2003년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2003.7.21-23

스펙트럼 적응 사상을 이용한 선형시스템의 불량조건 완화기법

전재웅* · 조기선 · 박종배 · 신중린
건국대학교 전기공학과

An alleviant technique for solving Ill-Conditioned Linear Systems Using Spectral Adaptive Mapping

Jae-Woong Chun · Ki-Seon Cho · Jong-Bae Park · Joong-Rin Shin
Dept. of Electrical Eng. Konkuk Univ.
jrshin@konkuk.ac.kr

Abstract - This paper presents an alleviant technique for solving ill-conditioned linear systems using spectral adaptive mapping, which is based on spectral mapping theorem. The conventional approaches to solve the ill-conditioned linear systems are divided into reformulation and alleviant technique. So far, the alleviant technique is evaluated the most effective one. In this paper, an adaptive mapping of spectrum is adopted to alleviate the condition number of ill-conditioned linear systems. A shift constant, which is a dominant factor of the spectral adaptive mapping that are proposed, is assessed by the system spectrum. The proposed spectral adaptive mapping technique is tested to demonstrated the validation on several size Hilbert matrices and small scale power systems, which are provide the promising results.

Keyword : Ill-Conditioned Linear System, Spectral Mapping Theorem, Shift constant, eigenvalue, power systems

1. 서 론

일반적으로 선형시스템은 $Ax=b$ 형태의 선형대수방정식으로 표현이 가능하고, 비선형시스템의 경우에도 시스템의 동태(dynamics)해석이 아닌 정태(static)해석은 대부분 근사적인 선형대수방정식으로 정식화될 수 있다. 이러한 선형대수방정식의 해법으로는 가우스 소거법과 같이 유한한 연산 단계를 거쳐 해를 도출하는 직접법(direct method)과 유한한 일련의 연산과정을 무한히 반복 수행함으로써 해를 도출하는 반복법(iterative method)으로 크게 대별된다. 디지털 컴퓨터를 통해서 이들 접근방법을 구현하면, 직접법의 경우에는 통상적으로 정확한 수학적 해(mathematical solution)를 도출하지는 못하고 근사적 수치해(numerical solution)를 구하게 되며, 반복법은 수학적 해에 보다 근접한 해를 도출하기 위해서 추가적인 반복과정이 요구된다[1-3].

선형대수방정식은 시스템의 상태에 따라 이론적으로 수학적인 해는 존재하지만 실지로 디지털 컴퓨터에서 수치해가 존재하지 않는 경우가 있다. 이는 주로 해법이 구현된 시스템의 유한한 데이터 표현 자릿수에서 기인한 반올림(round off)오차가 그 원인이다. 수학적 해에 근접한 수치해의 존재에 대한 평가는 방정식의 계수행렬(coefficient matrix)에 대한 조건(condition)을 통해서 수행된다(상대량인 조건수(condition number)로 정량화 된다). 계수행렬 A나 기지벡터 b의 미소변화가 해에 커다란 변화를 야기하는 경우에 주어진 시스템은 '불량조건(ill-conditioning)하에 있다'라고 한다. 이러한 불량조건인 시스템은 계산상의 어떠한 노력을 통해서도 정확한 해를 얻는 것이 어렵다고 알려져 있다[1].

불량조건하에 있는 선형대수방정식을 효과적으로 해결하기 위한 접근법으로는 연산 절차의 재구성을 통해서 해결하는 방법과 불량조건인 계수행렬을 양호조건(well-conditioning)하에 놓이도록 변환하여 근사해를 도출하는 접근방법을 생각할 수 있다.

Kaczmarz[2,1937년]는 행-직교행렬(row-orthogonal matrix)을 이용한 반복적 접근법(projection method)을 제안하여 불량조건인 대규모 선형시스템의 해를 도출한 바 있다. 하지만, 대상 계수행렬이 행-직교행렬이라는 가정과 함께 수렴속도의 한계성을 보였다. Yu 등[2, 1992년]은 임의의 비특이(nonsingular) 계수행렬에 대해서도 Kaczmarz 기법을 적용할 수 있도록 Kaczmarz 확장 기법을 제시하였다. 임의 비특이 계수행렬에 대해서 재귀적 Gram-Schmidt 직교화 기법을 사용하여 계수행렬을 LQ(L:하부삼각행렬, Q:행-직교행렬)로 분해하여 처리하는 불량조건 완화기법이다. 변환된 LQ에 대해서 전진대입(forward substitution)으로 $Ly=b$의 y를 도출하고, $Qx=y$에 대해서 Kaczmarz기법을 바로 적용하여 불량조건하의 선형대수방정식의 해를 도출하였다. Yu 접근법의 문제점은 상대적으로 큰 불량조건을 갖는 계수행렬에 대해서 LQ분해가 유효하지 않다라는 데 있다. 하지만, 현재로서도 불량조건인 문제의 가장 효과적인 해결책 중에 하나인 것은 사실이다.

Kim 등[3, 1996년]은 고유치를 일정량(shift constant;이동계수) 이동시키는 스펙트럼 사상정리(spectral mapping theorem)를 이용하여 불량조건을 완화한 연후에 방정식의 역행렬을 통해 해를 도출하는 불량조건 완화기법을 제안하였다. [3]은 불량조건 완화기법에 스펙트럼 사상정리의 활용 가능성을 보여준 점에서 중요한 의미를 갖는다. 불량조건인 시스템은 대부분 최소 고유치가 0에 근접하여 발생되는 문제로, 불량조건인 시스템에 양의 이동계수를 도입하여 스펙트럼을 양의 실수 방향으로 이동함으로써 계수행렬의 조건을 완화한 것이다. 시스템의 계수행렬이 양의 정치(positive definite)인 경우에는 양의 실수방향으로의 사상정리가 유효하지만, 양의 정치에 해당하지 않는 경우, 즉, 음의 고유치가 존재하는 경우에는 양의 실수방향으로의 사상정리가 유효하지 않다. 실세계에게 접하게 되는 문제가 양의 정치가 아닌 경우가 많다는데 그 심각성이 있다.

전력시스템의 계획 및 운용단계에서의 다양한 해석의 근간이 되고 있는 전력조류계산(load flow)은 운전 상황이 전압붕괴점(voltage collapse) 근처로 갈수록 자코비안 행렬(계수행렬)의 조건이 심각한 불량조건하에 놓이게 되어 기존 해법들이 수렴하지 못하고 발산하게 된다. 이러한 상황에서 자코비안 행렬은 양의 정치성(positive-definiteness)을 만족하지 않으며 LQ분해 또한 유효하지 않아, 기존의 선행 연구들의 결과를 적용하는 데 한계가 있다.

본 논문은 불량조건인 시스템 방정식의 효과적인 해결을 위해 불량조건을 완화한 연후에 해를 도출하는 접근방법을 시도하였으며, 스펙트럼 사상정리에 기초하여 시스템의 고유치의 분포특성에 따라 적응적(adaptive)으로 사상정리를 확장한 스펙트럼 적응 사상(spectral adaptive mapping)을 통해서 기존의 접근방법의 한계성을 극복하였으며, 사상에 가장 중요한 인자인 이동계수는 스펙트럼(spectrum)에서 파악하였다. 먼저 스펙트럼 적응 사상과 이동계수에 대해서 기술하고, 가장 전형적인 불량조건 문제인 Hilbert 행렬을 대상으로 제안한 접근법의 실효성을 평가한 연후에 전력조류계산 문제에 적용하여 제안한 기법의 활용 가능성을 검토하였다.

2. 스펙트럼 적응 사상과 이동계수

2.1. 스펙트럼 적응 사상

전형적인 선형대수방정식은 (1)과 같이 정식화된다.

$$Ax = b \tag{1}$$

여기서 A는 계수행렬 $(n \times n)$이고, b는 $(n \times 1)$차원의 기지 벡터이며, x는 $(n \times 1)$차원의 미지의 해 벡터이다. 정식(1)의 계수행렬과 기지벡터의 미소 오차가 해벡터에 미치는 영향에 대한 정량적인 평가는 조건수(condition number)로써 평가될 수 있으며, 정식(2)와 같이 계수행렬의 최소 고유치와 최대 고유치의 비율로써 정의되는 상대적인 지표이다.

$$cond(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\| = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} \tag{2}$$

시스템이 불량조건인 경우는 대부분 λ_{max}이 큰 값을 갖기 때문이 아니라 λ_{min}이 상대적으로 작아 수치 0에 근접되어서 발생되는 문제이다. 따라서, 복소평면상에 표현된 시스템의 스펙트럼-고유치의 분포-를 일정량으로 사상(mapping)함으로써 시스템의 조건수를 개선할 수 있다. 이때, 스펙트럼이 이동되는 량을 이동계수(shift constant; m)라 표현하면, 사상된 후의 계수행렬 $\widehat{A}$의 조건수는 (3)과 같이 표현될 수 있다.

$$cond(\widehat{A}) = \frac{\lambda_{max} + m}{\lambda_{min} + m} \tag{3}$$

정식(1)의 계수행렬이 불량조건이라 가정하고 이동계수를 도입하여 스펙트럼 사상정리를 적용하면 (4)와 같은 정식을 얻을 수 있다.

$$Ax + mx = b + mx \tag{4}$$

여기서 계수행렬 A가 불량조건하에 있으므로 A^{-1}를 구하는 것은 무효하고 역행렬을 도입하지 않은 x에 대한 정식은 [3]의 결과를 수정 없이 도입하기로 하자.

$$x = (A+mI)^{-1}\{b + m(A+mI)^{-1}b + m^2(A+mI)^{-1}x\} \tag{5}$$

정식(5)의 우변항에 도입된 이동계수 m이 작은 값이라 하면, 세번째 항은 무시될 수 있으며, 근사 미지벡터 $\widehat{x}$는 (6)과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} \widehat{x} &= (A+mI)^{-1}\{b + m(A+mI)^{-1}b\} \\ &= M(I+mM)\, b \end{aligned} \tag{6}$$

여기서 $M = (A+mI)^{-1}$이다. 이동계수 m은 기존의 접근법에서 양수(positive value)만을 사용하고 있다. 즉, 계수행렬 A가 양의 정치성을 만족하는 경우에 양의 실수측 방향으로 스펙트럼을 사상함으로써 시스템의 조건수를 개선할 수 있다. 하지만, 양의 정치성을 만족하지 않고 음의 고유치를 갖는 시스템에 대해서는 사상에 의해서 오히려 조건수가 악화될 수 있다. 또한, 조건수를 악화시키지 않는 이동계수를 선정해야 하는 문제점마저 안고 있다.

본 논문에서는 기존의 사상기법의 한계를 극복하기 위해서 시스템의 상태에 보다 능동적으로 대처하기 위한 스펙트럼 적응 사상(spectral adaptive mapping)을 제안한다. 스펙트럼 적응사상이란 시스템의 스펙트럼 영역이 복소평면상의 원점을 포함하는지에 따라서 스펙트럼을 복소평면상의 좌우로 적응적으로 사상하는 것을 말한다. 각각의 경우에 대한 사상을 요약하면 다음과 같다.

- Case A : $\Omega \subset PC$: positive mapping($m > 0$)
- Case B : $\Omega \subset NC$: negative mapping($m < 0$)
- Case C : $\Omega \subset C$, $\Omega \not\subset PC$, $\Omega \not\subset NC$
  : adaptive mapping($\pm m$)

여기서 Ω는 시스템 전체 고유치를 포함하는 공간이고, PC는 양의 실수를 갖는 복소공간, NC는 음의 실수를 갖는 복소공간이며 C는 복소공간 전체를 나타낸다. 각 경우는 스펙트럼 이동에 따른 조건수의 악화를 방지하는 방향으로의 사상을 유도하고 있다. 이동계수의 부호 즉, 사상의 방향은 전술한 사례별 판정을 통해서 결정될 수 있다.

2.2. 이동계수(shift constant)

제안한 스펙트럼 적응 사상의 이동계수는 시스템 스펙트럼에서 그 정보를 얻어 능동적으로 정의되며, 구현된 시스템 사양과 밀접하게 관련되어 있다. 구현 시스템에 정의되는 부동소수점의 상대 정확도는 머신입실론(machine epsilon ; eps)으로 나타난다. 64bit 배정도(double precision) 자료 구조(data structure)에서 가수부(mantissa)로 52bit를 사용하는 경우에 eps는 2.2204×10^{-16}이다(IEEE standard). 이러한 머신입실론을 이동계수의 한계값을 정의하는 데 사용하였다. (6)의 근사식이 도출되기 위한 조건에 대한 평가를 통해서 이동계수의 한계를 정의할 수 있다. (6)은 (5)의 3번째 항이 무시된 근사식으로 (7)의 조건하에서 성립한다.

$$m(A+mI)^{-1}b \gg m^2(A+mI)^{-1}x \tag{7}$$

(7)에서 이동계수를 제외한 모든 인자가 결정된 상태에서 우변항의 수치는 m^2이 지배적이다. 즉, 우변항이 머신입실론에 근접하도록 이동계수를 선정하면 (7)의 조건을 만족할 수 있고, (6)을 (5)의 근사식으로써 도입할 수 있다. 결국, 이동계수의 한계는 (8)과 같이 정의할 수 있다.

$$m \le \sqrt{eps} = 1.49011 \times 10^{-8} \tag{8}$$

(8)에서 정의한 한계 이동계수보다 작은 이동계수를 취하는 경우, 시스템의 최소고유치와 기지벡터 norm의 상태에 따라 반올림 오차(round-off error)의 영향이 확대되어 오히려 해의 정확도를 해칠 우려가 있다(3.1 참조). 따라서, 시스템의 상태를 반영한 이동계수의 산정이 요구된다. 사상 전후의 미지벡터 잔차(residual)의 한계, 계수행렬과 기지벡터의 정밀도 및 조건을 고려하여 이동계수를 산정한다. 근사 미지벡터 $\widehat{x}$에 대한 잔차 정규(residual norm)는 (9)와 같다.

$$\|r\|_2 = \|b - A\widehat{x}\|_2 \le \frac{m^2}{\lambda_{min}(\lambda_{min} + m)^2}\|b\|_2 \tag{9}$$

여기서, 시스템에서 요구되는 정확도인 잔차 정규를 만족하는 적정 이동계수를 구하기 위해 (9)를 이동계수에 대해서 전개하면 (10)과 같은 적정 이동계수를 산정할 수 있다.

$$m = \lambda_{min} \Big/ \left\{ \sqrt{\frac{\|b\|_2}{\|r\|_2 \times \lambda_{min}}} - 1 \right\} \tag{10}$$

적정 이동계수와 이동계수의 한계를 이용하여 시스템의 상태에 따른 적정 이동계수를 도입함으로써, 해의 정밀도를 보장하면서 불량조건인 시스템을 해결하는 하나의 수단으로 본 논문에서 제안한 스펙트럼 적응 사상을 사용할 수 있다.

최소고유치가 복소평면상의 원점에 근접한 정도가 이동계수 산정의 주요한 결정요소로써 고려되어 시스템의 상황에 능동적으로 이동계수가 산정됨으로써, 실세계 문제에 적용하여서도 시스템의 상태를 충분히 고려할 수 있는 적응 사상이 실현되었다. 다음 장에서는 제안한 접근기법을 실세계 문제에 적용하여 그 타당성에 대한 평가를 수행하였다.

3. 스펙트럼 적응 사상의 적용

3.1. 힐버트(Hilbert) 행렬에 대한 적용

가장 전형적인 불량조건인 Hilbert행렬에 대해서 스펙트럼 적응 사상을 적용하여 그 가능성을 검토하였다. 10차 Hilbert 행렬을 계수행렬로 하는 선형대수방정식에 대해 이동계수의 변화에 따른 스펙트럼적응사상기법과 Yu[2]가 제안한 기법, 그리고 스펙트럼 적응사상과 Yu기법을 혼용한 추가 기법에 대한 평가를 수행하였다. 각각의 norm과 이동계수를 도입한 연후에 조건수의 변화에 대해서 Matlab 6.1 시뮬레이션을 수행하였으며, 그 결과를 그림 1에 제시하였다.

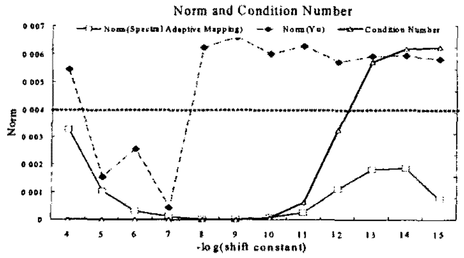

그림 1 Hilbert 행렬에 대한 이동계수에 따른 정규와 조건수
Fig. 1 Norm and condition number with shift constant on 10th Hilbert Matrix

그림 1은 이동계수의 변화($10^{-4} \sim 10^{-15}$)에 따른 개별 접근기법의 norm을 비교한 것이다. 2.2절에서 언급한 바와 같이 10차 Hilbert 행렬의 경우 10^{-9}보다 작은 값은 이동계수에 대해서는 오히려 norm이 증가하고 있으며, 조건수를 통해서 그러한 사실이 극명하게 드러나고 있다. 또한, Yu가 제안한 기법을 통해서 유도된 norm은 중앙의 점선으로 표시된 것으로 스펙트럼 적응사상에 비해서 큰 norm을 가짐을 확인할 수 있다. 본 연구에서 시스템 계수행렬이 LQ분해 가능한 경우에 대해 적응사상과 LQ분해법을 혼용한 복합 접근방법의 타당성을 검토하기 위해서 적응 사상 후에 Yu기법을 적용하여 해를 도출하고 해당 norm을 관찰하였다. 그림 1에 제시된 바와 같이 적응사상을 단독으로 사용하는 것에 비해 성능이 떨어짐을 확인할 수 있었다.

3.2. 전력조류계산에 대한 적용

전력계통에 대해서 제안한 스펙트럼 적응사상을 적용하여 실세계문제의 활용 가능성을 검토하였다. 전력계통에서 불량조건이 발생되는 문제로는 크게 전력계통 상태추정 문제와 전력조류계산 문제를 들 수 있는 데 본 연구에서는 전력조류계산 문제에 국한하였다. 전력조류계산해법으로 Newton-Raphson 기법을 사용하는 경우, 불량조건은 초기치의 선정이 잘못된 경우와 전압붕괴점(voltage collapse) 근방의 부하조건에서 발생된다. 이때, 초기치의 선정이 잘못된 경우는 일반적으로 불량조건으로 분류하지 않고[4], 전압붕괴점 근방의 부하조건을 불량조건으로 간주하고 있다. 초기치의 선정이 잘못된 경우에는 스펙트럼 적응사상을 적용한다 하더라도 시스템의 정확한 해를 구할 수 있는 것은 아니다. 본 연구에서는 전압붕괴점 근방의 부하조건에 대한 불량조건 완화 문제를 고려하였다. 예제계통으로 3모선 전력계통을 통해서 스펙트럼 적응사상에 의한 불량조건 완화기법의 타당성을 검토하고자 하였다.

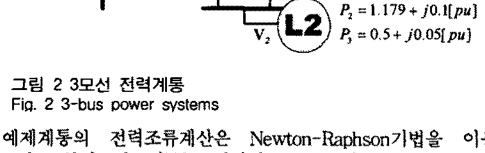

그림 2 3모선 전력계통
Fig. 2 3-bus power systems

예제계통의 전력조류계산은 Newton-Raphson기법을 이용하였으며, 부하(2번모선)를 점진적으로 증가(117.9~117.921MW) 시켰을 때 자코비안 행렬의 행렬조건을 그림 3에 제시하였다. 그림 3에 화살표로 표시된 구간에서의 고유치의 변화가 크게 나타나고 있으며, 이때의 조건수 변화가 크게는 10^3배까지 변화하는 형태가 관찰되었다.

2번 모선의 부하량이 117.916MW 부근에서의 전력조류계산에 제안한 스펙트럼 적응사상을 적용하였다. 사례연구에서 이동계수는 특정 값으로 고정하지 않고 매 반복에서 조건수의 변화율에 따라 적응적으로 가변하면서 부여하였다. 부하량의 변화에 따른 기존전력조류계산과 제안한 적응사상기법의 결과는 표 1에 요약하였다.

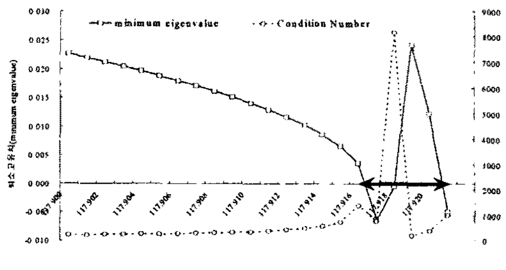

그림 3 유효전력 증가에 따른 자코비안 행렬의 최소 고유치와 조건수
Fig. 3 Minimum eigenvalue and condition number of jacobian matrix along with active powers on bus 2

표 1 기존 전력조류계산과 제안한 기법의 비교
Table 1 Comparison of the proposed approach with conventional Load Flow

P_2	State	Method		
		Conventional LF	SAM	shift constant
117.9164	V_2	0.60087∠-0.67123	0.60087∠-0.67123	$10^{-8} \sim 10^{-6}$
	V_3	0.69558∠-0.43822	0.69558∠-0.43822	
117.9164045	V_2	발산	0.60079∠-0.67133	$10^{-8} \sim 10^{-4}$
	V_3		0.69552∠-0.43827	

표 1의 결과를 통해서 확인할 수 있듯이 기존의 전력조류계산이 발산하는 부하조건에서 제안한 스펙트럼 적응사상기법은 유효한 조류계산 해를 도출할 수 있었다. 이는 전압붕괴점 부근에서 자코비안 행렬의 행렬조건이 불량함으로써 발생되는 문제를 제안한 불량조건 완화 기법을 통해서 해결할 수 있음을 보여주는 것이다.

3.3. 고찰

본 연구에서 제안한 스펙트럼 적응사상 기법을 힐버트 행렬과 전력조류계산에 적용함으로써 그 활용 가능성을 검토한 바, 불량조건으로 문제시되는 선형대수방정식의 해법으로 채택 가능한 방법임을 입증하였으며, 해의 요구되는 정확도에 따른 이동계수의 적응적 변환을 통해서 기존 조류계산 기법에 활용할 수 있음을 확인할 수 있었다.

4. 결 론

본 논문에서는 불량조건하에 있는 선형대수방정식 문제를 해결하기 위한 방안으로 시스템의 조건수를 개선하는 스펙트럼 적응사상을 제안하였으며, 사상을 위한 적정 이동계수를 시스템의 기지행렬의 norm과 최소고유치의 위치에 대한 정보를 통해서 산정하였다. 제안한 접근방법은 불량조건인 문제를 완화하여 해석할 수 있음에 대한 가능성을 보여주었으며, 실지로 전력조류계산 문제에 적용하여 그 응용 가능성을 검토하였다. 전력조류계산의 불량조건으로는 인식되고 있지 않으나 방정식을 불량조건에 빠뜨릴 수 있는 초기치 선정의 적정성 평가 또한 본 접근방법의 활용 가능한 분야라고 인식되며, 이에 대한 추가적인 연구가 요구된다.

[Acknowledgement]

이 논문은 산업자원부에서 시행한 전력산업 인프라 구축 지원사업으로 수행된 논문입니다.

[참 고 문 헌]

[1] J. R. Rice, *Matrix Computations and Mathematical Software*, New York, McGraw-Hill, 1981.
[2] X. Yu, N.K. Loh and W.C. Miller, "New Recursive Algorithm for Solving Linear Algebraic Equations", *Electronics Letters*, Vol.28, No.22, pp. 2069-2071, Oct. 1992.
[3] H. J. Kim, *et al.*, "A New Algorithm for solving Ill-Conditioned Linear Systems", *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol.32, No.3, pp. 1373-1376, May. 1996.
[4] Y.Wang, et al., "Investigation of the Relationship between Ill-Conditioned Power Flow and Voltage Collapse", IEEE Power Engineering Review, Vol.20, No.7, pp.43-45, Jul 2000.