

개선된 블럭 펄스 계수 추정 기법을 이용한 적분 연산 행렬 유도

김태훈^o, 심재선^{oo}, 이해기*
^o한국정보보호진흥원, ^{oo}삼척대학교, *충청대학

A Derivation of Operational Matrices via Improved Block Pulse Coefficients Estimation Method

Tai-hoon Kim^o, Jae-sun Shim^{oo}, Hae-ki Lee*
^oKISA, ^{oo}Samcheok Univ., *Chungcheong College.

Abstract - This paper presents a new method for finding the Block Pulse series coefficients and deriving the Block Pulse integration operational matrices which are necessary for the control fields using the Block Pulse functions. This paper presents the method for improving the accuracy of the Block Pulse series coefficients and derives the related integration operational matrices by using the Lagrange second order interpolation polynomial and expands that matrix to general form.

의 두 끝점들에서의 원래 함수의 평균값에 의해서 근사화됨을 나타내는 것으로서, 곡선인 구간에서 오차가 커지게 된다. 이러한 오차를 줄이기 위하여 Lagrange 이차 보간 다항식을 이용하여 블럭펄스 급수의 계수를 구하도록 한다. 세 개의 점 $t_0 = (i-2)h$, $t_1 = (i-1)h$, $t_2 = ih$ 를 지나는 $f(t)$ 에 대한 이차 보간 다항식을 $p_2(t)$ 라고 하면, Lagrange 형태의 보간 다항식 $p_2(t)$ 는 식 (2.3)과 같게 되고, 미소구간 $t \in [(i-1)h, ih]$ 에서 적분하면 식 (2.4)와 같은 형태의 블럭 펄스 계수를 얻을 수 있게 된다.

1. 서 론

연속시간 입출력 신호들을 근사화된 급수로 전개하고 적분 연산행렬을 적용하면 선형 대수방정식 집합들을 얻을 수 있고, 그 미분 방정식들의 파라미터들을 추정할 수 있다. Corrington은 상미분 방정식을 풀기위해 윌쉬연산행렬들을 구성하였는데, 후에 Chen과 Hsiao[1-2]가 그중 하나를 윌쉬연산행렬로 채택한 것이 일반화되어 사용되었다. 그 후 만일 적분연산행렬이 윌쉬영역으로부터 블럭펄스영역으로 전환된다면 계산상의 복잡함이 현저히 줄어든다는 것이 밝혀졌고[3-4], 또한 선형 시변인 경우에 편리한 일반형 블럭펄스적분연산행렬이 유도되었다.

$$p_2(t) = f((i-2)h) \frac{(t-(i-1)h)(t-ih)}{2h^2} - f((i-1)h) \frac{(t-(i-2)h)(t-ih)}{h^2} + f(ih) \frac{(t-(i-2)h)(t-(i-1)h)}{2h^2} \quad (2.3)$$

$$F_i = \int_{(i-1)h}^{ih} p_2(t) dt = -\frac{1}{12} f((i-2)h) + \frac{8}{12} f((i-1)h) + \frac{5}{12} f(ih) \quad (2.4)$$

2.2 Lagrange 이차 보간 다항식을 이용한 적분 연산 행렬

우선 세 점 $t_0 = (i-2)h$, $t_1 = (i-1)h$, $t_2 = ih$ 를 지나는 보간 다항식을 표시하면 식 (2.5)와 같고,

본 논문에서는 보간다항식을 이용하여 블럭펄스 함수의 계수를 추정함과 동시에 적분연산행렬 및 일반형 적분연산행렬을 유도함으로써 기존의 방식보다 오차를 줄일 수 있는 방법을 제안하였다.

2. 본 론

2.1 새로운 블럭펄스 계수 추정 기법

블럭 펄스 급수의 전개는 원래의 함수 $f(t)$ 가 구분 연속 상수값의 함수 $\hat{f}(t)$ 에 의하여 근사화될 수 있음을 의미하는 것이며, 이러한 근사화는 구간 $t \in [0, t_f]$ 에서 $f(t)$ 와 $\hat{f}(t)$ 사이의 평균자승오차를 표시하는 식 (2.1)의 최소값에 도달하는 것이다[5].

$$\epsilon = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \left[f(t) - \sum_{j=0}^{N-1} F_j \psi_j(t) \right]^2 dt \quad (2.1)$$

기존의 방식에서는 블럭 펄스의 폭 h 가 충분히 작다고 가정한 후 다음의 식 (2.2)와 같은 단순한 관계로부터 근사적으로 블럭 펄스 계수들을 결정하였다[6].

$$F_i = \frac{1}{2} (f(t_i) + f(t_{i+1})) \quad (2.2)$$

단, $f(t_i)$ 와 $f(t_{i+1})$ 은 $t = ih$ 와 $t = (i+1)h$ 의 $f(t)$ 값

$$\bar{g}(t) = g((i-2)h) \frac{(t-ih)(t-(i-1)h)}{2h^2} - g((i-1)h) \frac{(t-ih)(t-(i-2)h)}{h^2} + g(ih) \frac{(t-(i-1)h)(t-(i-2)h)}{2h^2} \quad (2.5)$$

이 보간 다항식으로부터 함수 $g(t)$ 의 i 번째 블럭 펄스 계수를 구하면 식 (2.6)과 같다.

$$\bar{g}_i = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} \bar{g}(t) dt = -\frac{1}{12} g((i-2)h) + \frac{8}{12} g((i-1)h) + \frac{5}{12} g(ih) \quad (2.6)$$

함수 $g(t)$ 는 함수 $f(t)$ 의 적분이므로 식 (2.7)의 관계가 성립한다.

$$g(ih) = \int_0^{ih} f(t) dt = h \left(\frac{1}{h} \int_0^h f(t) dt + \frac{1}{h} \int_h^{2h} f(t) dt + \dots + \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} f(t) dt \right) = h(f_1 + f_2 + \dots + f_i) \quad (2.7)$$

그러나 식 (2.2)는 각각의 블럭 펄스 계수가 미소구간

식 (2.7)의 관계식이 다음의 경우에도 적용된다.

$$g((i-1)h) = h(f_1 + f_2 + \dots + f_{i-1}) \quad (2.8)$$

$$g((i-2)h) = h(f_1 + f_2 + \dots + f_{i-2}) \quad (2.9)$$

식 (2.7)부터 식 (2.9)까지를 식 (2.6)에 대입하여 정리하면 다음의 식 (2.10)을 얻을 수 있다.

$$\bar{g}_i = h \left(f_1 + f_2 + \dots + f_{i-2} + \frac{13}{12} f_{i-1} + \frac{5}{12} f_i \right) \quad (2.10)$$

하지만 식 (2.10)에서 알 수 있는 것과 같이, f_{-1} 과 f_0 은 존재하지 않기 때문에 이 식은 $i=3, 4, \dots, m$ 일 경우에만 의미를 갖게 된다. $i=2$ 일 경우에는 식 (2.6)으로 직접 식 (2.11)과 같은 값을 얻을 수가 있다(단, $g(0)=0$ 이다).

$$\begin{aligned} \bar{g}_2 &= -\frac{1}{12} g(0) + \frac{8}{12} g(h) + \frac{5}{12} g(2h) \\ &= h \left(\frac{13}{12} f_1 + \frac{5}{12} f_2 \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

그리고 $i=1$ 인 경우에는 함수 $f(t)$ 와 $g(t)$ 가 $t < 0$ 에서 정의되지 않았기 때문에 첫 번째 블록 펄스 계수 \bar{g}_1 을 구하기 위하여 세 점을 이용한 보간 다항식을 사용할 수 없다. 따라서 이 경우에는 다른 원소들의 배열 상태를 확인하여 일관성을 유지할 수 있도록 추정항을 사용하도록 한다.

식 (2.10)부터 식 (2.11)까지의 관계를 이용하여 함수 $g(t)$ 의 블록 펄스 계수를 다음과 같은 벡터 형태로 표시하는 것이 가능하다.

$$\begin{aligned} g(t) &\doteq [\bar{g}_1 \ \bar{g}_2 \ \dots \ \bar{g}_m] \Phi(t) \\ &= [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_m] \bar{P} \Phi(t) \end{aligned} \quad (2.12)$$

여기서 행렬 \bar{P} 는 다음의 식 (2.13)으로 주어지게 되며, 이것이 기존의 적분 연산 행렬 P 의 성능을 개선한 것이다.

식 (2.13)과 같은 개선된 적분 연산 행렬 \bar{P} 를 이용하여서, 함수 $f(t)$ 의 적분을 다음의 식 (2.14)와 같이 쉽게 표시할 수 있다.

$$\bar{P} = \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \dots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

$$\int_0^t f(t) dt \doteq F^T \bar{P} \Phi(t) \quad (2.14)$$

2.3 일반형 블럭 펄스 적분 연산 행렬 유도

일반형 적분 연산 행렬을 유도하기 위하여 우선 2회 적분에 대한 경우를 고려하면, 적분 연산 행렬은 다음과 같은 단계를 거쳐 구할 수 있게 된다.

(i) 식 (2.13)으로 표현된 적분 연산 행렬의 모양을 변형하여 다음과 같은 형식으로 만든다.

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{h}{2} \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & 2 & \dots & 2 \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{13}{6} & \dots & 2 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \\ &= h \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{13}{12} & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \frac{5}{12} & \frac{13}{12} & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{12} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{5}{12} \end{bmatrix} = hA \end{aligned} \quad (2.14)$$

(ii) 식 (2.14)에 있는 행렬 A 의 전치 행렬을 구한다.

$$\begin{aligned} A^T &= \begin{bmatrix} \frac{5}{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{13}{12} & \frac{5}{12} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \frac{13}{12} & \frac{5}{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \frac{5}{12} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\frac{5}{12} & 0 & 0 & \dots & 0] \\ [\frac{13}{12} & \frac{5}{12} & 0 & \dots & 0] \\ [1 & \frac{13}{12} & \frac{5}{12} & \dots & 0] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [1 & 1 & 1 & \dots & \frac{5}{12}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.15)$$

(iii) 변형된 행렬 A 를 구성하는 행벡터들은 각각 블럭 펄스 급수의 동일 계수들에 해당하는 부분들이 되므로, 다음과 같은 행렬 B^T 로 변환할 수 있게 된다.

$$B^T = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ \vdots \\ B_m \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\text{단, } B_1 = \frac{5}{12} A_1 \quad (2.17a)$$

$$B_2 = \frac{13}{12} A_1 + \frac{5}{12} A_2 \quad (2.17b)$$

$$B_3 = A_1 + \frac{13}{12} A_2 + \frac{5}{12} A_3 \quad (2.17c)$$

⋮

$$B_m = A_1 + A_2 + \dots + A_{m-2} + \frac{13}{12} A_{m-1} + \frac{5}{12} A_m \quad (2.17d)$$

(iv) 식 (2.16)으로 구해진 행렬의 전치 행렬을 구하고, 이 행렬에 2회 적분을 의미하는 상수 h^2 을 곱한다.

이와 같은 관계를 k 번 적분한 경우로 확장하여 생각해 보면, 다음의 절차에 따라서 계수를 보정한 새로운 일반

형 적분 연산 행렬 \bar{P}_k 를 구할 수 있게 된다.

- (1) 식 (2.14)부터 식 (2.16)까지의 과정을 $k-1$ 번 반복한다.
- (2) 결과로 얻어진 행렬의 전치 행렬을 구한다.
- (3) 결과 행렬에 k^k 를 곱한다.

2.4 시뮬레이션

입력의 함수 $f(t) = 12t^2$ 을 적분 구간 $t \in [0, 1)$ 에서 전개 항수를 4로 하여서 2회 적분한 경우를 고려하도록 한다.

우선 주어진 함수 $f(t) = 12t^2$ 에 이차 보간 다항식을 적용하여 구한 블럭 펄스 급수 계수값은 다음의 식 (2.18)과 같으며,

$$f(t) = [0.3125 \quad 1.7500 \quad 4.7500 \quad 9.2500] \Phi(t) \quad (2.18)$$

기준에 사용하던 근사화 방식을 사용한 경우의 블럭 펄스 급수 계수값은 다음의 식 (2.19)와 같다.

$$f(t) = [0.3750 \quad 1.8750 \quad 4.8750 \quad 9.3750] \Phi(t) \quad (2.19)$$

주어진 함수 $f(t)$ 를 실제로 두 번 적분한 함수를 $w_1(t)$ 라고 하는 경우에는 다음의 식 (2.20)과 같이 블럭 펄스 급수 계수를 구할 수 있게 된다.

$$w_1(t) = \int \int f(\tau) d\tau d\tau \quad (2.20)$$

$$= [0.00078125 \quad 0.02421875 \quad 0.16484375 \quad 0.61015625] \Phi(t)$$

기존의 적분 연산 행렬 P 를 이용하여 주어진 함수 $f(t)$ 를 두 번 적분한 함수를 $w_2(t)$ 라고 하는 경우의 블럭 펄스 계수는 다음의 식 (2.21)과 같다.

$$w_2(t) = \int \int f(\tau) d\tau d\tau \quad (2.21)$$

$$= F^T P^2 \Phi(t)$$

$$= [0.00585938 \quad 0.05273438 \quad 0.24023438 \quad 0.75585938] \Phi(t)$$

Wang이 유도하였던 일반형 적분 연산 행렬 P_k (단, k 는 적분 횟수)을 이용하여 주어진 함수 $f(t)$ 를 두 번 적분한 함수를 $w_k(t)$ 라고 하는 경우의 블럭 펄스 계수는 다음의 식 (2.22)과 같게 된다.

$$w_k(t) = \int \int f(\tau) d\tau d\tau \quad (2.22)$$

$$= F^T P_2 \Phi(t)$$

$$= [0.00390625 \quad 0.04296875 \quad 0.21484375 \quad 0.70703125] \Phi(t)$$

앞서 유도한 새로운 일반형 적분 연산 행렬 \bar{P}_k 를 이용하여 주어진 함수 $f(t)$ 를 두 번 적분한 함수를 $w_{new \ mod}(t)$ 라고 하는 경우의 블럭 펄스 계수는 다음의 식 (2.23)과 같게 된다.

$$w_{new \ mod}(t) = \int \int f(\tau) d\tau d\tau \quad (2.23)$$

$$= F^T \bar{P}_2 \Phi(t)$$

$$= [0.00339084 \quad 0.03662109 \quad 0.18948025 \quad 0.64648438] \Phi(t)$$

식 (2.20)부터 식 (2.23)까지를 비교하여 보면, 본 연구에서 제안한 일반형 적분 연산 행렬을 이용하는 경우의 정확성이 더 높다는 것을 알 수 있다. 이 결과를 정

리하여 비교하여 보면, 다음의 표 2.1과 같다.

표 2.1에서 보는 바와 같이, 적분이 거듭되는 경우에는 일반적으로 사용하는 상용 적분 연산 행렬 P 나 Wang이 유도한 일반형 적분 연산 행렬 P_k 를 이용하는 것보다 본 논문에서 새로 유도한 일반형 적분 연산 행렬 \bar{P}_k 를 이용하는 것이 실제값에 훨씬 더 근사함을 알 수 있다.

표 2.1 4항 전개시의 블럭 펄스 급수 계수($m=4$)
Table 2.1 Block Pulse series coefficients($m=4$)

항	실제값	P^2 이용	\bar{P}^2 이용	P_2 이용	\bar{P}_2 이용
1	0.00078125	0.005859375	0.00488281	0.00390625	0.00339084
2	0.02421875	0.052734375	0.03838433	0.04296875	0.03662109
3	0.16484375	0.240234375	0.19110786	0.21484375	0.18948025
4	0.61015625	0.755859375	0.64811198	0.70703125	0.64648438

3. 결 론

본 논문에서는 오차를 줄이기 위하여 Lagrange 이차 보간 다항식을 이용하는 새로운 블럭 펄스 급수 계수 추정 기법을 제안하였고, 이를 확장하여 기존의 블럭 펄스 적분 연산 행렬보다 오차가 적은 새로운 적분 연산 행렬을 소개하였다. 또한 이를 확장하여 새로운 일반형 블럭 펄스 적분 연산 행렬을 유도하였으며, 시뮬레이션을 통하여 Wang이 유도한 일반형 적분 연산 행렬보다 오차가 적음을 확인하였다. 이를 이용하여 향후 다중 적분 형식으로 표현된 선형계 및 비선형계 시스템의 해석 및 상태 추정 문제에 응용할 수 있을 것이다.

[참 고 문 헌]

- [1] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "Design of Piecewise Constant Gains for Optimal Control via Walsh Functions", IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-20, pp. 596, 1975
- [2] C. F. Chen and C. H. Hsiao, "A State Space Approach to Walsh Series Solution of Linear Systems", Int. J. Systems Sci., Vol. 6, pp. 833, 1975
- [3] C. F. Chen, Y. T. Tsay and T. T. Wu, "Walsh Operational Matrices for Fractional Calculus and Their Application to Distributed Systems", J. Franklin Inst., Vol. 303, pp. 267, 1977
- [4] C. Hwang and T. Y. Guo, "Identification of Lumped Linear Time-varying Systems via Block Pulse Functions", Int. J. Systems Sci., Vol. 15, pp. 361, 1984
- [5] C. H. Wang, "Generalized Block Pulse Operational Matrices and Their Applications to Operational Calculus", Int. J. Control, Vol. 36, No. 1, pp. 67, 1982
- [6] Z. H. Jiang and W. Schaufelberger, "Block-pulse Functional and Their Applications in Control Systems", Springer-Verlag, 1992
- [7] G. Strang, "Linear Algebra and Its Applications", 2nd ed., Academic Press, pp. 103, 1980
- [8] N. S. Hsu, "Identification of Non-linear Distributed Systems via Block-pulse Functions", Int. J. Control, Vol. 36, No. 2, pp. 281, 1982