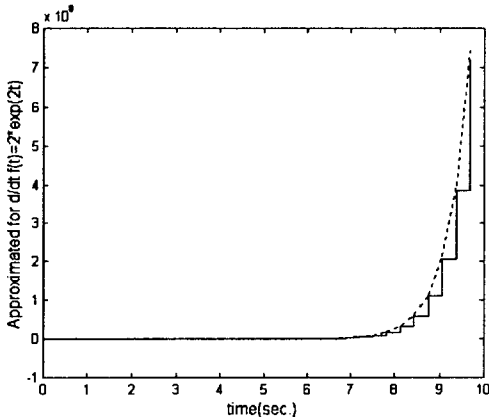


그림 6. 예제(2) $f_1(t) = \frac{d}{dt} f_2(t) = 2 \cdot e^{2t}$, $f_2(t) = e^{2t}$

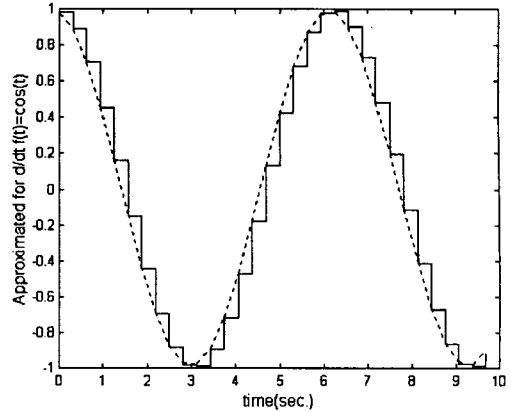


그림 7. 예제(3) $f_1(t) = \frac{d}{dt} f_2(t) = \cos(t)$, $f_2(t) = \sin(t)$

4. 결 론

본 논문에서는 하알함수 미분연산행렬을 하알함수 적분연산행렬의 역-행렬로부터 직접 구하는 것이 아니라, 블럭필스함수와 하알함수의 상관관계를 이용하여 하알함수 이산행렬과 블럭필스함수 적분연산행렬의 역-행렬과의 연산으로부터 구할 수 있는 방법을 제시하였다. 블럭필스함수 적분연산행렬은 식(9)와 같이 상-삼각행렬로 일반적인 형태로의 역-행렬 유도가 가능하기 때문에 [5] 실질적으로는 단순한 행렬연산만으로 하알함수의 미분연산행렬을 구할 수 있음을 알 수 있다. 하알함수 적분연산행렬에 역-행렬을 취하여 구할 경우 행렬에 포함된 $\sqrt{2}$ 에 의해 절삭오차가 생길 수 있으므로 제안된 방법에 의한 하알함수 미분연산행렬의 계산이 보다 정확함을 알 수 있다.

[참 고 문 헌]

- [1] M. S. Corrington, Solution of differential and integral equations with Walsh functions, IEEE Trans. CT-20(5), 470-476, 1973.
- [2] T. L. Van, L. D. C. Tam, and N. V. Houthe, On direct algebraic solutions of linear differential equations using Walsh functions, IEEE Trans. AC-22(5), 886-888, 1977.
- [3] C. F. Chen, Y. T. Tsay, and T. T. Wu, Walsh operational matrices for fractional calculus and their application to distributed systems, J. Franklin Institute, 303(3), 267-284, 1977.
- [4] K. B. Datta and B. M. Mohan, "Orthogonal functions in system and control," World Scientific Publishing, 1995.
- [5] Z. H. Jiang and W. Schaufelberger, Block-pulse functions and their applications in control systems. Berlin: Springer-Verlag, 1990.